Math. A.
218

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Math. A.
218

Neuer Auszug

aus den

Anfangsgründen

aller

mathematischen Wissenschaften.

Mit

nöthigen Veränderungen und Zusätzen

von

Joh. Tob. Mayer und Karl Christian Langsdorf.

Mit Kupfern.

Marburg,
in der Academischen Buchhandlung in Commission,
1797.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Ich pflege die Mathematik aus zwey Ursachen zu recommendiren: einmahl wegen der andergleichlichen Ordnung, in welcher sie ihre Sachen gründlich ausführet; darnach wegen ihrer Lehren, welche sowohl in gründlicher Erkenntniß der Natur und Kunst, als im menschlichen Leben vielfältig genutzet werden. Die Ordnung ist dasjenige, warum ich die Mathematik einem jeden, der studiret, nothwendig zu seyn erachte. Denn ich bin mit **Philipp Melanchthon** der gewissen Meynung, es könne niemand etwas in gründlicher Ordnung ausführen, welcher nicht in der Mathematik sich mit Fleiß geübet. Und deswegen billige ich die Gewohnheit der Griechischen Weltweisen, welche niemanden zum Studiren liessen, der nicht vorher die Arithmetik und Geometrie erlernet hatte. Nemlich, wer was gründliches erlernen will, der muß eine Fertigkeit haben, alles deutlich zu begreifen, und genau zu untersuchen, ob dasjenige, was er höret oder lieset, der Wahrheit gemäß sey, oder nicht. Ja auch diejenigen, welche die Wahrheiten der Christlichen Religion gründlich einzusehen haben, müssen nicht mit einem blinden Köhlerglauben zu ihren Lehrern kommen, und etwas blos deswegen

für wahr annehmen, weil es der hochgelehrte Mann, an den man sie zum nöthigen Unterricht verwiesen hat, für wahr ausgiebet. Es ist nicht genug, daß er ihnen die Wahrheit saget, sondern sie müssen es auch begreifen, daß es Wahrheit sey, das ist, daß die von ihm gemachte Erklärung der Schrift richtig, und die von ihm behauptete Sätze aus dieser richtigen Erklärung durch bündige Schlüsse folgen. Denn da **Paulus** nicht leiden will, daß die Gläubigen sollen **Kinder am Verständniß** werden (a), das ist, wie die Kinder ohne Ueberlegung annehmen, was ihnen von einem vorgesaget wird, von dem sie eine gute Meynung haben, und aus dem Gedächtniß nachsagen, wovon nichts in den Verstand kommen ist, so kann auch kein Lehrer, der Paulisch gesinnet ist, von seinen Zuhörern begehren, daß sie sich wie die kleinen Kinder einwickeln lassen, wie es ihm gefället. Solche Kinder müssen sich wägen und wiegen lassen, von allerley Wind der Lehre (b), weil der wahre Lehrer nichts vor sich hat, warum er dieses fordern könnte, das nicht auch der Verführer für sich anführen könnte, als welcher sowohl die Wahrheit zu haben vermeinet, als der andere, dem etwan das blinde Glück darzu verholfen. Alle Fertigkeit kommet durch die Uebung, nicht aber durch Erlernung der Regeln, die man in Acht nehmen muß. Derowegen, wenn gleich in der Vernunftlehre alle Regeln auf das gründ-

(a) 1 Cor. XIV. 24. conf. *Hammodi* Paraphrasis.

(b) Eph. 4. 14.

gründlichste erkläret werden. die man, Sachen deutlich zu begreifen und vollständig zu erweisen, in Acht nehmen muß, so kann doch die Vernunftlehre niemanden das Vermögen geben, die Regeln in fertige Uebung zu bringen. Es verhält sich hier nicht anders, wie mit dem Gesetze. Das Gesetz zeiget zwar, was gut und böse ist, und kommet dannenhero daraus Erkenntniß der Sünde; aber es giebt nicht das Vermögen zu einem tugendhaften Wandel. Die Uebung nun in deutlichen Begriffen und ausführlichen Beweisen hat man in der Mathematik, wenn man sie mit gehörigem Fleisse erlernet, und daher giebet sie das Vermögen, die Vernunftlehre ohne einigen Fehltritt auszuüben. Und um dieser Ursachen willen muß die Mathematik vor der Vernunftlehre erlernet werden, wenn man in richtiger Ordnung, ohne einigen Zeitverlust, studiren will. Es ist aber ohne mein Erinnern klar, daß man diesen Nutzen von der Mathematik nicht zu erwarten hat, wenn nicht die von den alten Geometris gebrauchte Lehrart, in allem auf das sorgfältigste in Acht genommen wird: denn nicht die mathematische Wahrheit, sondern die Ordnung, in welcher sie gründlich erkannt wird, ist das Mittel, wodurch der Verstand des Menschen geändert wird. Daher fallet dieser Nutzen der Mathematik weg, wenn man ihre Lehren auf gemeine Art vorträget, nach welcher sie mehr in das Gedächtniß, als in den Verstand gefasset werden. Dieses war die Ursache, warum ich meine Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften herausgab, und darin-

nen auch bey solchen Sachen, die in mathematischer Gewißheit völlig abzuhandeln viel zu weitläuftig fallen würden, die in der Geometrie bey den Alten übliche Ordnung, so viel möglich, in Acht nahm. Ja weil es denen, welche die Wahrheit einzusehen anfangen, nicht anders ergehet, als einem, der aus dem Dunkelen ins Helle kommet, daß er nemlich den allzugroßen Glanz des Lichtes nicht vertragen kann, sondern dadurch einigen Schmerz in seinen Augen empfindet; so habe ich auch in den deutschen Anfangsgründen die völlige Schärfe weder im Erklären, noch im Beweisen in Acht genommen, hingegen diesen Mangel, den Anfänger und in gründlicher Erkenntniß ungeübte für eine Vollkommenheit ansehen, in dem lateinischen Werke, sonderlich den beyden Grundsäulen der mathematischen Wissenschaften, der Arithmetik und Geometrie, ersetzet, da ich sowohl im Erklären, als im Beweisen so weit gegangen, als immer jemand fordern kann. Nemlich die Natur thut weder in der Seele, noch in dem Cörper einen Sprung, sondern alle Veränderungen geschehen nach und nach. Derowegen, wenn der Verstand des Menschen geändert werden soll, kann er nicht auf einmal zu dem höchsten Grade der Vollkommenheit gebracht werden; vielmehr muß der Anfang zur Vollkommenheit unter vielen rückständigen Unvollkommenheiten gemacht werden. Unterdessen muß aber doch der Anfang auch ein Anfang seyn, und nicht allein einer heissen, das ist, auch bey der ersten Erlernung der Mathematik muß einige Veränderung

im

im Verstande vorgehen, und dadurch einige Fertigkeit erreichet werden, zu welcher man nicht würde kommen seyn, wenn man deren statt etwas anderes getrieben hätte. Demnach muß die Mathematik mit den ersten Anfängern dergestalt vorgenommen werden, daß sie unvermerkt das Bild der richtigen Ordnung in ihrem Verstande erblicken, und von der Gründlichkeit einigen Geschmack bekommen. Derowegen weil vielen meine Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften zu weitläuftig geschienen, als daß sie mit Anfängern in der gemeiniglich ihnen vorgesetzten Kürze der Zeit könnten durchgegangen werden; über dieses auch einigen zu theuer vorkommen, und daher begehret worden, daß ich einen Auszug zu bequemern Gebrauche der Anfänger, sonderlich auf Schulen, verfertigen möchte; so habe ich wegen der großen Begierde, die ich bey mir spüre, Verstand und Tugend unter den Menschen zu einem höhern Grade zu bringen, als bisher unter ihnen angetroffen wird, mich leicht dahin bewegen lassen, diese Arbeit dergestalt über mich zu nehmen, daß ich ihnen einen Auszug gewähren möchte, der an Grösse nicht die Hälfte der Anfangsgründe erreichte, und doch in Ansehung des Hauptnutzens ihnen nichts nachgäbe. Damit aber dieser Nutzen nicht aussenbliebe, so achte ich für nöthig, noch was von dem rechten Gebrauche dieses Buchs zu erinnern. Man muß vor allen Dingen dahin sehen, daß die Anfänger in der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie wohl geübet werden. Und kann man den Anfang schon

mit den kleinen Knaben machen, welche die Anfangsgründe der lateinischen Sprache auswendig lernen. Mit diesen nimmet man aus der Arithmerik blos das Aussprechen der Zahlen und die vier Rechnungsarten in ganzen Zahlen vor, jedoch dergestalt, daß man sie allezeit fraget, warum sie dieses so und nicht anders machen, damit sie nicht allein den Grund der Rechnung einsehen, und sie daher besser behalten, sondern auch angewöhnet werden, nichts ohne Grund von jemanden anzunehmen; ingleichen in allem, was sie sehen und hören, um seinen Grund sich zu bekümmern: als welche Aufmunterung des Verstandes ein lehrbegieriges Gemüthe machet, und zur Besserung des Verstandes mehr beyträget, als unerfahrne glauben dürften. Wenn sie eine Rechnungsart wohl verstehen, muß man sie auf die Erklärung führen, die davon im Anfange des Buches gegeben worden, und durch Gegenhaltung der von ihnen gemachten Exempel zeigen, wie sie dasjenige darinnen erblicken, was in der Erklärung stehet. Hierdurch werden sie lernen einen Unterscheid machen zwischen dem, was sie deutlich und undeutlich begreifen; dabey unvermerkt erlernen, wie man aus einzelen Exempeln den darinnen verborgenen allgemeinen Begriff herausuche, und zugleich sich gewöhnen, auf ihr Thun und Lassen Acht zu haben, auch nichts ohne Verstand vorzunehmen. Hören sie nun nach der Zeit bey reiferem Verstande die Regeln, nach welchen er in Erkenntniß der Wahrheit sich richtet, und die ich in meinem Buche von den Kräften des

menschlichen Verstandes vorgetragen habe, so wird ihnen das durch vorige Uebung erlangte Bild bald vor Augen schweben, und werden ihnen die Exempel, darauf sie sich besinnen, alles klar und verständlich machen. In der Geometrie lehret man Anfängern Anfangs nur die Figuren kennen, jedoch dergestalt, daß sie nicht allein den Namen zu nennen wissen, wenn man ihnen die Figur zeiget, sondern auch dasjenige hersagen können, woraus sie die Figur erkennen und von andern unterscheiden, zu welchen Fragen die daselbst gegebene Erklärungen dienlich sind. Hierdurch lernen sie deutliche Begriffe von undeutlichen unterscheiden, welches das erste ist, so in gründlicher Erkenntniß der Wahrheit zu beobachten. Nach diesem muß man sie auf die Zeichnung der Figuren führen, wodurch sie erkennen, wie sie möglich sind, und zugleich inne werden, daß man alsdann erst eine Sache recht begreife, wenn man verstehet, wie sie seyn kann. Alsdann kann man auch die Lehrsätze und die übrigen Aufgaben vornehmen, jedoch auf solche Weise, daß man nach den Bedingungen der Lehrsätze die Figuren zeichnen lässet, und nach diesem durch die Hülfe der Instrumente versuchet, ob der Satz richtig befunden wird, und dasjenige eintrift, was in der Aufgabe aufgegeben worden: welche Proben dergestalt einzurichten sind, daß sie so viel von dem Beweise in sich enthalten, als möglich ist. Ein mehreres findet man von diesen mechanischen Beweisen, wie ich sie zu nennen pflege, unter dem Worte demonstratio mechanica in meinem

Lexico mathematico. Endlich kann man zuletzt die Geometrie durchgehen, wie sie in dem Buche gedruckt ist, jedoch dergestalt, daß man die Beweise durch Fragen durchnimmet, in der Ordnung, wie die Vordersätze mit ihren Hintersätzen in denen dazu nöthigen Schlüssen in einer unverrückten Reihe auf einander folgen. Da man denn allezeit von demjenigen den Anfang machen muß, was entweder die Betrachtung der Figur, oder die Bedingungen der Lehrsätze und die Auflösung der Aufgabe an die Hand geben, und dadurch sich anderer Sätze erinnert, die vorhin ausgemacht worden, damit man etwas neues daraus schliessen kann, wie solches in meinem Lexico mathematico unter dem Worte demonstratio deutlicher gewiesen. Und finde ich es sehr dienlich, wenn man alle Sätze ordentlich unter einander hinschreibet, wenn man darauf kommet. Auf solche Weise wird man nicht allein einen Geschmack von gründlicher Erkenntniß bekommen, sondern auch zugleich einer Sache ordentlich nachzudenken angeführet werden. Hat man die Arithmetik und Geometrie auf eine solche Art nach und nach durchgenommen, so wird man auch ohne Anstoß in den übrigen Disciplinen fortkommen können. Jedoch wollte ich rathen, daß man in denselben durch nöthige Experimente oder Versuche erläuterte, was sich dadurch zeigen lässet: welches schon vorher geschehen könnte, ehe man in der Geometrie sich an die ernsthaften Beweise wagete. Wenn man dieses Buch auf die vorgeschriebene Weise brauchen wird, so zweifele ich nicht, es werde mit

dem

dem Studiren bald ein anderes Ansehen gewinnen. Gott gebe, daß es bald geschehen möge! Noch muß ich dieses erinnern, daß in der andern Auflage hin und wieder einiges verbessert, auch einiges von neuem hinzugesetzet, und einige wenige Druckfehler, welche in die erste Auflage eingeschlichen waren, sowohl im Texte, als den Figuren geändert worden. Halle den 21. Jul. 1713.

Zusatz.

Zusatz.

In neuerer Auflage hat man die fehlende Beweise §. 198. 199. 203. 206. Geom. aus denen Anfangsgründen hinzugefüget, und weil zu denenselben solche Lehrsätze, die sich in dem Auszuge nicht befanden, nöthig waren, so sind einige mit einem * bemerkte §§. aus denen Anfangsgründen zwischen den §. 197. und 198. imgleichen zwischen den §. 205. und 206. eingerückt worden. Die dazu gehörigen Kupfer sind gleichfalls hinzugefügt, und nur die Zeichnung zum Beweis des 31sten Lehrsatzes, vom Verhältniß der Kugel gegen den Cylinder etwas geändert und deutlicher gemacht worden. Man hofft, hierdurch nicht nur Anfängern, sondern auch Lehrenden einen Gefallen erwiesen zu haben, welche sonst genöthiget sind, die fehlende Beweise bey Erklärung des Auszuges dazu zu dictiren. Halle, den 15. April 1755.

Vor-

Vorrede
zur neuen Ausgabe.

Die auf dem Titel genannten Professoren zu Erlangen wurden schon vor 6 Jahren um eine umgeänderte Ausgabe des Wolfischen Auszugs ersucht, aber immer durch den Gedanken, bey der großen Menge neuerer Lehrbücher vielleicht eine überflüßige Arbeit zu übernehmen, abgehalten, jenem Gesuche zu willfahren. Wegen der noch immer häufigen Nachfrage, nach diesem sonst so beliebten Lehrbuche, mußten wir uns aber endlich doch für überzeugt halten, daß es auch jetzt noch öfters zum Unterrichte müsse gebraucht werden, und daß, wenn wir es theils umänderten, theils mit neuen, dem jetzigen Zustande der Mathematik angemessenen Zusätzen vermehrten, wir vielleicht vielen einen Gefallen erweisen dürften. Wir entschlossen uns demnach, den wiederholten Bitten des Verlegers nachzugeben, und liefern also hier Wolfs Auszug, zwar grossentheils in seinem alten Gewande (denn Wolf sollte ja Wolf bleiben) aber in der Hoffnung, daß er sich auch künftig seiner Existenz nicht wird schämen dürfen. Wir glauben, daß er nunmehr zum allererstenUnterrichte in der Mathematik (und diesen Gesichtspunkt muß man ja nicht ausser Acht lassen) wieder eben so nützlich seyn wird, als er es vor 50 Jahren war, wenn bey dem Vortrage diejenigen Zusätze erläutert, und weiter ausgeführt werden, welche wir oft nur ganz

in

in der Kürze berührt haben. Sie hier alle zu erwähnen, würde zu nichts nützen, man wird sie gehörigen Orts in dem Buche finden. **Abänderungen** des Wolfischen Vortrags sind meistens mit den Anfangsbuchstaben unserer Nahmen M. L. bemerkt, und die **neuen Zusätze** mit Hinzufügung lateinischer Buchstaben, z. E. §. 12a) u. f. von dem Texte unterschieden worden. Ohne Noth haben wir Wolfs Vortrag nirgends abgeändert. Daß aber nach dem jetzigen Zustande der Wissenschaft insbesondere die angewandte Mathematik Anlaß zu starken Abänderungen und Zusätzen gegeben haben, wird man voraus erwarten. Hieher rechnen wir den schärfern Beweis der Lehre vom Hebel, die unentbehrlichsten Lehren von den beschleunigenden Kräften, und den dabey nöthigen Bestimmungen der Momente der Trägheit, den schärfern Beweis vom Gleichgewichtsgesetze flüßiger Massen, das nöthigste aus der Lehre vom Barometer und Thermometer, die beynahe gänzliche Umarbeitung der Hydraulik — weil das, was Wolf darüber sagte, für keine Gattung von Lesern unterrichtend seyn konnte — die häufigen Einschaltungen und Abänderungen in der Astronomie, das wichtigste der Lehre von den Parallaxen, in der Artillerie etwas von den Bahnen der geworfenen Körper u. s. w. Ueberhaupt haben wir überall Winke gegeben, Lehrlinge frühzeitig zu überzeugen, daß man viel mehr als bloße Arithmetik und Geometrie verstehen müsse, um zu gründlichen und brauchbaren Kenntnissen in der Mathematik zu gelangen. Die stärkste Abänderung hat die Baukunst erlitten. So wenig derjenige der

bey-

beyden Herausgeber, welche diese Abänderung übernommen, Wolfen tadelt, daß er es zu seiner Zeit, wo es überhaupt an Lehrbüchern über die Baukunst, in deutscher Sprache noch so sehr feh!= te, für nützlich hielt, von den Säulenordnun= gen, und allen ihren einzeln Theilen, und sonsti= gen Zeichnungen und Baurissen, mit einer Weit= läuftigkeit in seinem Auszuge zu handeln, die ihm damals das Ansehen gab, als ob er würklich Bau= kunst enthalte, und Baumeister bilden könne, so sehr zweckwidrig schien ihm diese Anleitung für die jetzige Ausgabe. Gesetzt auch, daß andere hier= über anders urtheilen sollten, so wird man doch so *billig seyn, einzugestehen,* daß es unmöglich ist, sich in einem solchen Handbuche in alle Thei= le der Baukunst einzulassen. Der enge Raum, in welchen man durch die Mannigfaltigkeit der ma= thematischen Wissenschaften eingeschränkt ist, ver= stattet kaum, das Nothwendigste und Wichtig= ste vorzutragen, und obgedachter Herausgeber hoft, daß man in dieser Rücksicht mit seinem Vortrage zufrieden seyn wird.

In der alten Ausgabe vom Wolf, kam nichts von der höhern Geometrie und Analysis vor, und die gemeine Algebra war fast gar nicht zu brau= chen. Auch kam in der Trigonometrie nichts von den jetzt so unentbehrlichen trigonometrischen For= meln vor. Diesen Mängeln ist in der neuen Aus= gabe durchaus abgeholfen, so weit als es der uns vorgesetzte Zweck, nemlich daß Wolfs Auszug nur für die ersten Anfänger dienen soll, verstattete. Man wird sich sicher trösten können, daß dagegen andere entbehrlichere Dinge weggelassen worden sind.

sind. Die Bearbeitung der einzeln Wissenschaften haben die Herausgeber folgendermaaßen unter sich vertheilt:

Mayer.	Langsdorf.
Rechenkunst.	Geometrie.
Algebra.	Trigonometrie.
Höhere Geometrie.	Mechanik.
Analysis des Unendl.	Hydrostatik.
Optik.	Aerometrie.
Katoptrik.	Hydraulik.
Dioptrik.	Baukunst.
Perspektiv.	
Astronomie.	
Geographie.	
Chronologie.	
Gnomonik.	
Artillerie.	
Fortification.	

Wir haben diese Wissenschaften in der Ordnung auf einander folgen lassen, welche uns die natürlichste schien, also nicht z. E. die Algebra zuletzt, wie in der alten Ausgabe. Die Kupfer sind durchaus neu gestochen, und entbehrliche mit nützlichern vertauscht worden. Die Figuren zu den astronomischen Zusätzen befinden sich auf der Tafel, welche die höhere Geometrie enthält. Ein brauchbares nach den §§en eingerichtetes Register macht den Beschluß.

Erlangen im März 1797. Die Herausgeber.

Kurzer Unterricht

von der

Mathematischen Lehrart.

§. 1.

Die Lehrart der Mathematicorum, das ist, die Ordnung, deren sie sich in ihrem Vortrage bedienen, fänget an von den Erklärungen, gehet fort zu den Grundsätzen, und hiervon weiter zu den Lehrsätzen und Aufgaben: überall aber werden Zusatze und Anmerkungen nach Gelegenheit angehänget.

§. 2. Die **Erklärungen** (*Definitiones*) sind deutliche Begriffe, dadurch die Sachen von einander unterschieden werden, und daraus man das übrige herleitet, was man von ihnen erkennet. Es sind aber dieselben zweierley: Entweder Erklärungen der Wörter (*definitiones nominales*), oder Erklärungen der Sachen (*definitiones reales*).

§. 3. Die **Erklärungen der Wörter** geben einige Kennzeichen an, daraus die Sache erkannt werden kann, die einen gegebenen Namen führet. Als wenn in der Geometrie gesaget wird: ein Quadrat sey eine Figur, welche vier gleiche Seiten und gleiche Winkel hat.

§. 4. Die **Erklärungen der Sachen** sind ein klarer und deutlicher Begriff von der Art und Weise, wie die Sache möglich ist. Als wenn in der Geometrie gesaget wird: ein Circul werde beschrieben, wenn eine gerade Linie sich um einen festen Punkt beweget.

§. 5. **Wir nennen einen Begriff** eine jede Vorstellung in dem Verstande.

§. 6. **Es ist aber mein Begriff klar**, wenn meine Gedanken machen, daß ich die Sache erkennen kann, so bald sie mir vorkommt; als z. E. daß ich weiß, es sey diejenige Figur, welche man einen Triangel nennet.

§. 7. Hingegen ist der **Begriff dunkel**, wenn meine Gedanken nicht zulangen, die Sache, so mir vorkommt, zu erkennen. Als wenn mir eine Pflanze gezeiget wird, und ich bin zweifelhaft, ob es eben dieselbige sey, die ich zu anderer Zeit gesehen, und die diesen oder jenen Namen führet.

§. 8. Der **klare Begriff ist deutlich**, wenn ich einem sagen kann, aus was für Merkmaalen ich die vorkommende Sache erkenne. Als wenn ich sage, ein Circul sey eine Figur, die in eine in sich selbst laufende krumme Linie eingeschlossen, deren jeder Punkt von dem Mittelpunkte desselben gleich weit weg ist.

§. 9. **Ein klarer Begriff** aber ist **undeutlich**, wenn man einem die Merkmaale nicht sagen kann, daraus man die vorkommende Sache erkennet: dergleichen ihr von der rothen Farbe habet.

§. 10. **Es ist ein deutlicher Begriff vollständig**, wenn man auch von den Merkmaalen, die er einschließt, deutliche Begriffe hat. Als wenn man in der angegebenen Erklärung des Circuls (§. 8.) auch einen deutlichen Begriff von der geraden Linie, von dem Punkte, von einem festen Punkte und von der Bewegung um denselben hat.

§. 11.

§. 11. Hingegen ist er **unvollständig**, wenn man von den Merkmaalen, die er in sich fasset, keine deutliche Begriffe hat.

§. 12. In den mathematischen Wissenschaften befleißiget man sich vor allen Dingen auf deutliche und vollständige Begriffe, sowohl in den Erklärungen der Sachen, als in den Erklärungen der Wörter.

§. 13. Daher findet man in den folgenden Erklärungen keine Wörter, welche nicht entweder schon in den vorhergehenden wären erläutert worden, oder als anders woher bekannt angenommen werden können.

§. 14. Ja wenn man in einigen Fällen mit einem undeutlichen Begriffe vergnüget seyn kann, so muß er so beschaffen seyn, daß man dazu bald ohne Mühe gelangen kann, und dannenhero von einer Sache, um deren Gegenwart man sich nicht sonderlich zu bemühen hat.

§. 15. Was die Erklärungen der Sachen betrift, so zeigen dieselbigen, wie eine Sache möglich ist, das ist, auf was für Art und Weise sie entstehen kann (§. 4). Und derowegen hat man bey denselben auf zweyerley zu sehen, nemlich auf diejenigen Dinge, welche zu ihrer Möglichkeit etwas beytragen, und auf dasienige, was sie dazu beytragen. Z. E. wenn ein Circul erkläret wird, daß er entstehe, wenn sich eine gerade Linie um einen festen Punkt herum beweget; so erfordert man zu seiner Möglichkeit einen Punkt und eine gerade Linie; der Punkt soll unbeweglich seyn, und also die Bewegung der Linie reguliren; die gerade Linie aber soll sich dergestalt bewegen, daß sie wieder an den Ort kommt, wo die Bewegung sich angefangen hatte.

§. 16. Die Erklärungen, sowohl der Wörter, als der Sachen, können entweder vor sich insbesondere erwogen, oder mit andern verglichen werden. Betrachtet ihr dasjenige, was in den Erklärungen enthalten ist,

und schließet etwas unmittelbar daraus; so nennen wir solches einen **Grundsatz**. Z. E. wenn ihr bey der Erklärung des Circuls bedenket, daß die Linie, welche sich um den Mittelpunkt herum beweget, immer einerley Länge behält: so werdet ihr bald begreifen, daß alle Linien, welche aus dem Mittelpunkte an die Peripherie gezogen werden, einander gleich sind. Diese Wahrheit nun ist ein Grundsatz. In diesem Verstande brauchet der Herr **von Tschirnhausen** dieses Wort; insgemein aber nennet man einen **Grundsatz** einen allgemeinen Satz, den man ohne Beweis einräumet. Und so nehmen das Wort *Euclides* und alle alte und neue Geometrae.

§. 17. Die Grundsätze zeigen, entweder daß etwas sey, oder daß etwas könne gethan werden. Ein Grundsatz von der ersten Art ist, den wir erst aus der Erklärung des Circuls hergeleitet, daß nemlich alle Linien, die aus dem Mittelpunkte an die Peripherie gezogen werden, einander gleich sind. Hingegen ein Grundsatz von der andern Art ist, der aus Erklärung der geraden Linie fließet, daß nemlich von einem jeden Punkte zu einem jeden Punkte eine gerade Linie könne gezogen werden. Im Lateinischen nennet man die Grundsätze der ersten Art Axiomata; die Grundsätze aber der andern Art Postulata.

§. 18. Weil nun die Grundsätze unmittelbar aus den Erklärungen gezogen werden, haben sie keines Beweises nöthig, sondern ihre Wahrheit erhellet, so bald man die Erklärungen ansiehet, daraus sie fließen. Man kann demnach nicht eher versichert seyn, ob der Grundsatz wahr sey oder nicht, bis man die Möglichkeit der Erklärungen untersuchet hat. Sonst hat man nichts mehr, als daß die Grundsätze richtig sind, woferne die Erklärungen möglich sind. Man siehet hieraus zugleich die Ursache, warum **Tschirnhausen** die Grundsätze als sol-

che Sätze beschrieben, die durch eine Erklärung begriffen werden (§. 16.).

§. 19. Mit den Grundsätzen werden unterweilen die Erfahrungen vermenget. Man nennet aber eine **Erfahrung** dasjenige, welches man erkennet, wenn man auf seine Empfindungen Acht hat. Z. E. ich sehe, daß, wenn ein Licht angezündet wird, alle Dinge, die um mich sind, sichtbar werden; diese Erkenntniß wird eine Erfahrung genennet. Und demnach sind die Erfahrungen Sätze von einzeln Dingen; weil ich nichts als einzele Dinge empfinden kann.

§. 20. Wenn man verschiedene Erklärungen gegen einander hält, und daraus schließet, was durch einzele Betrachtungen zu erkennen unmöglich war; so nennet man solches einen **Lehrsatz** (*Theorema*). Z. E. wenn man in der Geometrie einen Triangel mit einem Parallelogrammo vergleichet, welches mit ihm einerley Grundlinie und Höhe hat, und in dieser Vergleichung theils unmittelbar aus den Erklärungen dieser beiden Flächen, theils aus andern Eigenschaften derselben, die aus ihren Erklärungen schon vorher gefunden worden, schließet, daß der Triangel nur halb so groß ist, als das parallelogrammum; wird dieser Satz: **der Triangel ist die Hälfte eines** *Parallelogrammi*, **welches mit ihm einerley Grundlinie und Höhe hat, ein Lehrsatz genennet.**

§. 21. Es ist aber bey jedem Lehrsatze auf zweyerley zu sehen, nemlich einmal auf den **Satz**, darnach auf den **Beweis**. Jener saget aus, was einer Sache unter gewissen Bedingungen zukommen könne oder nicht: dieser aber erkläret, wie unser Verstand dazu gebracht wird, daß er sich solches von der Sache gedenken kann.

§. 22. Die Gründe des Beweises sind theils die Erklärungen derjenigen Wörter und Sachen, die in dem

Lehrsatze enthalten sind, theils auch die aus gedachten Erklärungen von eben diesen Sachen schon vorhin hergeleitete Eigenschaften. Weil man nun in der Mathematik nichts zu den Gründen annehmen lässet, als was entweder in den vorhergesetzten Erklärungen, oder daher geleiteten Grund- und Lehrsätzen enthalten; so pfleget man die Erklärungen und Lehrsätze jederzeit anzuführen, auf welche man den Beweis gründet; theils damit ein jeder siehet, daß die angenommene Gründe des Beweises ihre Richtigkeit haben; theils damit diejenigen, welche die Gründe noch nicht erkannt, oder auch wohl wieder vergessen haben, nachschlagen können und sich ihrer Gewißheit versichern.

§. 23. Die Art und Weise, aus den gesetzten Gründen zu schließen, ist keine andere, als die längst in allen Büchern von der Logica oder Vernunftkunst beschrieben worden. Es sind die Beweise oder Demonstrationes der Mathematicorum nichts anders, als ein Haufen nach den Regeln der Vernunftkunst zusammengesetzter Schlüsse. Daß demnach in denselben alles durch die so genannten Syllogismos geschlossen wird; nur daß man zuweilen, oder wol meistens einen von den Vordersätzen weglässet; weil er entweder dem Leser, der sich den Beweis zu gedenken bemühet, vor sich einfället, oder aus der beygefügten Citation leicht kann errathen werden. Dieses hat nicht allein *Clavius* an dem Beweise des ersten Lehrsatzes in den Elementis *Euclidis*; sondern auch *Herlinus* und *Dasipodius* durch einige Bücher dieser Elementorum, und *Henischius* durch die ganze Rechenkunst gewiesen.

§. 24. Die Aufgaben handeln von etwas, so gethan oder gemacht werden soll, und werden in drey Theile eingetheilet, in den Satz, die Auflösung, und den Beweis. In dem Satze geschiehet der Vortrag von dem, was gemacht werden soll. Die Auflösung erzählt

alles,

alles, was man thun muß, und wie man eins nach dem andern zu verrichten hat, damit geschehe, was man verlanget. Endlich der Beweis führet aus; wenn das geschiehet, was in der Auflösung vorgeschrieben wird, so müsse man auch nothwendig erhalten, was man in dem Satze verlangte. Solchergestalt wird jede Aufgabe in einen Lehrsatz verwandelt, wenn sie bewiesen werden soll. Es heisset nemlich überhaupt: Wenn man alles thut, wie es die Auflösung erfordert, so geschiehet, was man thun sollte.

§. 25. Zuweilen geschiehet es, daß man um besonderer Ursachen willen einen Satz auf einen besondern Fall appliciret, oder auch aus demselben einen andern Satz herleitet. Dergleichen Arten der Wahrheiten werden **Zusätze** (*Corollaria*) genennet.

§. 26. Endlich in den **Anmerkungen**, die sowohl den Erklärungen, als Grund- und Lehrsätzen, imgleichen den Aufgaben beygefüget werden, pfleget man dasjenige, was noch dunkel seyn möchte, zu erläutern, den Nutzen der vorgetragenen Lehren anzudeuten; die Historie der Erfindung beyzubringen, und was etwa sonst nützliches zu wissen vorfället.

§. 27. Wer die bisher erläuterte Methode oder Lehrart betrachtet, wird ohne Mühe innen werden, daß sie allgemein ist, und in allen Wissenschaften gebraucht werden soll, wenn man anders richtige Erkenntniß der Dinge verlanget. Man nennet es aber die mathematische, zuweilen auch gar die geometrische Methode oder Lehrart, weil bisher fast die Mathematiker allein, sonderlich in der Geometrie, sich derselben bedienet.

§. 28. Und darum, weil in der Mathematik diese Lehrart auf das allergenaueste in Acht genommen wird, rühmet man von ihr, daß sie den Verstand des Men-

schen schärfe, das ist, geschickt mache, in alle Dinge, die er erkennen lernet, tiefer und richtiger einzusehen, als ein anderer, der sich so genau und ordentlich zu denken nicht angewöhnet.

§. 29. Es werden also dieses vortreflichen Nutzens diejenigen nicht theilhaftig, welche blos einige mathematische Aufgaben, und andere im menschlichen Leben zwar nützliche, aber an und vor sich selbst zur Mathematik eigentlich nicht gehörigen Sachen lernen, oder auch von den mathematischen Wahrheiten nur eine gemeine Erkenntniß erlangen.

Ende des Unterrichts von der Lehrart.

Anfangs.

Anfangs-Gründe der Rechenkunst.

Erklärung.

1.

Die Rechenkunst ist eine Wissenschaft zu rechnen, das ist, aus einigen gegebenen Zahlen andere zu finden, von denen eine Eigenschaft in Ansehung der gegebenen Zahlen bekannt gemacht wird. Z. E. man soll eine Zahl finden, die so groß ist, wie 6 und 8 zusammen.

1 a) Von den vielen über die Arithmetik oder Rechenkunst herausgekommenen Schriften nenne ich nur einige der vorzüglichsten. v. Clausbergs demonstrative Rechenkunst 4 Theile. Leipz. 1748. F. Chr. Lor. Karstens Rechenbuch. Bützow. 1786. Karstens Lehrbegriff der gesammt. Math. 1. und 2. Theil. Willichs gründliche Vorstellung der Reesischen allgemeinen Regel, 2 Bände. Göttingen 1759. Michelsens Anleitung zur juristischen, politischen und ökonomischen Rechenkunst. Halle 1782. Reimers Anweisung zur Rechenkunst. Hamburg 1776. Rosenzweigs allgemeine Regel der Rechenkunst oder Kettenpraktik. Augsburg 1780. Kochs vollständiges Rechenbuch, 4 Theile 1784. Bürjas selbst lernende Algebraist, oder deutliche Anweisung zur ganzen Rechenkunst 2 Theile. Berlin 1786. Kästners Fortsetzung der Rechenkunst. Göttingen 1786. Von Florencourts Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst. Altenburg 1781. Hauss Lehrbuch der Arithmetik zum Gebrauche bey eigenem und fremden Unterrichte. Giessen 1793. N. Schmidts Rechenkunst. Leipzig 1774. ist sehr vollständig in Absicht auf die Reesische allgemeine Regel.

Anmerkung.

2. Die Wissenschaft bedeutet eine Fertigkeit, alles dasjenige, was man von einer Sache behauptet, aus unumstößlichen Gründen darzuthun.

Erklärung.

3. **Wenn man viele einzele Dinge von einer Art zusammennimmt, entstehet daraus eine Zahl.** Z. E. wenn man zu einer Kugel noch eine andere leget, so hat man zwey Kugeln. Leget man noch eine darzu, so hat man drey, u. s. w.

Zusatz.

4. Also erfordert jede Zahl eine gewisse Einheit, und lassen sich keine Zahlen mit einander vergleichen, auch nicht zusammensetzen, welche nicht aus einerley Einheiten entstanden. Z. E. wenn ich sage 6; so muß eine jede Einheit, die zu dieser Zahl genommen wird, ein Ding von einer Art, als etwan ein Hund, ein Apfel, ein Haus, ein Thaler, ein Groschen seyn ꝛc.

Zusatz.

5. Eine Zahl wird größer gemacht, oder vermehret, wenn man andere Zahlen von ihrer Art hinzusetzet: hingegen wird sie vermindert, wenn man eine oder mehrere Zahlen von ihrer Art wegnimmt. Und weiter kann man keine Veränderung mit den Zahlen vornehmen. Es sind aber **Zahlen von einerley Art**, die aus einerley Einheiten bestehen (§. 4.).

Zusatz.

6. **Wenn eine Zahl vermehret wird**, sind die Zahlen, so zu derselben gesetzt werden, entweder alle vor sich derselben gleich; als wenn man 6 etlichemal nimmt: oder sie sind größer und kleiner als dieselbe; als wenn man 6, 3, 5, ꝛc. zusammennimmt. Und dannenhero sind zwey verschiedene Arten, eine Zahl zu vermehren.

Zusatz.

7. Eben so ist klar, daß, wenn eine Zahl vermindert wird, man entweder eine oder mehrere kleinere Zahlen nach einander von derselben wegnimmt; oder auch nur eine Zahl so vielmal von ihr wegthut, als man kann. Und demnach sind zwey verschiedene Arten, eine Zahl zu vermindern.

Anmerkung.

8. Hieraus sind die vier Rechnungsarten, nemlich Addiren, Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren entstanden, wie aus folgenden Erklärungen abzunehmen.

Erklärung.

9. Addiren heisset eine Zahl finden, welche verschiedenen Zahlen von einer Art zusammengenommen gleich ist. Die gegebenen Zahlen werden die summirenden; die gefundene aber wird die Summe, oder das Aggregat genennet.

Zusatz.

10. Weil eine jede Zahl aus vielen Einheiten zusammengesetzet ist (§. 3.): so geschiehet das Addiren, wenn man zu der einen gegebenen Zahl die Einheiten der andern nach und nach zählet.

Anmerkung.

11. Die Einheiten der Zahlen stellet man sich anfangs durch die Finger vor, und verrichtet das zum Addiren nöthige Zählen so lange durch die Finger, bis man in dem Gedächtnisse behalten, wie viel eine jede kleine Zahl zu einer anderen Zahl genommen, ausmachet; z. E. daß zwey und drey fünfe, sechs und achte aber vierzehn ist.

Erklärung.

12. Subtrahiren oder abziehen ist so viel als eine Zahl finden, welche mit einer gegebenen Zahl von einer Art zusammengenommen, einer

ner andern gegebenen Zahl gleich ist. Die Zahl, welche durchs Subtrahiren gefunden wird, heisset die Differenz, oder der Unterscheid der gegebenen Zahlen.

Zusatz.

13. Weil eine jede Zahl aus vielen Einheiten bestehet (§. 3.): so geschiehet das Subtrahiren, wenn man von der einen gegebenen Zahl die Einheiten der andern nach und nach wegnimmt.

Anmerkung.

14. Was in der Anmerkung über die vorhergehende Erklärung, von dem Addiren (§. 11.) erinnert worden, findet auch hier bey dem Subtrahiren statt.

Erklärung.

15. Multipliciren ist eine Zahl finden aus zwey gegebenen Zahlen, in welcher die eine gegebene so vielmal enthalten ist, als die andere von den gegebenen Eines in sich begreift. Die Zahl, so gefunden wird, heisset das Produkt, oder FACTVM: die gegebenen Zahlen werden die FACTORES genennet.

Zusatz.

16. Multipliciren ist also nichts anders, als eine Zahl etlichemal zu sich selbst addiren (§. 9.).

Erklärung.

17. Dividiren ist eine Zahl finden aus zwey gegebenen Zahlen, welche andeutet, wie vielmal die eine gegebene Zahl in der andern enthalten ist, und dannenhero Quotus, oder der Quotient, unterweilen auch der Exponent genennet wird.

Zusatz.

Zusatz.

18. Also ist dividiren nichts anders, als eine Zahl von einer andern etlichemal subtrahiren. (§. 12.).

Zusatz.

19. Und wie vielmal die eine gegebene Zahl (welche der Divisor genennet wird) in der anderen (die man den Dividendum nennet) enthalten ist, so vielmal muß Eins in dem Quotienten enthalten seyn.

Grundsatz.

20. Eine jede Zahl und Größe ist ihr selber gleich.

Anmerkung.

21. Dieser Grundsatz hat seinen Nutzen, weil man eine Zahl ansehen kann, wie sie durch verschiedene Zusammensetzungen oder Veränderungen anderer Zahlen herauskommt. Z. E. Sechs entstehet, wenn ich 4 und 2 addire: wenn ich 3 durch 2 multiplicire; wenn ich 2 von 8 subtrahire; wenn ich 12 durch 2 dividire. Also sind vermöge unseres Grundsatzes die Summe von 4 und 2, das Produkt aus 3 und 2, die Differenz zwischen 2 und 8, der Quotient aus 12 und 2 einander gleich.

Grundsatz.

22. Wenn zwey Zahlen oder Größen einer dritten gleich sind, so sind sie einander selber gleich.

Anmerkung.

23. Ich habe z. E. drey Haufen Geld. In dem ersten sind so viel Thaler, als wie in dem andern; in dem dritten gleichfalls so viel als in dem andern. Also muß auch so viel in dem dritten als in dem ersten seyn. Exempel machen die Erklärungen und Grundsätze klar, welches ich einmal für allemal erinnere.

Grundsatz.

24. Wenn man gleiches zu gleichem addiret, so kommen gleiche Summen heraus. Wenn man aber gleiches zu dem größern und

zu dem kleinern addiret: so ist die Summe in dem ersten Falle größer, als in dem andern.

Grundsatz.

25. Wenn man gleiches von gleichem subtrahiret: so bleibet gleiches übrig. Wenn man aber gleiches von dem grösseren und kleineren subtrahiret: so bleibet in dem ersten Falle mehr übrig, als in dem anderen.

Grundsatz.

26. Wenn man gleiches durch gleiches multipliciret: so kommen gleiche Produkte heraus. Wenn man aber das größere und das kleinere durch gleiches multipliciret: so ist das Produkt in dem ersten Falle größer, als in dem anderen.

Grundsatz.

27. Wenn man gleiches durch gleiches dividiret: so sind die Quotienten einander gleich. Wenn man aber das größere und das kleinere durch gleiches dividiret: so ist der Quotient in dem ersten Falle größer, als in dem anderen.

Zusatz.

28. Daher, wenn zwey ein Exempel rechnen, und keiner von beiden fehlet, muß einerley herauskommen: so sie aber verschiedenes herausbringen, muß einer von beiden gefehlet haben.

Grundsatz.

29. Was größer ist als eine von zwey gleichen Größen, das ist auch größer als die andere von denselben.

Grundsatz.

30. Das Ganze ist seinen Theilen zusammengenommen gleich; und also größer als ein jedes von seinen Theilen.

Willkührlicher Satz.

31. Man gehe im Zählen nicht weiter fort, als bis auf zehen. Wenn man bis zehen gezählet, so fange man wieder von neuem an, nur daß man jederzeit dazu setze, wie vielmal man schon zehen gezählet.

Anmerkung.

32. Dieses ist das allgemeine Gesetz, darnach man sich im Zählen richtet; und weil wir desselben von Jugend auf so gewohnt sind, scheinet es eine Nothwendigkeit zu haben. Die Ursache aber, warum man nur bis auf zehen zählet, ist sonder Zweifel daher zu holen, weil die Menschen die Sachen an ihren Fingern zu zählen pflegen, ehe sie im Rechnen geübet §. 11).

32a) Dies ist wenigstens der natürlichste Grund, den auch schon Aristoteles angiebt. Man heist dies Gesetz nach 10 zu zählen, das Decadische, und die Art die Zahlen nach demselben zu schreiben und auszusprechen, das Decadische Zahlensystem. Uebrigens sieht man leicht, daß es sehr viel andere Zahlensysteme geben könnte. Hierher gehört die Leibnitzische Dyadik, nach welchem Systeme nur immer zwey Einheiten einer gewissen Art zusammengezählet, und daraus höhere oder grössere Einheiten zusammengesetzt werden.

Zusatz.

33. Also hat man für jede von den zehen Zahlen einen besondern Namen vonnöthen, und wiederum andere Namen, dadurch die Vielheit der Zehner bemerket wird. Jene sind eines, zwey, drey, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, zehen; diese aber zwanzig, dreyßig, vierzig, funfzig, sechzig, siebenzig, achtzig, neunzig, hundert.

Willkührlicher Satz.

34. Gleichwie man zehenmal zehen hundert nennet; also nennet man ferner zehenmal hundert tausend; tausendmal tausend eine Million, tausendmal tausend Millionen eine Billion;

tau-

tausendmal tausend Billionen eine Trillion; oder dreyfache Million, u. s. w.

34 a) Man heist die aus den einfachen Einheiten zusammengesetzten Zehner, Hunderter, Tausender, ꝛc. Millionen, Billionen, ꝛc. auch Einheiten von höhern Ordnungen, und zwar, wie sie hier genannt sind, Einheiten der ersten, zweyten, dritten, ꝛc. sechsten, zwölften ꝛc. Decimal-Ordnung.

Anmerkung.

35. Diese Benennung geschiehet blos zu dem Ende, damit man sich in großen Zahlen nicht verwirre, sondern von jedem Theile derselben einen deutlichen Begriff formiren könne.

Willkührlicher Satz.

36. Die neun Zahlen bemerke man mit folgenden Zeichen: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. Damit man aber auch die Zehener, Hunderte, Tausende u. s. w. dadurch andeuten könne, so gebe man ihnen ihre Bedeutung von der Stelle, in welcher sie stehen. Nemlich wenn sie entweder allein, oder in der ersten Stelle zur Rechten anzutreffen sind, sollen sie Einer bedeuten, in der anderen Zehener, in der dritten Hunderte, in der vierten Tausende u. s. w. Die leeren Stellen werden mit der Null o vollgefüllet, welche nemlich andeutet, daß darinnen keine Zahl anzutreffen.

Aufgabe.

37. Eine geschriebene Zahl auszusprechen, das ist, einem jeden Zeichen in derselben seinen Werth zuzueignen.

Auflösung.

1. Theilet die gegebene Zahl in Classen, von der Rechten an gegen die Linke zu, vermittelst kleiner Strichlein, und eignet jeder Classe drey Stellen

zu.

zu. Am Ende gegen die Linke mögen drey oder wenigere übrig bleiben.

2. Ueber die Zahl, welche nach dem andern Strichlein kommt, machet einen Punkt, und über die, so nach dem vierten folget, zwey Punkte, u. s. w.

3. Sprechet ein bloßes Strichlein durch **Tausend** aus, einen Punkt durch **Million**, zwey Punkte durch **Billion**, u. s. w. Hingegen die erste Zahl gegen die Linke in einer Classe, durch **Hunderte**; die mittlere durch **Zehener**, und die letzte durch **Einer**. So ist geschehen, was man verlangte. Z. E. Wenn ihr folgende Zahl aussprechen wollet, $2'''$, 125, $473''$, 613, $578'$, 432, 597. so saget: zwey Trillionen, hundert fünf und zwanzig tausend, vierhundert drey und siebenzig Billionen, sechshundert dreyzehen tausend, fünfhundert acht und siebenzig Millionen, vierhundert zwey und dreyßig tausend, fünfhundert sieben und neunzig.

37a) Diese (37) vorgegebene Zahl bestehet also aus Zifern von unterschiedenen Decimalordnungen oder Decimalwerthen, und die äußerste Zifer zur linken Hand nemlich die $2'''$ würde hier seyn von der 18ten Ordnung. Wollte man sie allein schreiben, so müßte man 18 Nullen an sie hängen, statt dessen man sich bequem des sogenannten **Ordnungsexponenten**, bedient, d. i. einer Zahl, welche man gerade über die erwähnte 2 sezt, und dadurch andeutet, daß diese 2 in der 18ten Stelle linker Hand der simplen Einheiten stehe Z. E. 2^{18} und so in andern Fällen.

Beweis.

Es ist alles klar aus den vorhergesetzten willkührlichen Sätzen (31. 34. 36.).

Aufgabe.

38. Verschiedene Zahlen zu addiren.

Auflösung.

1. Schreibet die gegebenen Zahlen dergestalt unter einander, daß die einfache unter den einfachen, die

Zehener unter den Zehenern, die Hunderte unter den Hunderten u. s. w. zu stehen kommen (§. 4.).

2. Ziehet unter die geschriebenen Zahlen einen Strich, um die Verwirrung zu vermeiden: und

3. zählet besonders zusammen die Einer, und schreibet unter sie ihre Summe. Enthält die etliche Zehener in sich, so zählet dieselben zugleich mit den gegebenen Zehenern zusammen, und setzet ihre Summe gleichfalls unter die Reihe der Zehener. Wenn ihr so fortfahret, werdet ihr endlich die verlangte Summe aller Zahlen herausbekommen.

Oder: Streichet in jeder Reihe so vielmal zehen weg, als ihr könnet, und zählet stets so viel Einheiten zu der folgenden, wie vielmahl ihr zehen weggestrichen: was übrig bleibet, setzet unter den Strich an seinen gehörigen Ort, wie vorhin.

Z. E. wenn ihr folgende Zahlen addiren sollet,

3578
524
63

4165

so sprechet: 4 und 3 ist 7, noch 8 darzu ist 15. Setzet 5 unter die Einer: den 1 Zehener aber zählet zu den gegebenen Zehenern, und sprechet ferner, 1 (nemlich Zehener) und 6 sind 7 (Zehener,) noch 2 darzu sind 9, noch 7 dazu sind 16 (Zehener). Setzet die 6 Zehener unter die Zehener der gegebenen Zahlen, und die übrigen 10 Zehener, das ist 1 Hundert, zählet zu den Hunderten der gegebenen Zahlen ꝛc.

Beweis.

Vermöge der geschehenen Rechnung enthält die gefundene Zahl in sich alle Einer, alle Zehener, alle Hunderte, alle Tausende u. s. w. der vorgegebenen Zahlen, das ist, alle ihre Theile. Und also ist sie so

groß,

groß, wie alle gegebene zusammengenommen (§. 3.): folgends sind die gegebenen Zahlen zusammen addiret worden (§. 9.). W. Z. E.

Anmerkung.

39. Wenn ihr alle Theile der gegebenen Zahlen als lauter Einer ansehet, so werdet ihr wahrnehmen, daß ihr in die Summe nur allezeit den Ueberschuß der summirten Zahlen über 9 schreibet. Denn an statt funfzehen schreibet ihr die Zahlen 1 und 5, welche 6 machen, wenn man sie beide für Einer hält, und also der Ueberschuß der Zahl funfzehen über neune sind. Eben so schreibet ihr an statt sechzehen unter die Reihe der Zehener 6, und unter die Hunderte, welche beide Zahlen zusammengenommen 7 ausmachen, wenn man sie für Einer ansiehet, und demnach der Ueberschuß von sechzehen über neune sind u. s. w. Hieraus ist klar, daß man bey Summirung der Zahlen bey jeder Reihe so viel Neunen weglässet, als man Einheiten zu der folgenden Reihe zählet.

Anmerkung.

40. Wollet ihr demnach wissen, ob die gefundene Zahl so groß sey, wie die gegebenen zusammengenommen, so merket 1) die besagten Einheiten auf der Seite, und nach vollbrachter Rechnung zählet sie zusammen, damit ihr sehet, wie vielmal 9 im Summiren weggelassen worden. 2) Werfet über dieses noch aus der Summe so vielmal 9 weg, als ihr könnet, und zählet die im Summiren weggelassenen mit dazu; die Zahl aber, so übrig bleibet, merket sowohl, als die Anzahl der weggeworfenen Neunen. 3) Endlich gebet auch Acht, wie vielmal ihr aus den gegebenen Zahlen 9 wegwerfen könnet, und was zuletzt für eine Zahl übrig bleibet. Denn, so die Anzahl der weggeworfenen Neunen beiderseits gleich ist, auch einerley Zahl beyderseits übrig bleibet, so ist die gefundene Zahl so groß, wie die gegebenen zusammengenommen (§. 25.), und ihr seyd daher gewiß, daß ihr nach der Regel richtig verfahren (§. 38). Als, in dem vorigen Exempel sind währender Rechnung drey Neunen weggelassen worden: und eine lässet sich noch von der gefundenen Summe wegwerfen, worauf 7 übrig bleiben. Wenn man aber aus den gegebenen Zahlen, die über der Linie stehen, gleichfalls 4 mal 9 ausstreichet, bleiben auch 7 übrig. Demnach ist recht addiret worden. Man kann sich auch der Richtigkeit im Rechnen versichern, wenn man ein Exempel auf verschiedene Art rechnet, entweder auf beyde vorgeschriebene Manieren, oder daß man einmal von unten hinauf, das anderemal von oben herunter die Zahlen in einer Reihe

zusammen zählet. Denn einerley Irrthum lässet sich nicht wohl begehen, wenn man auf verschiedene Art rechnet.

40 a) Diese sogenannte Neunerprobe wird allemahl zutreffen, wenn richtig gerechnet worden ist, aber nicht umgekehrt wird das Additionsexempel allemahl richtig seyn, wenn die Neunerprobe zutrift. Man setze z. E. in die Summe 4165 der oben angegebenen Zahlen statt der 1 eine 2, und statt der 4 eine 3, so daß statt der wahren Summe die falsche 3265 gesetzt würde, so wird dennoch die Neunerprobe zutreffen, und man kann also aus ihr nicht allemahl mit Zuverläßigkeit auf die Richtigkeit der Rechnung schließen.

Anmerkung.

41. Die Mathematiker haben ein besonderes Zeichen, dadurch sie die Addition andeuten, nemlich das Zeichen +, welches sie durch mehr aussprechen. Demnach schreiben sie die Summe zweyer Zahlen, als 3 und 7, also; 3 + 7.

Anmerkung.

42. In benannten Zahlen streichet man so viele aus, als zusammen ein Ganzes von der größeren Art ausmachen, und setzet dafür eines zu der folgenden Reihe. Z. E. von den Pfennigen streichet man so viel mal 12 aus, als man kann, und setzet dafür jedesmal 1 zu den Groschen, weil 12 Pfennige einen Groschen machen. Von den Groschen wirfet man auf einmal 24 weg, und schreibet dafür 1 zu den Thalern, weil 24 Groschen einen Thaler machen. Und auf eine gleiche Art verfähret man in andern Fällen. Als:

15	Thlr.	20	gr.	10	pf.
25	—	14	—	2	—
30	—	16	—	6	—
72	Thlr.	3	gr.	6	pf.

Aufgabe.

43. **Eine kleinere Zahl von einer größern zu subtrahiren.**

Auflösung.

1. Schreibet die kleinere Zahl unter die größere, auf die Art, wie im Addiren geschehen (§. 38.).
2. Ziehet unter die geschriebenen Zahlen eine Linie.

3. Sub-

3. Subtrahiret besonders die **Einer** von den **Einern**, die **Zehener** von den **Zehenern**, die **Hunderte** von den **Hunderten** u. s. w. und setzet allezeit die Zahl, so übrig bleibet, an ihren gehörigen Ort unter die Linie: nemlich was bey den **Einern** übrig bleibet, unter die **Einer**, was bey den **Zehenern** übrig bleibet, unter die **Zehener** u. s. w.

4. Geschiehet es aber, daß eine grössere Zahl von der kleinern weggenommen werden soll; so nehmet aus der folgenden Reihe eines weg, und setzet es in die vorhergehende, wo es zehen gilt (§. 36.) Also kann von der um **zehen** vermehrten Zahl die **Subtraction** geschehen; die Zahl aber in der folgenden Stelle, *ist um* **eines** kleiner worden, welches durch einen Punkt bemerket wird.

5. Endlich, wenn in der folgenden Stelle zur Linken o stehet, gehet so weit fort gegen die Linke, bis ihr eine Zahl antreffet, und nehmet von derselben 1 weg, so ist es eben so viel, als wenn ihr in alle leere Stellen 9, und in die, wo man nicht subtrahiren konnte, 10 setzet (§. 36.).

Nach diesen Regeln kann man eine jede gegebene Zahl subtrahiren.

Z. E. wenn ihr folgende Zahlen von einander subtrahiren sollet,

```
  9 8· 0· 0· 4· 0· 3 4· 5 9
    4 7 4 3 8 6 5 2 6 3
  ---------------------------
    5 0 5 6 5 3 8 1 9 6
```

so sprechet: 3 von 9 lässet 6, und schreibet 6 unter die Linie in die Stelle der **Einer**. Sprechet ferner: 6 (nemlich **Zehener**) von 5 kann ich nicht (wegnehmen). Borget demnach 1 von 4 in der folgenden Stelle; so bleibet in derselben 3, und ihr habet 15 an statt der 5.

Nun nehmet 6 von 15, so bleiben 9 übrig, welche ihr wiederum unter die Linie in die Stelle der Zehener schreibet. Hierauf fahret fort, und sprechet: 2 von 3 lässet 1; 5 von 3 kann ich nicht (subtrahiren), derowegen borge ich 1 von 4, und setze es in die leere Stelle, so habe ich in derselben 10; davon nehme ich 1 weg, so bleiben in derselben 9, und anstatt 3 bekomme ich 13. Nun nehmet 5 von 13, so bleiben 8 übrig, und 6 von 9 lässet 3. Weil 8 von 3 wieder nicht angehet, so nehmet 1 von 8, und setzet es in die erste leere Stelle, so habet ihr daselbst 10 und dorten noch 7. Von den 10 nehmet 1 weg, und setzet es in die andere leere Stelle gegen die Rechte, so bleiben an statt 10 noch 9, und in dieser habt ihr 10. Davon nehmet wieder 1 weg, so bleiben in derselben noch 9, und anstatt 3 bekommt ihr 13. Sprechet nun: 8 von 13 lässet 5; 3 von 9 lässet 6; 4 von 9 lässet 5; 7 von 7 lässet 0; 4 von 9 lässet 5. Wenn ihr nun das übrige allezeit unter die Linie an seinen gehörigen Ort schreibet, so habt ihr die verlangte Zahl gefunden.

Beweis.

Vermöge der geschehenen Rechnung, hält die gefundene Zahl in sich den Rest aller **Einer**, aller **Zehener**, aller **Hunderte**, aller **Tausende** u. s. w. das ist, den Rest aller Theile. Da nun der Rest aller Theile zusammen dem ganzen Reste gleich ist (§. 30.); so ist die gefundene Zahl der Rest, welcher übrig bleibet, wenn man eine Zahl von der andern wegnimmt, und folgends mit der weggenommenen Zahl zusammen der andern gegebenen Zahl gleich. Derowegen geschiehet durch die gegebenen Regeln die **Subtraction** (§. 12.); W. Z. E.

Anmerkung.

44. Wollet ihr wissen, ob ihr recht gerechnet, so addiret, nach der Aufgabe (§. 38), die gefundene Zahl zu der kleineren von den gegebenen: die Summe ist die größere (§. 12.).

9 8 0 0 4 0 3 4 5 9
4 7 4 3 8 6 5 2 6 3
5 0 5 6 5 3 8 1 9 6
9 8 0 0 4 0 3 4 5 9

Anmerkung.

45. Das Zeichen der Subtraction ist —, welches man durch weniger ausspricht: daher schreibt man den Unterscheid zweyer Zahlen, als 8 und 5, also: 8 — 5, und spricht ihn aus: 8 weniger 5.

Anmerkung.

46. In benannten Zahlen ist die Subtraction von der vorigen nur darinnen unterschieden, daß die von einer größeren Art geborgte Zahl nicht 10, sondern so viel gilt, als die größere die kleinere in sich begreifet. Z. E. 1 von denen Groschen geborget, gilt in der Stelle der Pfennige 12; hingegen 1 von den Thalern geborget, in der Stelle der Groschen 24: 1 von den Pfunden geborget, in der Stelle der Lothe 32, als:

von	12 Thlr.	18 gr.	4 pf.	von	32 Pf.	17 L.
abgezogen	8 —	20 —	6 —	—	12 —	24 —
bleiben	3 Thlr.	21 gr.	10 pf.		19 Pf.	25 L.

Aufgabe.

47. Das Einmal Eins aufsetzen, das ist, ein Täflein verfertigen, in welchem alle Produkte zu finden, die herauskommen, wenn man die Einer durch einander multipliciret.

Auflösung.

1. Theilet jede Seite eines Quadrats in 9 gleiche Theile, und zerschneidet es durch Querstriche in lauter kleine Fächer.
2. Oben in der ersten Reihe derselben und zur Linken schreibet die Zahlen von 1 bis 9 in ihrer natürlichen Ordnung.
3. Addiret 2 zu sich selbst, und setzet das Produkt 4 unter die 2: dazu addiret noch 2, so ist 6 das Pro-

bukt aus 3 in 2: zu 6 addiret noch einmal 2, so habt ihr 8, das Produkt aus 2 in 4.

4. Wenn ihr nun auf gleiche Weise die übrigen Zahlen findet, und in ihre gehörige Fächer eintraget; so ist das **Einmal Eins** fertig, welches man machen sollte.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Anmerkung.

48. Das Einmal Eins muß man auswendig lernen, wenn man im Multipliciren und Dividiren hurtig fortkommen will. So lange man es aber noch nicht inne hat, muß es jederzeit, wenn man multipliciret oder dividiret, bey der Hand seyn.

Aufgabe.

49. Eine gegebene Zahl durch eine andere gegebene Zahl zu multipliciren.

Auflösung.

1. Schreibet die eine Zahl dergestalt unter die andere, wie in der **Addition** geschehen (§. 38).
2. Unter die geschriebenen Zahlen ziehet eine Linie.
3. Schreibet aus dem **Einmal Eins** darunter, alle Produkte aus jedem Theile der unteren Zahl in je-

den

den von der oberen, und zwar dergestalt, daß ihr allezeit die Zehener von einem Produkte zum folgenden Produkte zählet, und jede Reihe der Produkte um eine Stelle weiter hineinrücket.

4. Endlich addiret (§. 38.) die Produkte zusammen: so ist die Summe derselben das Produkt, welches man finden sollte.

Z. E. wenn ihr 38476 durch 35 multipliciret, so schreibet die Zahlen folgender Gestalt unter einander:

38476
35

192380
115428

1346660

und sprechet: 5 mal 6 ist 30. Schreibet die 0 unter die 5 und sprechet weiter: 5 mal 7 ist 35, 3 dazu (so euch zuvor überblieb) ist 38. Schreibet 8 neben 0 gegen die Linke, und sprechet ferner: 4 mal 5 ist 20, 3 dazu ist 23. Schreibet 3 neben 8, und saget: 5 mal 8 ist 40, 2 dazu ist 42. Schreibet 2 neben 3, und saget abermal; 3 mal 5 ist 15, 4 dazu ist 19. Schreibet 19 neben 2, so habet ihr die obere Zahl 5 mal genommen. Verfahret nun auf gleiche Weise mit 3, und saget 3 mal 6 ist 18. Schreibet 8 um eine Stelle weiter hinein gegen die Linke, und sprechet ferner 3 mal 7 ist 21, 1 dazu ist 22. Schreibet 2 neben die 8 gegen die Linke u. s. w. Endlich addiret die beyden gefundenen Zahlen, so ist die Summe 1346660 das gesuchte Produkt.

Beweis.

Vermöge der geschehenen Rechnung und des Einmal Eins, (§. 47.) begreifet die erste Reihe der Zahlen, die addiret werden, die obere Zahl so vielmal in sich, als die erstere von der unteren gegen die Rechte Eines

in sich enthält. Und weil die folgenden Reihen immer um eine Stelle weiter hinein gerücket werden, so begreifet jede von denselben die obere Zahl so vielmal in sich, als jede von den folgenden der unteren Eines in sich enthält (§. 36.). Derowegen, wenn man alle Reihen zusammen addiret, so muß die Summe die obere Zahl so vielmal in sich enthalten, als die untere Eines in sich begreifet (§. 9.). Folglich hat man die obere Zahl durch die untere multipliciret (§. 15.). W. Z. E.

Anmerkung.

50. Wenn an einer Zahl Nullen hangen, so darf man dieselben nur hinten an das Produkt der übrigen Zahlen an einander anhängen, wie aus beygesetzten Exempeln zu ersehen.

381		4750	
200		300	
76200		1425000	

Sonst ist noch zu merken, daß das Zeichen der Multiplication ein bloßer (.) oder (×) ist. Z. E. wenn ich blos andeuten will, daß 3 durch 4 multipliciret werden soll: so schreibe ich 3. 4, welches so viel heisset: als 3 durch 4 multipliciret. Dividiret man (§. 51.) das Product durch eine von den gegebenen Zahlen, z. E. 1346660 durch 35, so kommt die andere Zahl 38476 heraus. Und dieses ist die Probe, ob man recht gerechnet oder nicht (§. 15. 17.).

Aufgabe.

51. Eine gegebene Zahl durch eine andere kleinere Zahl zu dividiren.

Auflösung.

Der erste Fall. Wenn der Divisor oder Theiler nur ein Einer ist, so

1. Setzet ihn unter die erste Zahl zur Linken, und fraget, wie vielmal er in derselben enthalten sey; welches ihr aus dem Einmal Eins erfahret. Die Zahl, so solches andeutet, setzet an statt des Quotienten hinter den zur Rechten gemachten Strich

2. Mul-

2. Mit diesem Quotienten **multipliciret** den Divisor, und ziehet das Produkt von der Zahl ab, die ihr **dividiret**, streichet dieselbe aus, und setzet, was überbleibet, darüber.

3. Rücket den Divisorem um eine Stelle fort, und fraget abermals, wie vielmal derselbe in der zur linken übergebliebenen und zur Rechten über ihm stehenden Zahl zusammen enthalten sey, und verfahret im übrigen wie vorhin.

Wenn ihr dieses durch alle Zahlen fortführet, so werdet ihr den verlangten Quotienten finden.

Z. E. Man soll 7856 durch 3 dividiren. Setzet 3 unter 7, und sprechet: 3 in 7 habe ich 2 mal. Schreibet 2 hinter den zur Rechten gemachten Strich, und sprechet ferner: 2 mal 3 ist 6: 6 von 7 lässet 1. Rücket 3 unter 8, und saget: 3 in 18 habe 6 mal. Setzet 6 zu dem ersten Theile des Quotienten, und sprechet: 3 mal 6 ist 18; 18 von 18 hebet sich auf. Wenn ihr nun auf gleiche Weise fortfahret, so findet ihr den ganzen Quotienten 2618, und bleiben 2 übrig. Daraus zu ersehen, das die vorgegebene Zahl sich nicht völlig in 3 Theile theilen lässet.

x x2	
7856	2618
3333	

Beweis.

Weil man aus dem Einmal Eins wissen kann, wie vielmal eine Zahl aus der Classe der **Einer** in einer andern Zahl enthalten ist, welche aus der **Multiplication** der **Einer** durch einander entstanden (§. 47.); so ist klar, daß die gefundene Zahl andeutet, wie vielmal der Divisor in den **Tausenden, Hunderten, Zehenern und Einern**, das ist, in der vorgegebenen Zahl (§. 30.) enthalten sey. Derowegen ist sie der gesuchte Quotient, und man hat die vorgegebene Zahl durch die andere dividiret (§. 17.). W. Z. E.

Der

Der andre Fall. Wenn der Divisor aus mehr als einem Theile bestehet, so fanget

1. an, denselben unter der ersten Zahl zur Linken und so fort gegen die Rechte zu schreiben, und machet wie vorhin hinter die Zahl einen Strich; damit der Quotient nicht mit der Zahl, die man dividiren soll, vermenget werde.

2. Untersuchet durch Hülfe des **Einmal Eins**, wie vielmal die erste Zahl des Divisors in der ersten Zahl der andern, die man dividiren soll, enthalten sey (§. 47.).

3. Multipliciret durch diesen Quotienten den ganzen Divisor, und gebet Acht, ob sich das Produkt von den Zahlen, die über ihm stehen, abziehen lässet.

4. Wenn es angehet, so schreibet die vorhin gefundene Zahl in der Stelle des Quotienten hinter den Strich, und ziehet das Produkt würklich ab. Die Zahlen, von welchen ihr abziehet, streichet aus, und was übrig bleibet, setzet darüber. Gehet es aber nicht an, so nehmet zum Quotienten eines oder auch mehrere weniger, bis ihr das Produkt abziehen könnet.

5. Rücket euren Divisor um eine Stelle fort gegen die Rechte, und verfahret wie vorhin, bis endlich der Divisor nicht weiter fortgerücket werden kann: so ist geschehen, was man verlangete.

6. Wollet ihr wissen, ob ihr recht gerechnet: so multipliciret den Quotienten durch den Divisor, und addiret dazu, was überblieben ist; so kommet die Zahl heraus, die zu dividiren aufgegeben ward.

Z. E. Man soll 7856 durch 32 dividiren. Setzet 32 unter 78 und sprechet: 3 in 7 habe ich 2 mal. Multipliciret 2 mit 32, so kommet heraus 64. Weil nun dieses Produkt sich von 78 abziehen lässet, so schreibet 2 anstatt des Quotienten, und was nach geschehener **Subtraction** übrig bleibet, 14, schreibet über 78. Rücket euren Divisor um eine Stelle fort, und sprechet 3 in 14 habe ich 4 mal. Multipliciret 4 mit 32, so kommet heraus 128. Weil nun dieses Produkt sich von 145 abziehen lässet; so schreibet 4 in die Stelle des Quotienten, und was nach geschehener **Subtraction** übrig bleibet, 17, schreibet über die ausgestrichenen Zahlen darüber. Rücket euren Divisor abermal um eine Stelle fort, und sprechet: 3 in 17 habe ich 5 mal. Multipliciret 32 mit 5. Weil das Produkt 160 sich von 176 abziehen lässet; so schreibet 5 zu den Quotienten, und was nach geschehener **Subtraction** übrig bleibet, 16, schreibet über die ausgestrichenen Zahlen darüber. Die gefundene Zahl 245 ist der verlangte Quotient.

245

Probe:

32

490

735

7840

16

7856

Beweis.

Der Beweis ist fast eben wie in dem ersten Falle. Nur ist zu merken, daß, weil man vermöge des Einmal Eins nicht wissen kann, wie vielmal der ganze Divisor in den darüber geschriebenen Zahlen enthalten ist, man setze, er stecke so vielmal darinnen, als die erste

ste Zahl des Divisors zur Linken in der über ihr geschriebenen Zahl. Denn ob dieses gleich nicht jederzeit eintrift; so kann es einen doch nicht in Irrthum verleiten, weil die Probe gleich angestellet wird, wenn man den Divisor durch den angenommenen Quotienten multipliciret, und ihn also vermittelst derselben so lange um eines vermindert, bis man den rechten Quotienten erhält. Die angegebene Probe ist aus den Erklärungen der Multiplication (§. 15.) und Division (§. 18.) klar.

Anmerkung.

51 a) Wolf trägt hier das so genannte Ueber sich dividiren vor, d. h. er setzt die Reste, welche sich nach Abziehung der einzeln Produkte aus dem Divisor in jeden gefundenen Theil des Quotienten ergeben, über den Dividendus, welches in der Ausübung etwas unbequem ist, zumahl da auch die einzeln Produkte nicht ordentlich hingeschrieben werden, und also Rechnungsfehler schwer zu entdecken sind. Sicherer ist das unter sich dividiren, wobey die jedesmahligen Produkte ordentlich untergeschrieben und abgezogen werden, wie beystehende Ausführung des obigen Beyspiels ausweiset. Den Divisor setzt man zur linken Seite des Dividendus, und den Quotienten zur rechten.

Divis.	Dividendus	Quotient
32	7856	245
	m 64 : :	
	145 :	
	n 128 :	
	176	
	p 160	
	16	

Hier bezeichnen m, n, p, die einzeln Produkte aus dem Divisor 32, in die der Ordnung nach auf einander folgenden Theile 2; 4; 5; des Quotienten 245, wobey denn zu überlegen ist, daß die Decimalwerthe dieser Produkte sich allemahl aus den Decimalwerthen jener Quotiententheile, und diese aus denjenigen Theilen des Dividendus sich ergeben, mit denen man jedesmahl den Divisor verglichen hat. So bedeutet z. E. das Produkt

dukt m nicht 64 simple Einheiten, sondern 64 Hunderter, weil die 2 im Quotienten, durch deren Multiplication mit dem Divisor 32 jenes Produkt m entstanden ist, nicht 2 simple Einheiten, sondern 2 Hunderter, bedeutet, und diese 2 Hunderter im Quotienten entstanden sind, indem man eigentlich frug, wie oft stekt die 32 oder der Divisor in den 78 Hunderten des Dividendus, oder wie viele Hundertmahle stekt er darinne. Man hat aber während der Arbeit selbst an die verschiedenen Decimalwerthe der Theile des Quotienten nicht zu denken, nur muß man die einzeln Produkte wie m, n, p, allemahl gehörig unter diejenigen Zahlen, wie 78; 145; 176; mit denen man jedesmahl den Divisor verglichen hat, untersetzen — der nach Abziehung eines jeden Produkts übrig gebliebene Rest darf nie größer als der Divisor seyn, sonst hat man den gefundenen Theil des Quotienten zu klein genommen. Die weitere Ausführung, mit Erwägung derjenigen Fälle, wo dieser oder jener Theil in Quotienten o wird, ist dem mündlichen Unterrichte vorbehalten.

Anmerkung.

51 b) Das Zeichen der Division ist ein Colon, welches man zwischen den Dividendus und Divisor setzt. Letzterer kömmt allemahl rechter Hand des Zeichens zu stehen. Z. E. 7856 : 32 bedeutet 7856 dividirt mit 32.

Ausserdem hat man auch noch in der Mathematik das Zeichen der Gleichheit $=$. Z. E. um anzudeuten, daß 3 und 7 zusammen 10 geben, schreibt man $3 + 7 = 10$. Das Zeichen wodurch angezeigt wird, daß ein Ding größer oder kleiner sey, als ein anderes, ist $>$. Z. E. $8 > 3$ bedeutet, daß 8 größer sey als 3. Die kleinere Größe wird allemahl gegen die Spitze dieses Zeichens gesetzt, daher man auch schreiben kann $3 < 8$, welches anzeigt, daß 3 kleiner als 8 sey.

Um die Verbindung mehrerer arithmetischen Arbeiten anzudeuten, bedient man sich der Parentheseu, in welche man jede besondere Arbeit einschließt. Z. E. $(8 + 3) . 2$ zeigt an, man soll 8 und 3 zusammen addiren, und die ganze Summe mit 2 multipliciren. So wird man leicht die Bedeutung folgender Ausdrücke verstehen

$$(8 + 3) . (2 + 5) = 11 . 7 = 77$$

$$((8 + 3) . (2 + 5) - 15) : 2 = (77 - 15) : 2 = 62 : 2 = 31$$

und so in andern Fällen.

Erklä-

Erklärung.

52. **Wenn man zwey Zahlen** (4 **und** 12) **dergestalt mit einander vergleichet, daß man auf ihren Unterschied** (8) **siehet, der durch die Subtraction gefunden wird, nennet man ihre Relation, die sie gegen einander haben, eine** arithmetische Verhältniß: **siehet man aber auf den Quotienten** (3), **der durch die Division gefunden wird,** eine geometrische Verhältniß. **Der Quotient, welcher andeutet, wie vielmal die kleinere Zahl in der grösseren enthalten ist,** heisset der Name der Verhältniß (NOMEN sive EXPONENS RATIONIS.)

52 a) Der Exponent der arithmetischen Verhältniß ist der Unterschied zwischen den beyden Gliedern der Verhältniß.

Erklärung.

53. **Wenn in zweyen oder mehrerern arithmetischen Verhältnissen** (3. 5. **und** 6. 8.) **der Unterschied der Glieder; in geometrischen** (3. 12 **und** 5. 20.) **der Name der Verhältniß einerley ist, so nennet man sie** ähnlich, **und ihre Aehnlichkeit eine** Proportion. **Die ähnlichen Verhältnisse werden auch gleiche Verhältnisse genennet.**

Anmerkung.

54. Die Zahlen, so eine arithmetische Proportion mit einander machen, schreibet man also: 3. 5 ∴ 6. 8. oder besser nach meiner Art: 3 — 5 = 6 — 8; die in einer geometrischen neben einander stehen, dergestalt 3. 12. :: 5. 20. oder besser mit dem Herrn von Leibnitz, 3 : 12 = 5 : 20. In beyden spricht man: Wie sich verhält die erste Zahl zu der andern, so die dritte zu der vierten. Diese Redensart hat in dem ersten Falle den Verstand, um wie viel die erste Zahl größer oder kleiner ist, als die andere, um eben so viel ist die dritte Zahl größer oder kleiner, als die vierte. Hingegen in dem andern Falle muß man sie dergestalt erklären: wie vielmal die erste Zahl die andere in sich enthält, oder in derselben

ent-

enthalten ist, eben so vielmal enthält die dritte Zahl die vierte in sich, oder ist in derselben enthalten.

Erklärung.

55. Zuweilen vertritt das andere Glied zugleich die Stelle des dritten, und dann nennet man es PROPORTIONEM CONTINVAM. Ist nun dieselbe arithmetisch, so schreibet man sie also: .·.3.6.9. oder auch 3 — 6 = 6 — 9; ist sie geometrisch, folgendermaßen ∴ 3. 6. 12. oder auch 3 : 6 = 6 : 12.

Erklärung.

56. Eine Progression wird genennet eine Reihe Zahlen, die in einer arithmetischen oder auch geometrischen Verhältniß fortgehen; als im ersten Falle 3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27: im andern 3. 6. 12. 24. 48. 96. Und zwar nennet man die erste eine arithmetische: die andere aber eine geometrische Progression.

Grundsatz.

57. Wenn zwey Verhältnisse einer dritten gleich sind, so sind sie einander selber gleich. Z. E. 1 : 4 = 3 : 12 und 1 : 4 = 5 : 20. Derowegen ist 3 : 12 = 5 : 20.

Lehrsatz.

58. Wenn man zwey Zahlen (5 und 6) durch eine Zahl (4) multipliciret; so verhalten sich die Produkte (12 und 24), wie die multiplicirten Zahlen (3 und 6).

Beweis.

Denn wenn ich eine Zahl (4) durch zwey andere (3 und 6) multiplicire, so ist dieselbe in dem andern Produkte so viel mahl mehr enthalten, als in dem ersten, als die erste Zahl (3) in der anderen (6) enthalten

ist (§. 15). Also, weil in unserem Exempel 6 zweymal so groß ist als 3; so nehme ich auch 4 zweymal so viel, wenn ich durch 6 multiplicire, als wenn ich durch 3 multiplicire; maassen das dreyfache zweymal genommen das sechsfache ausmachet. Nehmlich im ersten Falle nehme ich 4 dreymal; im anderen Falle zweymal dreymal. Derowegen ist klar, daß das erste Produkt (12) in dem andern (24) so vielmal enthalten ist, als die erste multiplicirte Zahl (3) in der andern (6); als in dem ganzen Exempel zweymal. W. Z. E.

Zusatz.

59. Wenn man zwey Zahlen durch eine dritte dividiret, so müssen die Quotienten sich verhalten, wie die dividirten Zahlen: denn man kann sie ansehen, als wären sie durch Multiplication der Quotienten mit dem Divisor entstanden (§. 15. 17.)

Erklärung.

60. **Wenn man ein Ganzes in gleiche Theile genau eintheilet, und nimmet einen oder etliche Theile derselben, so nennet man es einen Bruch.**

Willkührlicher Satz.

61. **Man schreibet ihn aber mit zwey Zahlen, so unter einander gesetzet und durch einen Strich von einander unterschieden werden, von denen die untere andeutet, in wie viel gleiche Theile das Ganze eingetheilet worden, die obere aber, wie viel solcher Theile mir zugehören. Jene wird der Nenner, diese der Zähler genennet.** Z. E. der Thaler soll in drey gleiche Theile getheilet werden, und ich soll zwey derselben bekommen, so schreibe ich den Bruch also: $\frac{2}{3}$.

Zusatz.

Zusatz.

62. Daher urtheilet man die Größe des Bruches aus der Verhältniß des Zählers zu dem Nenner. Denn stecket jener in diesem vielmal, so ist der Bruch klein, als $\frac{3}{37}$; stecket er wenigmal darinnen, so ist er groß, als $\frac{2}{3}$. Hingegen wenn die Zähler in ihren Nennern gleichvielmal enthalten sind, so sind die Brüche einander gleich, als $\frac{3}{6}$; $\frac{4}{8}$; $\frac{5}{10}$; $\frac{25}{50}$. Und daher ist er mehr als ein Ganzes, wenn der Zähler größer als der Nenner, als $\frac{25}{24}$. Denn $\frac{24}{24}$ ist ein Ganzes, und also habe ich $\frac{1}{24}$ über ein Ganzes.

62 a) Solche Brüche, deren Zähler größer ist, als der Nenner, heissen auch uneigentliche oder Bastardbrüche. Sie enthalten die Einheit ein oder etlichemahl, und oft noch ein Stück darüber. Man findet die Menge ganzer Einheiten, die ein vorgegebener uneigentlicher Bruch enthält, durch die Division des Zählers mit dem Nenner. Der übrig bleibende Rest zeigt die noch darüber enthaltene Anzahl von solchen Theilen, als der Nenner des Bruchs angiebt. Z. E.

$$\frac{35}{8} = \frac{8}{8} + \frac{8}{8} + \frac{8}{8} + \frac{8}{8} + \frac{3}{8} = 4 + \frac{3}{8},$$

welches man schlechtweg auch so schreibt

$$\frac{35}{8} = 4\,\frac{3}{8},$$

wo 35 dividirt mit 8 den Quotienten 4 giebt und 3 zum Reste läßt.

62 b) Will man umgekehrt $4\frac{3}{8}$ durch einen uneigentlichen Bruch ausdrücken, so multiplicirt man 4 mit 8, addiret 3 dazu und setzt den Nenner 8 darunter. $\frac{35}{8}$.

62 c) Wenn man frägt, wie oft stekt eine größere Zahl in einer kleinern Z. E. 2 in 1, so kann dies wohl nicht durch eine ganze Zahl beantwortet werden, weil eine größere Zahl nicht ganz in einer kleinern enthalten seyn kann. Aber ein Stück der größern wird die kleinere ausmachen. So verstattet es schon der Sprachgebrauch, zu sagen, zwey stekt in Eins ein Halbmahl, oder $1 : 2 = \frac{1}{2}$. Eben so stekt 3 in 1 ein Drittelmahl, und folglich in 2 Zweydrittelmahl, d. h. $1 : 3 = \frac{1}{3}$; $2 : 3 = \frac{2}{3}$.

So ist denn überhaupt jeder Bruch als ein Quotient zu betrachten, der Zähler des Bruchs als Dividendus, und der Nen-

ner als Divisor. Daher der Ausdruck 15 : 8 auch so geschrieben werden kann $\frac{15}{8}$ und umgekehrt 8 : 15 $= \frac{8}{15}$.

62 d) Hieraus folgt nun auch, daß, wenn bey der Division einer Zahl mit einer andern zuletzt ein Rest bleibt (wie in dem Beyspiele (§. 51) 7856 : 32 den Rest 16 ließ) man an den Quotienten 245 so weit man ihn in ganzen Einheiten gefunden hat, allemal noch einen Bruch hängen müsse, dessen Zähler dieser Rest 16, der Nenner aber der Divisor 32 ist, wenn man anders den vollständigen Quotienten verlangt, d. h. wie oft der Divisor ganz in dem Dividendus, und was für ein Stück des Divisors noch in dem vom Dividendus übrig gebliebenen Reste stecke. Also wäre für 7856 : 32 der **vollständige Quotient**

$$= \frac{7856}{32} = 245\frac{16}{32} = 245\frac{1}{2}$$

d. h. 32 steckt in 7856; 245 und $\frac{1}{2}$ mahl. Nemlich man muß 32; 245 mahl und noch die Hälfte von 32 also 16 nehmen um den Dividendus 7856 zu erhalten.

62 e) Wenn man bloß den Zähler eines Bruchs mit einer ganzen Zahl multipliciret, und den Nenner ungeändert läßt, so wird der Bruch so viel mal größer, als es jene ganze Zahl anzeigt. Multipliciret man aber bloß den Nenner, und läßt den Zähler ungeändert, so wird der Bruch so viel mal kleiner. Z. E. $\frac{4}{3}$ ist offenbar 4 mahl so viel als $\frac{1}{3}$ oder $\frac{4}{3} = 4 . \frac{1}{3}$. Multipliciret man aber den Nenner des Bruchs $\frac{1}{3}$ mit 4 so ist $\frac{1}{12}$ viermahl kleiner, als $\frac{1}{3}$, weil das Ganze in 4 mahl mehr Theile getheilt ist.

Umgekehrt: dividirt man den Zähler eines Bruchs mit einer ganzen Zahl, und läßt den Nenner ungeändert, so wird der Bruch so viel mahl kleiner; dividiret man aber die Nenner und läßt den Zähler ungeändert, so wird der Bruch so viel mahl größer, als jene ganze Zahl anzeigt.

Zusatz.

63. Wenn man demnach den **Nenner** und **Zähler** eines Bruchs z. E. $\frac{4}{6}$ zugleich durch **einerley** ganze **Zahl** (2) **multipliciret** oder **dividiret**, so sind die **Brüche** ($\frac{8}{12}$ und $\frac{2}{3}$) welche man erhält, dem gegebenen ($\frac{4}{6}$) gleich (§. 58. 59.) oder **der Werth eines Bruchs bleibt ungeändert, wenn man dessen Zähler und Nen-**

Nenner gemeinschaftlich mit einerley multipliciret oder dividiret.

Aufgabe.

64. Einen Bruch aufheben, das ist, anstatt eines gegebenen Bruches $(\frac{20}{48})$ einen andern zu finden, der mit kleineren Zahlen geschrieben wird, aber dem gegebenen, dem Werthe nach, gleich ist.

Auflösung.

Dividiret den Nenner (48) und den Zähler (20) des gegebenen Bruches $(\frac{20}{48})$ durch einerley Zahl (4), so formiren (§. 63) die herauskommenden Zahlen (12 und 5) den neuen Bruch $(\frac{5}{12})$.

64 a) Bey dieser Aufgabe sind diejenigen Tafeln, worinn man die Divisores einer vorgegebenen Zahl sogleich vorfindet, sehr nützlich. Eine solche Divisoren- oder Factorentafel findet sich unter andern in Georg Vega's logarithmischen, trigonometrischen und andern zum Gebrauche der Mathematik eingerichteten Tafeln und Formeln. Wien 1783. IIte Tafel.

Wenn Zähler und Nenner eines Bruchs keine gemeinschaftlichen Divisores haben, so kann man den Bruch nicht aufheben.

Aufgabe.

65. Verschiedene Brüche unter einerley Benennung zu bringen, d. i. statt einiger Brüche, die verschiedene Nenner haben, andere zu finden, die einerley Nenner haben, und den gegebenen gleich sind.

Auflösung.

1. Wenn zwey Brüche gegeben sind, so multipliciret jedes einzeln Bruchs Zähler und Nenner, allemahl durch den Nenner des andern.

2. Sind aber **mehrere** gegeben, so wird der Zähler und Nenner eines jeden Bruchs durch das Produkt aus den Nennern aller übrigen multipliciret, so sind die neuen Brüche den vorgegebenen gleich. (§. 63.)

Exempel.

5) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{4}{5} = \frac{10}{15}$; $\frac{12}{15}$

24) $\frac{2}{3}$; 12) $\frac{1}{6}$; 18) $\frac{3}{4} = \frac{48}{72}$; $\frac{12}{72}$; $\frac{54}{72}$.

Aufgabe.

66. Brüche zu addiren.

Auflösung und Beweis.

Weil die Nenner die Namen sind (§. 61.), so dürfet ihr nur die Zähler **addiren**. Da man aber nur Zahlen von Einer Art zusammensetzen kann (§. 4), so müsset ihr erst die Brüche unter Eine Benennung bringen (§. 65.), wenn sie verschiedene Nenner haben.

Exempel.

$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{22}{15} = 1\frac{7}{15}$ (§. 62).

$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{3}{4} = \frac{48}{72} + \frac{12}{72} + \frac{54}{72} = 1\frac{14}{72} = 1\frac{42}{72} = 1\frac{7}{12}$ (§. 62. 64.).

Aufgabe.

67. Einen Bruch von dem andern zu subtrahiren.

Auflösung.

1. Bringet die Brüche unter Eine Benennung (§. 65.), wenn sie verschiedene Nenner haben.

2. **Subtrahiret** den Zähler des einen von dem Zähler des andern, und lasset den Nenner unverändert.

Zum Exempel:

$\frac{2}{3} - \frac{3}{7} = \frac{14}{21} - \frac{9}{21} = \frac{5}{21}$.

Beweis.

Beweis.

Der Beweis ist wie in der vorhergehenden Aufgabe.

Aufgabe.

68. **Einen Bruch durch einen Bruch zu multipliciren.**

Auflösung.

Multipliciret Nenner mit Nenner, und Zähler mit Zähler, so ist geschehen, was man verlangte.

Zum Exempel:

$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; und $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{35}$.

Beweis.

Wenn man einen Bruch durch einen andern multipliciren soll, so verlangt man ein solches Stück des erstern, als der andere anzeigt (§. 15. 60.) Z. E. $\frac{4}{5}$ durch $\frac{3}{7}$ multipliciren, ist eben so viel, als $\frac{4}{5}$ in 7 Theile eintheilen, und 3 dieser Theile nehmen, man soll **Dreysiebentheile** des Bruchs $\frac{4}{5}$ angeben. Damit man nun erstlich den Bruch $\frac{4}{5}$ in 7 Theile eintheilen könne, so gedenke man sich denselben durch gemeinschaftliche Multiplication seines Nenners und Zählers mit 7, in den gleichgültigen Bruch $\frac{28}{35}$ verwandelt (§. 63). Hievon ist der siebende Theil

$$= \frac{28 : 7}{35} = \frac{4}{35}$$

d. h. man hätte nur nöthig gehabt, sogleich bloß des Bruchs $\frac{4}{5}$ Nenner 5 mit 7 zu multipliciren (wie auch aus §. 62 c) erhellet). Wenn man nun diesen Bruch $\frac{4}{35}$ als den 7ten Theil des Bruchs $\frac{4}{5}$, dreymahl nimmt, d. h. den Zähler 4 mit 3 multipliciret, so bekömmt man $\frac{12}{35}$, welcher Bruch denn die verlangten Dreysiebentheile des vorgegebenen $\frac{4}{5}$ ausdrücken wird. Hier ist nun $12 = 4 \cdot 3$ und $35 = 5 \cdot 7$. d. h. Zwey Brüche $\frac{4}{5}$; $\frac{3}{7}$ in ein-

ander zu multipliciren, verfahre man so wie in der Auflösung gezeigt worden. W. z. E.

Anmerkung.

69. Es ist dannenhero nicht Wunder, daß in der Multiplication immer weniger herauskommet, als ein jeder von den Brüchen die man durch einander multiplicieret, indem es in der That eine Division ist. Denn wenn ich z. E. mit $\frac{1}{2}$ multiplicire, so nehme ich ein halbmal, was ich multipliciren soll; und also wird es in der That in zwey Theile getheilet, und ich bekomme einen davon.

Anmerkung.

70. Wenn man einen Bruch durch eine ganze Zahl multiplicieren soll, so ist nicht nöthig erst zu erinnern, daß man nur den Zähler multiplicieren darf; indem der Nenner nur der Name ist (§. 61.) Z. E. $\frac{3}{7}$ mit 2 multiplicieret, bringen $\frac{6}{7}$. Und so haben wir es auch in dem Beweise gemacht.

70a) Einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multiplicieren, darf man seinen Nenner auch nur mit dieser Zahl dividiren (§. 62 e).

Aufgabe.

71. **Einen Bruch ($\frac{4}{7}$) durch einen andern ($\frac{2}{3}$) zu dividiren.**

Auflösung.

1. Kehret den Bruch, durch den man dividiren soll, um; z. E. anstatt $\frac{2}{3}$ schreibet $\frac{3}{2}$.

2. Multipliciret hierauf, wie in der vorhergehenden Aufgabe (§. 68.); so kommet der Quotient $\frac{12}{10} = 1\frac{2}{10}$ (§. 62.) $= 1\frac{1}{5}$ (§. 64.) heraus.

Beweis.

Wenn man einen Bruch durch einen andern dividiret, so fraget man, wie vielmal der eine in dem andern enthalten sey, (§. 17.) Wenn man nun die Brüche zu gleichen Nennern bringet, so muß einer so vielmal in dem andern enthalten seyn, als der Zähler des einen

nen

nen in dem Zähler des andern; weil in dieser Vergleichung der gemeine Nenner, als der gemeine Name der Dinge, die gezählet werden, nicht anzusehen (§. 69) Allein, indem zwey Brüche zu Einer Benennung gebracht werden, erwächyset der Zähler des ersten, wenn man seinen Zähler durch den Nenner des andern **multiplicirt**; hingegen der Zähler des andern, wenn man seinen Zähler durch den Nenner des ersten **multipliciret** (§. 65.) Also bekommet man die beyden Zahlen, so durch einander zu dividiren sind, wenn man den Divisor umkehret, und hernach die Brüche in einander multipliciret. W. Z. E.

Anmerkung.

71 a) Da in der Mathematik sehr häufig die Decimalbrüche vorkommen, so ist nöthig hier einiges davon beyzubringen.

I. Decimalbrüche heissen solche, bey denen man sich die Einheit in Zehn oder Hundert, Tausend ꝛc. Theile eingetheilt vorstellt, Brüche also, deren Nenner aus einer Eins mit einer gewissen Anzahl Nullen bestehen. Z. E.

$$\frac{3}{10}; \frac{8}{100}; \frac{7}{1000}$$

u. d. g.

II. Sie gehen nach eben dem Decimalgesetze fort, nach welchem die ganzen Zahlen geschrieben und ausgesprochen werden (§. 34 a). Sie lassen sich also auch nach jenem Gesetze schreiben, ohne daß man nöthig hat, ihre Nenner unterzusetzen. So wie nun eine Zifer linker Hand der Stelle der simplen Einheiten sich auf Zehner, Hunderter, Tausender, und so fort bezieht, je nachdem sie in der ersten, zweyten, dritten ꝛc. Stelle linker Hand der simplen Einheiten steht, so bedeute eine Zifer in der ersten, zweyten, dritten ꝛc. Stelle rechter Hand der Einer, die Zehntheilchen, Hunderttheilchen, Tausendtheilchen ꝛc.

III. Man bezeichne die Stelle der simplen Einheiten mit einem Punkt oder Comma, so würde ein Ausdruck dieser Art 536,387 so viel bedeuten, als 536 Ganze 3 Zehntheilchen 8 Hunderttheilchen 7 Tausendtheilchen u. s. w. oder 536 Ganze und 387 Tausendtheilchen, und es wäre so gut, als wenn man schriebe $536\frac{387}{1000}$.

IV. So würde denn, wenn keine ganze Einheiten vorhanden wären

0,3 so viel bedeuten als $\frac{3}{10}$;
0,08 — — — $\frac{8}{100}$
0,007 — — — $\frac{7}{1000}$
u. s. w.

V. Man kann jeden vorgegebenen Bruch z. E. $\frac{3}{4}$ in einen gleichgültigen Decimalbruch auf folgende Art verwandeln. Gesetzt man sollte ihn durch Hunderttheilchen ausdrücken, so ist erstlich, wenn man Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{3}{4}$ mit 100 multiplicirt $\frac{3}{4} = \frac{300}{400}$ (§. 63.) und nun ferner, wenn man, um statt des Nenners 400 den Nenner 100 zu bekommen, Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{300}{400}$ gemeinschaftlich mit 4 dividiret (§. 63).

$$\frac{3}{4} = \frac{300}{400} = \frac{300 : 4}{400 : 4} = \frac{75}{100}$$

das heißt

$$\frac{3}{4} = 0{,}75 \text{ (III. IV.)}$$

Man hänge also an den Zähler 3 des vorgegebenen Bruchs so viel Nullen als nöthig ist, um mit dem Nenner 4 die Division zu vollenden. Hier z. B. 2 Nullen, so geht die Division auf, und der Quotient ist 75. Von diesem schneide man von der rechten Hand gegen die Linke so viel Decimalstellen bis an das Comma ab, so viel man Nullen an den obigen Zähler gehängt hatte, so ist der vorgegebene Bruch in Decimaltheile verwandelt. Es versteht sich, daß man an den Zähler 3 erst eine Null hängt und nachsieht, ob die Division mit dem Nenner 4 aufgeht. Bleibt ein Rest, so hängt man an diesen wieder eine Null und dividirt fort, und so an die folgenden Reste immer wieder eine Null, bis die Division aufgeht. So wird man in einem jedem Falle die richtige Anzahl der von dem Quotienten abzuschneidenden Decimalstellen erhalten.

Geht die Division nicht auf, so kann man den vorgegebenen Bruch nie völlig genau durch Decimaltheile ausdrücken. In diesem Falle, so wie in jedem andern, wo die Division sehr lange dauern würde, ehe sie aufgeht, begnügt man sich nur mit einer gewissen Menge der gefundenen Decimaltheile, und läßt die folgenden, als unbeträchtlich, weg.

Zum

Zum Exempel:

$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$
$\frac{17}{3} = 5{,}6666\ldots$

VI. Die Addition und Subtraction der Decimalbrüche, geschiehet wie bey ganzen Zahlen, nachdem man sie so geordnet hat, daß die Commata über einander stehen.

Z. E.

5,237	9,63248
4,81	7,04637
0,7421	2,58611 = Rest
Summe = 10,7891	

VII. Bey der Multiplication verfahre man wie bey ganzen Zahlen, schneide aber zuletzt von dem Produkte so viel Decimalstellen ab, als beyde Factores zusammen hinter ihrem Comma enthalten. Z. E.

3,243 = A
0,52 = B

6486
16215

Produkt = 1,68636 = A . B

Daß dies Produkt hinter dem Comma, 5 Decimalstellen haben müsse, erhellet so:

Die äußerste Zifer zur rechten Hand in dem einen Factor A, nemlich die 3, bedeutet eigentlich $\frac{3}{1000}$, und die äusserste in dem Factor B, $\frac{2}{100}$. Aber $\frac{3}{1000}$ multiplicirt mit $\frac{2}{100}$ giebt (§. 68) $\frac{6}{100000}$; Also bedeutet die äußerste Zifer in dem Produkte, nemlich die 6, eigentlich Hunderttausendtheilchen, d. i. sie muß in der 5ten Stelle rechter Hand des Comma stehen. (IV.)

VIII. Die Division zweyer Decimalbrüche wird ebenfalls wie bey ganzen Zahlen bewerkstelligt; von dem Quotienten werden aber so viel Decimaltheile abgeschnitten, als der Dividendus mehrere enthält, als der Divisor. Wäre nemlich in (VII.) der Dividendus = 1,68636, der Divisor = 0,52, so käme umgekehrt für den Quotienten die Zahl 3,243.

IX. Wä-

IX. Wäre 1,6 zu dividiren mit 0,625 so hänge man an den Dividendus 1,6 rechter Hand so viel Nullen, als erstlich nöthig sind, so viel Ziffern im Dividendus zu haben, daß man mit 0,625 herein dividiren kann. Geht die Division nicht sogleich nach dem gefundenen ersten Theile des Quotienten auf, so hänge man an den Rest, und an die folgenden Reste Nullen, und setze die Division fort, wie in (V), so wird sich aus der Menge von Decimalstellen im Dividendus (zu diesen die Nullen mit hinzugerechnet, welche man nach und nach an die Reste hieng) und im Divisor ergeben, wie viel man im gefundenen Quotienten Decimalstellen abschneiden müsse (VIII).

0,625	1,600	2,56 Quotient.
	1,250	
	3500	
	3125	
	3750	
	3750	
	0	

Erklärung.

72. Wenn man eine Zahl (2) durch sich selbst multipliciret, so nennet man das Produkt (4) das Quadrat derselben Zahl; sie aber die Quadratwurzel, in Ansehung dieses Quadrats.

Erklärung.

73. Multipliciret man die Quadratzahl (4) ferner durch ihre Wurzel (2); so heisset das neue Produkt (8) eine Cubikzahl, und in Ansehung derselben die Wurzel (2) nunmehro die Cubikwurzel.

Erklärung.

74. Die Quadratwurzel aus einer gegebenen Zahl ausziehen, heisset diejenige Zahl finden, die durch sich selbst multipliciret die gegebene Zahl hervorbringet.

Erklä-

Erklärung.

75. Hingegen die Cubikwurzel aus einer gegebenen Zahl ausziehen, heisset diejenige Zahl finden, die durch ihre Quadratzahl multiplicirt die gegebene Zahl hervorbringet.

Anmerkung.

76. Wenn man die Quadrat- und Cubik-Wurzel ausziehen will, muß man die Quadrat- und Cubik-Zahlen aller Zahlen von 1 bis 9 wissen. Darzu dienet folgendes Täfelein.

Wurzeln.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrat.	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cub. Zahl.	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Aufgabe.

77. Aus einer gegebenen Zahl die Quadratwurzel auszuziehen.

Auflösung.

1. Theilet die gegebene Zahl in Classen von der Rechten gegen die Linke zu, und gebet jeder zwey Zifern: denn so viel Theile hat die Wurzel als Classen herauskommen. In der letzten Classe aber zur Linken kann auch eine Zifer stehen.
2. Suchet in dem Wurzel-Täfelein (§. 76.) das Quadrat auf, welches der Zahl in der ersten Classe am nächsten kommet, und ziehet es von derselben ab. Die dazu gehörige Wurzel aber setzet in die Stelle des Quotienten.
3. Hierauf dupliret den gefundenen Quotienten, und schreibet das Produkt unter die linke Zahl der folgenden Classe; und weiter fort zurücke gegen die Linke, wenn es aus viel Zifern bestehet; dividiret auf gewöhnliche Weise, und setzet den Quotienten

an

an gehörigen Ort, so habet ihr den andern Theil der Wurzel.

4. Eben diesen Quotienten setzet unter die rechte Zahl derselben Classe, und denn multipliciret mit dem gefundenen Quotienten die untergeschriebenen Zahlen und ziehet das Produkt von den obern Zahlen des Quadrats ab.

5. Wenn ihr nun die dritte und vierte Regel bey allen Classen anbringet, so kommet die verlangte Quadratwurzel heraus.

6. Wenn ihr aber die Wurzel durch sich selbst multipliciret; so kommet die gegebene Quadratzahl wieder heraus. Und dieses ist die Probe, daraus ihr sehet, ob ihr recht gerechnet oder nicht (§. 74).

1	79	56	(134	Probe:	134
1	::	::			134
79	::				536
2B	::				402
69	::				134
10	56				17956
2	84				
10	56				
0					

Anmerkung.

78. Wenn die vorgegebene Zahl kein vollkommenes Quadrat ist, so kann man Zehen-Theilchen, Hundert-Theilchen, u. s. w. haben, wenn man 2, 4 u. s. w. Nullen hinten anhänget und die Rechnung fortsetzet. Denn wenn man die Einheit in der Quadrat-Zahl in 100 gleiche Theile theilet, welches geschiehet, wenn man sie durch 100 multipliciret, so wird die Wurzel in zehen Theile getheilet (§. 72.); z. E. wenn man aus 345 die Wurzel ziehen soll, so geschiehet solches folgender maassen:

```
3|45  (18 57/100)
1|::
------------
2|45
1|28
2|24
--------------------
2 1|0 0
  3|6 8
1 8|2 5
--------------------
  2|7 5|0 0
   |3 7|0 7
  2|5 9|4 9
  ----------
    1 5|5 1
```

Will man die Probe anstellen, ob man recht gerechnet: so multipliciret man die gefundene Zahl durch sich selbst, und addiret zu dem Produkte, was noch übrig geblieben war. Wenn nun die vorgegebene Zahl mit so viel Nullen, als man anhänget, herauskömmet; so ist die Rechnung richtig (§. 74.) Z. E.

```
   1857
   1857
  -------
  12999
  9285
 14856
 1857
 -------
 3448449
    1551
 -------
 3450000
```

Aufgabe.

79. Aus einer gegebenen Zahl die Cubikwurzel auszuziehen.

Auflösung.

1. Theilet die gegebene Zahl in Classen von der Rechten gegen die Linke, und gebet jeder Classe drey Zahlen. Denn

Denn so viele Theile hat die Wurzel als Classen herauskommen.

2. Suchet in dem Wurzel-Täfelein (§. 76.) die Cubikzahl, welche derjenigen, so in der letzten Classe zur Linken stehet, am nächsten kommt, ziehet dieselbe davon ab, und setzet die dazu gehörige Wurzel in die Stelle des Quotienten. Solchergestalt habet ihr den ersten Theil der Wurzel.

4. Diesen multipliciret mit sich selbsten, und das herauskommende Quadrat mit drey, setzet das Produkt unter die Cubikzahl anstatt des Divisors, dergestalt, daß dessen letzte Zahl zur Rechten unter die erste zur Linken in der folgenden Classe zu stehen kommet, und dividiret gewöhnlicher maaßen: so kommet der andere Theil der Wurzel heraus.

4. Alsdenn multipliciret den Divisor in den neuen Quotienten, und schreibet das Produkt darunter: unter der mittlern Zahl derselben Classe fahet an von der Rechten gegen die Linke zu schreiben, das Produkt von dem Quadrate des neuen Quotienten dreymal genommen in den vorhergehenden: und endlich unter der dritten, die Cubikzahl des neuen Quotienten. Addiret diese drey Produkte, und ziehet die Summe ab von den in der gegebenen Zahl noch übrigen Zifern.

Wenn man nun nach der dritten und vierten Regel bey den übrigen Classen fortfähret, so kommt endlich die verlangte Cubikwurzel heraus.

47|437|928 (362
27|:::|:::

	20|437 :::
Divisor	(2|7):: :::
Fact. ex Div. in N. Q.	16|2:: :::
— ex tr. □ N. Q. in P.	3|24: :::
Cubus novi Quoti	|216 :::
Summa Factorum	19|656 :::
	781|928
Divisor	(388|8)::
Fact. ex Div. in N. Q.	777|6 ::
— ex tr. □ N. Q. in P.	4|32:
Cubus novi Quoti	|8
Summa Factorum	781|928
	000|000

Anmerkung.

80. Wenn man die Einheit in der Cubikzahl in 1000 gleiche Theile theilet (welches geschiehet, wenn man sie durch 1000 multipliciret): so wird die Wurzel in zehen Theile getheilet (§ 73.). Dannenhero, wenn eine gegebene Zahl keine vollkommene Cubikzahl ist, darf man nur 3 Nullen für die Zehentheilchen, noch 3 für die Hunderttheilchen u. s. w. anhängen, und die Rechnung nach der ordentlichen Regel fortsetzen. Z. E. es sey aus 3 die Cubikwurzel zu ziehen.

```
3|000|000 (1 44/100
1|:::|:::
-------------------
2|000
 |(3)::
1| 2::
 | 48
 |  64
-------------------
 1744
-------------------
   256|000
  (58|8)::
  235|2 ::
     6|72:
      |  64
-------------------
   441|984
-------------------
   14|016
```

Will man wissen, ob man recht gerechnet, oder nicht, so muß man die gefundene Zahl in sich selbst, und das herauskommende Produkt noch einmal in dieselbe multipliciren, und was in der Rechnung übrig geblieben, dazu addiren. Denn wenn die vorgegebene Zahl mit so viel Nullen herauskommet, als man angehänget, so ist die Rechnung richtig (§. 85.).

Probe:

Probe;

144 Wurzel.

556
576
144

20736 Quadratzahl
144

82944
82944
20736

2985984
14016

3000000 Cubikzahl.

80a) Der Beweis dieses Verfahrens für die Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel ist für die ersten Anfangsgründe zu weitläuftig, und Anfänger konnen sich daher mit dem beygebrachten begnügen. Indessen will ich nur noch erinnern, daß das Zeichen für die Quadratwurzel dieses ist $\surd$, für die Cubikwurzel aber $\sqrt[3]{}$, dergestalt, daß also $\surd 25$ so viel bedeutet, als die Quadratwurzel aus 25. Hingegen bezeichnet $\sqrt[3]{8}$ die Cubikwurzel von 8, und da diese $= 2$ ist, so schreibt man $\sqrt[3]{8} = 2$.

80b) Man kann beweisen, daß Quadrat- oder Cubikwurzeln wie (§. 78 und 80) bey deren Ausziehung zuletzt ein Rest bleibt, nie völlig genau gefunden werden können, wenn man auch die Ausziehung ohne Ende fortsetzt. Man heißt solche Wurzeln Irrationalwurzeln. Man kann sich ihrem wahren Werthe durch Decimaltheile, wie in den angeführten §§en immer mehr und mehr nähern, aber ihn nie völlig erreichen. So ist also z. B. die Cubikwurzel aus 3 eine Irrationalgröße, und ihr Werth bis auf Hundertheilchen $= 1\frac{44}{100}$ oder 1,44. Die Tausendtheilchen u. s. w. könnte man durch die weitere Befolgung des Verfahrens §. 80. finden, wenn es zu einem gewissen Gebrauche nöthig wäre.

Lehrsatz.

81. In einer geometrischen Proportion ist das Produkt des ersten Gliedes in das vierte, gleich dem Produkte aus dem andern in das dritte.

3 : 6 = 4 : 8

4 3

24 = 24

Beweis.

Das andere Glied entstehet, wenn man das erste; und das vierte, wenn man das dritte durch den Namen der Verhältniß multipliciret (§. 53). Derowegen wenn man das erste Glied durch das vierte multipliciret, so ist das Produkt aus dem ersten und dritten Gliede, und dem Namen der Verhältniß erwachsen. Multiplicirt man das andere Glied durch das dritte, so ist das Produkt gleichfalls aus dem ersten und dritten Gliede, und dem Namen der Verhältniß erwachsen. Derowegen müssen die beyden Produkte gleich seyn (§. 26.) W. Z. E.

81 a) Wir wollen überhaupt die vier Glieder einer Proportion mit a; b; c; d; bezeichnen, so daß a : b = c : d. Weil nun a in b so oft enthalten seyn muß, wie c in d (§. 54) und also die beyden Brüche $\frac{b}{a}$ und $\frac{d}{c}$ einander gleich seyn müssen, so müssen sie auch einander gleich bleiben, wenn man sie nach (§. 65) unter einerley Benennung bringt. Also $\frac{b \cdot c}{a \cdot c} = \frac{a \cdot d}{a \cdot c}$. Folglich b . c = a . d. Dieser Beweis ist allgemein, und in mancher Rücksicht dem Wolfischen vorzuziehen. Auch ist es gut, wenn Anfänger sich in den Beweisen dieser oder jener Sätze nach und nach an die Bezeichnung der Zahlen mit Buchstaben gewöhnen, und sich dadurch zur Buchstabenrechenkunst vorbereiten.

Zusatz.

82. Wenn demnach drey Zahlen proportional sind, daß die mittlere zwey Stellen vertritt (§. 55.); so ist

das

das Produkt aus den beyden äussersten der Quadratzahl der mittleren gleich (§. 72.).

Lehrsatz.

83. **Wenn vier Zahlen oder Größen proportional sind; so verhält sich auch wechselsweise, wie die erste zu der dritten, so die andere zu der vierten.**

Beweis.

Das andere Glied kommt heraus, wenn man das erste durch den Exponenten multipliciret, das vierte aber, wenn man das dritte durch eben denselben Exponenten multipliciret (§. 53.) Derowegen verhält sich das andere Glied zu dem vierten, wie das erste zu dem dritten (§. 58.). W. Z. E.

Aufgabe.

84. **Zwischen zwey gegebenen Zahlen die mittlere geometrische Proportional-Zahl zu finden.**

Auflösung.

1. Multipliciret die beyden gegebenen Zahlen (8 und 72) durch einander.
2. Aus dem Produkte (576) ziehet die Quadratwurzel (24) (§. 77.): so habt ihr die verlangte Zahl (§. 82.)

Aufgabe.

85. **Zu drey gegebenen Zahlen (3, 12, 5,) die vierte, oder auch zu zweyen die dritte geometrische Proportional-Zahl zu finden.**

Auflösung.

1. Multipliciret die andere (12) durch die dritte (5), oder, in dem andern Falle, die andere durch sich selbst.

2. Das Produkt (60) dividiret durch die erste (3); so ist der Quotient (20) die vierte (§. 81.), oder, in dem andern Falle, die dritte (§. 82.).

Anmerkung.

86. Die Auflösung dieser Aufgabe nennet man insgemein die Regel Detri, weil aus 3 Zahlen die vierte gefunden wird. Und hat dieselbe einen unaussprechlichen Nutzen, so wohl in dem gemeinen Leben, als in allen Wissenschaften. Es ist aber aus der Aufgabe leicht zu erfahren, daß man die Regel Detri nirgend anbringen kann, als wo man vorher aus der Beschaffenheit der Sachen versichert ist, daß eine geometrische Proportion unter ihnen anzutreffen. Z. E. Es ist ein großes Gefässe mit Wasser angefüllet, und unten an den Boden ein enges Löchlein, dadurch es herauslaufen kann. Man hat befunden, daß in 2 Minuten 3 Kannen herausgelaufen. Die Frage ist, wenn 200 Kannen herauslaufen werden? Hier sind drey Zahlen gegeben, die vierte soll man finden. Allein es ist bekannt, daß das Wasser anfangs geschwinde, hernach langsam läufet, und also die Zahl der ausgelaufenen Kannen der Zeit, in welcher sie herauslaufen, keinesweges proportional. Derswegen kann man auch diese Frage durch die Regel Detri nicht auflösen.

Anmerkung.

87. Allein im Handel ist der Werth der Waare allezeit ihrer Größe gleich. Denn wenn einer zweymal so viel nimmt, zahlet er doppelt: nimmt er dreymal so viel als ein anderer, so zahlet er dreyfach Geld. Daher kann man aus dem gegebenen Werthe von einer gewissen Größe einer Waare, den Werth einer andern Größe, oder auch der Größe der Waare von einem gegebenen Werthe finden. Z. E. 3 Pfund kommen 4 Thaler, wie viel kommen 17 Pfund? Hier ist klar, wie vielmal 3 Pfund in 17 Pfund enthalten sind, eben so vielmal die 4 Thaler, als der Werth der 3 Pfunde, in dem Werthe der 17 Pfund enthalten seyn müssen, den ich suche, und nach der Regel Detri also finde:

3 Pf. — 17 Pf. — 4 Thlr.

4

68

(2
68 | $22\frac{2}{3}$ Thl.
BB

Oder

Oder: für 4 Thaler bekommt man 3 Pfund, wie viel wird man für $22\frac{2}{3}$ Thaler bekommen? Hier ist abermal klar, daß wie vielmal der Werth von 3 Pfund, nemlich 4 Thaler, in dem Werthe der gesuchten Pfunde, nemlich $22\frac{2}{3}$ Thaler enthalten, eben so vielmal die 3 Pfund in den gesuchten Pfunden enthalten seyn müssen, die man durch die Regel Detri solchergestalt findet.

4 Thl. — $22\frac{2}{3}$ Thl. — 3 Pf.

3

68

2	
68	17 Pf.
44	

Woraus zugleich zu ersehen, wie man in der Regel Detri die Probe anstellen kann, ob man recht gerechnet, oder nicht.

Anmerkung.

88. Eben so verhält sich der Lohn der Arbeiter, wie die Zahl der Zeiten, in welchen sie gearbeitet, wenn man auf Tage oder Stunden mit ihnen gedungen. Ingleichen die Größe der verrichteten Arbeit ist der Zeit proportional, wenn man eine Stunde so viel arbeitet, als die andere; ingleichen die Zahl der Arbeiter, wenn einer so viel arbeitet, als der andere, u. s. w. Z. E. in einer Stunde lieset einer 6 Blätter in einem Buche. Die Frage ist, in wie viel Stunden er 360 Blätter lesen wird? Die verlangte Zahl findet man nach der Regel Detri also:

6 Bl. — 360 Bl. — 1 St.

1

360	60 St.
60	

Anmerkung.

89. Unterweilen geschiehet es, daß zwischen den Zahlen keine solche Proportion zu finden, dergleichen zwischen den Sachen, die gezählet werden, anzutreffen, wenn nemlich nicht alle Zahlen von einerley Art sind. Da denn nöthig ist, daß sie zu einerley Art gebracht werden, ehe man die Regel Detri anbringen kann, als wenn man

die Thaler in Groschen, die Groschen in Pfennige, die Pfunde in Lothe, die Stunden in Minuten, u. s. w. verwandelt. Z. E. 3 Pfund und 4 Loth kosten 2 Thaler 4 Groschen: was kommen 2 Pfund? Die Rechnung geschiehet also:

3 Pf. 4 L. — 2 Pf. — 2 Thl. 4 gr.

32	32	24
100 L. —	64 L. —	52

52

128

320

3328

3328	$33\frac{28}{100}$ gr.
100	oder $33\frac{7}{25}$ gr.

(§. 64.)

Anmerkung.

90. Es geschiehet meistentheils, daß die übrigen Brüche eine ganz andere Eintheilung des Ganzen erfordern, als insgemein gebräuchlich. Als in dem vorhergehenden Exempel soll der Groschen in 25 Theile eingetheilet werden; wir aber theilen ihn in 12 ein. Derowegen muß man einen andern Bruch finden, der so viel gilt, wie die gegebene $\frac{7}{25}$ und zum Nenner 12 hat. Da nun der gesuchte Zähler des Bruchs in 12 so vielmal enthalten seyn muß, als der gegebene Zähler 7 in seinem Nenner 25 (§. 62.): so kann auch diese Verwandelung durch die Regel Detri folgendergestalt geschehen (§. 85):

25 — 7 — 12

7

84

84 (9	$3\frac{5}{21}$ pf.
8 4	
12 8	

Weil der Pfennig nicht weiter eingetheilet wird, so muß man die $\frac{8}{21}$, welche etwas mehr als $\frac{1}{3}$ von einem Pfennige sind, weglassen: sonst könnte man ihren Werth gleichfalls nach der Regel Detri findent.

Anmerkung.

91. Man findet in den arithmetischen Schriften auch eine verkehrte Regel Detri, die man aber nicht nöthig hat, wenn man die

Zahlen

Zahlen dergestalt neben einander setzet, wie es die Proportion erfordert. Z. E. 125 Soldaten werden mit einem Festungsbau innerhalb 6 Monaten fertig. Es ist aber die Frage: wie viel Soldaten muß man haben, daß der Bau innerhalb 2 Monaten fertig wird? Hier ist klar, daß, wie vielmal 2 Monate in 6 Monaten enthalten sind, eben so vielmal die Zahl der Soldaten, welche 6 Monate mit der Arbeit zubringen, in der Zahl derer enthalten sey, welche in 2 Monaten fertig werden sollen. Denn je geschwinder die Arbeit fortgehen soll, je mehr Soldaten muß man dazu haben. Die Rechnung geschiehet demnach also.

2 Mon. — 6 Mon. — 125 Sold.

6

750

xx
xso | 375 Sold.
xxx

Anmerkung.

92. *Unterweilen muß man die Regel Detri zweymal anbringen, ehe man die verlangte Zahl finden kann.* Woraus einige ohne Noth eine besondere Regel gemacht, und sie die Regel de quinque ingleichen Regulam compositam genennet. Z. E. 300 Thaler bringen in 2 Jahren 36 Thaler Interesse: wie viel tragen 20000 Thaler in 12 Jahren? Hier suchet man erstlich durch die Regel Detri, wie viel 20000 Thaler in 12 Jahren tragen, folgendergestalt:

300 Thl. — 20000 Thl. — 36 Inter.

36

720000

x
xxsoo | 2400 Thl.
xxxxoo

2 J. — 12 J. — 2400 Thl.

12

4800

24

28800

xxsoo
xxxxx | 14400 Thl.

Anmerkung.

93. Es lassen sich dergleichen Exempel auch durch eine einige Anwendung der Regel Detri rechnen. Denn weil 2 mal 300 Thaler so viel in einem Jahre Interesse bringen, als 300 in zweyen, und 12 mal 20000 in einem Jahre so viel geben, als 20000 in 12 Jahren: so darf ich nur die Umstände der Zeit weglassen, und sagen: 2 mal 300, das ist 600 Thaler, geben (nemlich in einem Jahre) 36 Thaler Interesse, was geben 12 mal 20000, das ist 240000 Thaler (nemlich wiederum in einem Jahre?)

300 Thlr. 2 J. — 20000 Thl. 12 J. — 36 Inter.

2	12		
600	240000		
	36		
	1440000	℔℔	14400 Thlr.
	72	ßßßßßßßß	
	8640000	ßßßßßßßß	

Und diese letzte Manier ist rathsamer, als die erste, weil in der ersten öfters verdrüßliche Brüche vorkommen.

Anmerkung.

94. Bey einigen Exempeln muß man die Regel Detri nothwendig etlichemal anbringen; als in den Gesellschaftsrechnungen so vielmal, als Personen sind, die an dem Gewinn oder Verlust in der Handlung Antheil haben. Denn weil derjenige doppelt Geld gewinnet und verlieret, der doppelt Zulage giebet, u. s. w. so verhält sich jederzeit die ganze Zulage zu eines jeden Zulage insbesondere, wie der ganze Gewinn oder Verlust zu eines jeden Gewinn oder Verlust insbesondere. Z. E. es haben drey Personen in einer Handlung 2000 Thaler gewonnen. Der erste hat gegeben 1000 Thaler. Der andere 500 Thaler. Der dritte 3000 Thaler. Man soll finden, wie viel jedem von dem Gewinn gebühre? Dieses geschiehet folgendergestalt:

Zula-

Zulage des Ersten 1000 Thl.
— des Andern 500 —
— des Dritten 300 —

Ganze Zulage 1800 Thlr.

1800 Thl. — 1000 Thl. — 2000 Thl.
2000
2000000

xxx
xxxx2
xooooo0 | 1111 2/18 Thl. Gewinn des Ersten.
xooooo0
xxx

1800 Thl. — 500 Thl. — 2000 Thl.
2000
1000000

xxx
xxx
xooooo0 | 555 10/18 Thl. Gewinn des Anderen.
xooooo0
xx

1800 Thl. — 300 Thl. — 2000 Thl.
2000
600000

xx
xxxx
xooooo0 | 333 6/18 Thl. Gewinn des Dritten.
xooooo0
xx

Probe.

1111 2/18 Gewinn des Ersten.
555 10/18 Gewinn des Anderen.
333 6/18 Gewinn des Dritten.

2000 Thl. ganzer Gewinn.

Anmer=

Anmerkung.

95. Es giebet auch viel andere Exempel, die auf eine gleiche Weise gerechnet werden. Als wenn man nicht allein in der Medicin, sondern auch in andern Künsten und Wissenschaften das Gewicht der Ingredientien weiß, die man mit einander in Zubereitung eines Dinges vermischen soll, und man will wissen, wie viel von jedem zu nehmen ist, damit das Vermischte ein verlangtes Gewicht habe. Z. E. eine Medicin hat 3 Ingredientien, von dem einen kommen dazu 4 Loth, von dem andern 5 Loth, von dem dritten 2 Loth. Die Frage ist, wie viel man von jedem nehmen muß, daß man von der Medicin 8 Pfund habe. Die Rechnung geschiehet folgendermaaßen:

Gewicht { des ersten / des andern / des dritten } Ingred. 4 Loth; 5 —; 2 —

Summe 11 Loth.

11 Loth — 8 Pf. — 4 Loth.

32

256 Loth.

4

1024

XXXI
XXXX
XXX
X

93 1/11 Loth Gewicht des ersten Ingred.

11 L. — 8 Pf. — 5 L.

32

256

5

1280

X
XX4
XX80
XXXX
XX

116 4/11 L. Gewicht des andern Ingr.

11 Loth

11 Loth — 8 Pf. — 2 £.

32

256 £.

2

512

x
xx6
8xx | 46$\frac{6}{11}$ Loth Gewicht des dritten Ingr.
xxx
x

Probe:

Gewicht	des ersten	Ingr.	93$\frac{1}{11}$	£.
	des andern		116$\frac{4}{11}$	£.
	des dritten		46$\frac{6}{11}$	£.
	Summe		256	Loth.

Anmerkung.

96. Man hat in verschiedenen Fällen einige Vortheile in der Regel Detri, welche insgemein die Welsche Practica genennet werden. Uns begnüget, die nützlichsten davon zu erzehlen. Weil die Regel Detri zu drey gegebenen Zahlen die vierte Proportionalzahl suchet (§. 85.), wenn man aber zwey Zahlen durch eine Zahl dividiret, die herauskommenden Quotienten mit ihnen einerley Verhältniß haben (§. 29.); so dividiret die erste und andere, oder auch (§. 83.) die erste und dritte Zahl, und brauchet die herauskommenden Quotienten anstatt derselben in der Rechnung, wie aus beygefügten Exempeln zu ersehen.

3 Pf. kosten 9 Thl. wie viel 7 Pf.

3) 1 3 3

Facit 21 Thl.

14 Pf. kosten 26 Thl. wie viel 7 Pf.

7) 2) 2) 1

Fac. 13 Thl.

Anmer-

Anmerkung.

97. Wenn entweder die erste oder dritte Zahl 1, und die andere von beyden nicht allzugroß, die mittlere aber aus Zahlen von vielerley Arten zusammengesetzet ist, so hat man nicht nöthig, die in der 4 Anmerkung §. 89.) vorgeschriebene Reduction anzustellen, wie folgendes Exempel ausweiset.

1 Pf. kostet 3 Thl. 8 gr. 6 pf. wie viel 5 Pf.

5

Fac. 16 Thl. 18 gr. 6 pf.

Nemlich ich sehe hier bald, daß 2 mal 6 pf. einen Groschen machen, und also 5 mal 6 pf., 2 gr. 6 pf., wiederum 3 mal 8 gr. einen Thlr., und also noch 2 mal 8 darüber, 16 gr. Dannenhero addire ich den Thaler zu den übrigen 15 Thl. und die 2 gr. zu den 16 gr. So ist das verlangte Facit 16 Thl. 18 gr. 6 pf.

Anmerkung.

98. Wenn die zwey gleichnamige Zahlen von einander um 1 unterschieden sind, kann man einen besondern Vortheil brauchen, der sich durch Exempel am bequemsten zeigen lässet. Z. E. 5 Pf. kosten 30 Thl. wie viel 4 Pf.? Weil 4 Pf. um den 5ten Theil weniger kosten müssen, als 5 Pf. so dividire ich nur 30 durch 5 und den Quotienten 6 ziehe ich von 30 ab, so bleibet das Facit 24 Thl. übrig. Item 8 Pf. kommen 24 Thl. wie viel 9 Pf.? Weil 9 Pf. um $\frac{1}{8}$ mehr als 8 kosten, so darf ich nur den achten Theil von 24, nemlich 3 Thl. zu 24 Thl. addiren, so kommet das Facit 27 Thl.

Anmerkung.

99. Unterweilen kann man verschiedene Vortheile bey einem Exempel anbringen.

100 Pf. kosten 30 Thl. 4 gr. wie viel 50 Pf.

50) 2 2) ———

Fac. 15 Thl. 2 gr.

Item: 60 Pf. kosten 80 Thl. was 2520 Pf.

60) 1 6) ——— 42

480 ———

7) ——— 7

Fac. 3360 Thl.

99a) Ein Holländer, Nahmens Reeß, hat diesen Vortheilen noch mehrere andere beygefügt, wodurch zumahl in zusammengesetzten Fällen, wo man oft viele Proportionen ansetzen müßte, um das Facit zu erhalten, die Rechnung sehr erleichtert wird. So wohl diese Reeßischen Vortheile, als auch die mannichfaltigen Anwendungen der Regel de Tri, auf allerley im gemeinen Leben vorkommenden Rechnungsarten, sind in den §. 1a) genannten Büchern mit mehreren zu ersehen.

Ende der Rechenkunst.

Anfangs-

Anfangs-Gründe der Algebra.

1.

Die Algebra ist eine Wissenschaft, aus einigen gegebenen endlichen Größen andere ihres gleichen, von denen in Ansehung der gegebenen etwas bekannt gemacht wird, vermittelst gewisser Gleichungen zu finden.

Anmerkung.

2. Z. E. ihr sollt zwey Zahlen finden, die mit einander multipliciret eine gegebene Zahl 60, hingegen zusammen addiret eine andere gegebene Zahl 17 bringen. Also werden euch gegeben zwey Zahlen, und ihr sollet aus denselben zwey andere Zahlen finden, von welchen euch bekannt gemacht wird, daß ihre Summe der kleineren, ihr Produkt aber der größeren von den gegebenen Zahlen gleich seyn soll. Die Algebra nun lehret euch nicht allein in gegenwärtigen Falle die verlangten Zahlen, sondern auch eine allgemeine Regel finden, nach welcher ihr alle Exempel von dieser Art rechnen könnet.

Erklärung.

3. Die Buchstaben-Rechenkunst wird diejenige genennet, welche anstatt der Zifern allgemeine Zeichen der Größen brauchet, und damit die gewöhnlichen Rechnungsarten verrichtet.

Erklärung.

4. Eine Größe nennen wir alles dasjenige, was sich vermehren und vermindern läßt, in so weit es sich vermehren und vermindern läßt.

Wille

Willkührlicher Satz.

5. Man benenne die gegebenen Größen jederzeit mit den ersten Buchstaben des Alphabets a, b, c, d, u. s. w. die unbekannten aber, welche man suchet, mit den letzten x, y, z.

Willkührlicher Satz.

6. Das Zeichen der Addition ist +, der Subtraction aber —. Jenes wird durch plus dieses durch minus ausgesprochen. (§. 51 b) Arithm.)

Anmerkung.

7. Z. E. die Summe zweyer Größen a und b wird geschrieben a + b, und ausgesprochen: a plus b. Hingegen die Differenz zweyer Größen wird geschrieben durch a — b, und ausgesprochen: a minus b. Als es bedeute a 7 Thaler, b 8 Groschen, so bedeutet a + b; 7 Thl. + 8 gr. das ist, 7 Thl. u. 8 gr. hingegen a — b 7 Thl. — 8 gr. das ist, 7 Thl. weniger 8 gr.

Willkührlicher Satz.

8. Die Multiplication hat entweder gar kein Zeichen, sondern man setzet die Buchstaben, welche einander multipliciren, ohne einiges Zeichen neben einander: oder man deutet sie durch ein liegendes Creuz ⋋ oder einen Punkt (.) an.

9. Wenn a durch b multipliciret werden soll, so schreibet das Produkt ⋋ a b, oder a . b, oder a ⋋ b. Wir werden uns des letztern Zeichens niemals bedienen.

Willkührlicher Satz.

10. Wenn eine Größe viele andere auf einmal multipliciret, so schließet man sie in eine Parenthesin ( ) ein, und setzet jene ohne einiges Zeichen vor oder hinter die Parenthesin: oder man setzet zwischen dieselben einen Punkt. (§. 51 b. Arithm.)

11. Das Produkt von a + b — c in d, schreibet entweder also: (a + b — c) d, oder dergestalt: d (a + b — c). Insgemein schreibet man dieses Produkt also (a + b — c) × d

oder auch d × a + b — c.

11a) Die letztere zwo Arten sind jetzt nicht mehr gebräuchlich.

Willkührlicher Satz.

12. Das Zeichen der Division sind zwey Punkte (:), oder man schreibet die Buchstaben, welche einander dividiren sollen, wie einen Bruch in der Rechenkunst. (§. 51 b und §. 62 c Arithm.)

Anmerkung.

13. Wenn a durch b dividiret werden soll; so schreibet man den Quotienten entweder a : b, oder $\frac{a}{b}$ und spricht es beiderseits aus: a durch b dividiret.

Willkührlicher Satz.

14. Wenn eine Größe viele andere auf einmal dividiret, oder viele andere Eine dividiren; so werden, wie in der Multiplication, die vielen in eine Parenthesin () eingeschlossen, oder man kann auch an deren statt einen bloßen Bruchstrich brauchen.

Anmerkung.

15. Wenn a + b durch c dividiret werden soll, so schreibet den Quotienten entweder

$$(a + b) : c, \text{ oder } \frac{a + b}{c}$$

Sollet ihr a durch b + c dividiren, so ist der Quotient

$$a : (b + c) \text{ oder } \frac{a}{b + c}.$$

Wiederum wenn ihr a + b durch c + d dividiret, so schreibet den Quotienten

$$(a + b) : (c + d) \text{ oder } \frac{a + b}{c + d}$$

oder auch

$$\overline{a + b} : c, \quad a : \overline{b + c}, \quad \overline{a + b} : \overline{c + d}.$$

15a) Auch diese letztern Bezeichnungsarten kommen nur in ältern Schriften vor.

Erklärung.

15b) Es giebt Größen, welche eine solche Beziehung auf einander haben, daß eine die andere vermindert. Z. E. Schulden und **Vermögen**; **Vorwärtsgehen** und **Rückwärtsgehen** u. d. g. Man heist sie **entgegengesetzte Größen**, und nennt eine von diesen Größen, welche man will, **bejahend**, die andere **verneinend**, oder die eine **positiv**, die andere **negativ**. Z. E. Wenn man das Vermögen **positiv** nennt, so wären die Schulden, als das entgegengesetzte des Vermögens, **negativ**. Man bezeichnet diejenige Größe von zwey entgegengesetzten, welche man die positive genannt hat, mit dem Additionszeichen +, und die entgegengesetzte, oder negative mit dem Subtractionszeichen oder mit —, weil die negative, wenn sie zur positiven gerechnet wird, als etwas abzuziehendes zu betrachten ist. Jedermann wird zugeben, daß 8 Thlr. Vermögen und 5 Thl. Schulden in Summa nur 3 Thl. Vermögen ausmachen, und eben so 8 Thl. Schulden und 5 Thl. Vermögen zusammen noch 3 Thl. Schulden betragen, d. h. $+8-5=+3$ und $-8+5=-3$. Wenn zwey entgegengesetzte Größen zusammen gerechnet werden sollen, so verzehrt allemahl die kleinere von der größern so viel, als sie selbst beträgt, und was von der größern übrig bleibt, das ist in diesem Falle eigentlich die **Summe** oder das **Aggregat**.

15c) **Zus.** So ist denn allgemein Z. E. $+8a+5a=+13a$; $+8a-5a=+3a$; $-8a+5a=-3a$; $-8a-5a=-13a$, was nun auch a bedeuten mag. In (§. 15b) bedeutete a Rthl. Wenn vor einer Größe kein Zeichen steht, so wird sie als positiv verstanden; so schreibt man denn sehr oft statt $+8a$ auch schlechtweg $8a$.

15d) **Zus.** Wenn die bejahte und verneinte Größe einerley Zahlenwerth haben, so heben sie sich beym Zusammenrechnen auf, und geben Null. Also ist $+3$ und -3 zusammen $=0$; oder allgemein $+3a-3a=0$. Man kann also in einem gewissen Sinne, die negative Größe als weniger als Nichts betrachten, weil erst eine eben so große bejahte zu ihr gerechnet werden muß, wenn wirklich Null oder Nichts herauskommen soll. Aber dieser Ausdruck Weniger als Nichts, ist nur **Beziehungsweise**, und nicht **absolut** zu nehmen. Denn allerdings sind z. E. Schulden Et-

was, aber als Vermögen betrachtet, oder in Beziehung auf Vermögen sind sie weniger als nichts.

Erklärung.

15e) Von einer Größe A, sie sey wie man will, bejaht oder verneint, eine andere B, gleichfalls bejahte oder verneinte **abziehen**, heist eine dritte Größe C finden, welche zu der abzuziehenden B addirt, diejenige A zur Summe giebt, von der der Abzug geschehen sollte. Diese Größe C heist man den **Rest**.

15f) Wie dieser beschaffen seyn müsse, je nachdem B bejaht oder verneint angenommen wird, erhellt aus folgenden Beyspielen.

Sollte z. E. von A = + 9 abgezogen werden B = + 4 so muß der Rest C heissen = + 9 — 4 = + 5 d. h. die + 4 abziehen, ist soviel als — 4 zu + 9 addiren, welches ohnehin klar ist. Denn nun ist C + B = + 9 — 4 + 4 = + 9 = A, wie sichs der Erklärung §. 15 e zufolge gebührt.

Wäre aber A wie vorhin = + 9; B aber negativ = — 4 so muß C = + 9 + 4 = + 13 seyn, wenn C + B = A seyn soll, d. h. — 4 von + 9 abziehen, ist so viel als + 4 zu + 9 addiren. Denn nun ist wieder C + B = 9 + 4 — 4 = + 9 = A.

So ist denn allgemein

$$a - (+b) = a - b$$
$$\text{und } a - (-b) = a + b$$

d. h. eine Größe von einer andern abziehen, ist so viel, als jene entgegengesetzt nehmen, und zu dieser addiren.

15g) **Zus.** Da eine Größe **verneint** nehmen, nichts anders heist, als sie in das entgegengesetzte verwandeln, so wird umgekehrt eine Größe **positiv** nehmen, so viel bedeuten, als sie nicht in das entgegengesetzte verwandeln, sondern sie nehmen, wie sie ist, sie bejaht lassen, wenn sie bejaht ist, und verneint lassen, wenn sie verneint ist. Soll demnach z. E. — 4 mit + 2 multiplicirt werden, so soll man die — 4 zweymahl würklich so nehmen, wie sie ist, und das Produkt kann also nichts anders als — 8 seyn. Soll ich aber — 4 mit — 2 multipliciren, so soll ich die — 4 zweymahl verneinen, d. h. in das Entgegengesetzte verwandeln, also wird das Produkt jetzt = + 8 seyn müssen, denn dies enthält zweymahl das Entgegengesetzte von — 4. Soll + 4 mit — 2 multiplicirt, also zweymahl verneint oder entgegengesetzt genommen werden, so kann nichts anders, als — 8 herauskommen.

men. Endlich ist klar, daß + 4 mit + 2 multiplicirt, + 8 geben muß.

15h) Zus. Hieraus folgt denn, daß wenn beyde Factoren einerley Zeichen haben, das Produkt allemal positiv, wenn sie aberverschiedene Zeichen haben, dasselbe negativ seyn müsse, welches sich in der Kürze so übersehen läßt.

$+4.+2=+8$	$+a.+b=+ab$
$-4.-2=+8$	$-a.-b=+ab$
$+4.-2=-8$	$+a.-b=-ab$
$-4.+2=-8$	$-a.+b=-ab$

15i) Zus. Also wäre umgekehrt für die Regeln der Division

$$+8:+2=+4$$
$$+8:-2=-4$$
$$-8:-2=+4$$
$$-8:+2=-4$$

d. h. wenn Dividendus und Divisor einerley Zeichen haben, so ist der Quotient bejaht. Haben sie verschiedene Zeichen, so ist er verneint.

Aufgabe.

16. Einerley Größe mit einerley und verschiedenen Zeichen zu addiren.

Auflösung.

1. Wenn sie einerley Zeichen haben, so zählet sie wie in der Rechenkunst zusammen.

2. Sind aber die Zeichen verschieden, so ziehet von der größeren die kleinere ab, und setzet zu dem was überbleibet, das Zeichen der größeren. (§. 15b)

Exempel.

$$\begin{array}{r} a+2b-3c-5d \\ 3a-2b+6c+2d \\ \hline 4a \quad +3c-3d \end{array}$$

Anmerkung.

17. **Einerley** Grössen nennt hier Wolf solche, welche einerley Buchstaben oder Benennungen haben, z. E. a und 3a; 3c und 6c. Nur solche können unmittelbar in eine kürzere Summe zusammengezogen werden nach (§. 15 c). (M.)

Anmerkung.

18. Damit euch die Rechnung mit Buchstaben deutlicher wird, so bildet euch ein, a bedeute 1 rthlr. b 1 gl. c 1 pf.

$7a - 9b + 5c$	7 thl. — 9 gl. + 5 pf.
$3a + 5b - 9c$	3 thl. + 5 gl. — 9 pf.
$10a - 4b - 4c$	10 thl. — 4 gl. — 4 pf.

Aufgabe.

19. **Größen wie in (§. 16.) mit einerley oder verschiedenen Zeichen, von einander zu subtrahiren.**

Auflösung.

1. Man verwandele die Theile der **abzuziehenden** Größen B in die entgegengesetzten Zeichen, und
2. addire sie alsdann mit diesen entgegengesetzten Zeichen zu den Theilen derjenigen Größe A, von der der Abzug geschehen soll, so hat man den Rest C nach (§. 15 f.).

Exempel.

$8a - 5c + 9d$	8 thl. — 5 gl. + 9 pf. = A
$6a - 8c - 7d$	6 thl. — 8 gl. — 7 gf. = B
$2a + 3c + 16d$	2 thl. + 3 gl. + 16 pf. = C

$9b + 15c - 7d + 8e - f$	= A
$6b + 20c - 9d - 9e + 7f$	= B
$3b - 5c + 2d + 17e - 8f$	= C

Aufgabe.

20. **Größen mit einerley und verschiedenen Zeichen durch einander zu multipliciren.**

Auf-

Auflösung.

Verrichtet die Multiplication, wie in Zahlen (§. 49. Arithm.): nur merket, daß einerley Zeichen im Produkte +, verschiedene aber — geben. (§. 15 h).

Exempel.

a + b — d; 10 = 8 + 4 — 2
a — b — d; 2 = 8 — 4 — 2

— ad — bd + dd — 16 — 8 + 4
— ab — bb + bd — 32 — 16 + 8
aa + ab — ad 64 + 32 — 16

aa — bb — 2ad + dd; 20 = 68 — 48

Zusatz.

21. Wenn in einem Buchstabenausdrucke Zahlfactores vorkommen, so multipliciret man diese auch mit, wie beystehendes Exempel ausweiset.

3a + 8b — 3c
a — 5b + 2c

+ 6ac + 16bc — 6cc
— 15ab — 40bb + 15bc
3aa + 8ab — 3ac

3aa — 7ab — 40bb + 3ac + 31bc — 6cc.

Die Zahlfactores in Ausdrücken wie 8b; 3c; heist auch Zahlcoefficienten. (M.)

Aufgabe.

22. Größen mit einerley und verschiedenen Zeichen durch einander zu dividiren.

Auflösung.

Wenn eine gegebene Größe durch die andere sich würklich dividiren lässet; so verfahret wie in Zahlen (§. 51. Arithm.), nur daß ihr die Regel von Veränderung der Zeichen wohl in Acht nehmet (§. 151).

Kann aber die Division nicht würklich geschehen; so bleibet es bey dem, was oben (§. 12. et seqq.) gesaget worden.

Exempel.

$$
\begin{array}{l|l}
a-b-d)\ aa-bb-2ad+dd & (a+b-d \\
\quad aa+ab-ad & \\
\hline
\quad +ab-bb-ad+dd & \\
\quad +ab-bb+bd & \\
\hline
\quad +bd-ad+dd & \\
\quad -ad+bd+dd & \\
\hline
\quad 0 &
\end{array}
$$

Anmerkung.

23. Weil die Buchstaben nicht wie die Zahlen eine Bedeutung von der Stelle haben, in welcher sie stehen, so dürfet ihr euch hier an keine Ordnung binden, sondern möget den Quotienten suchen, in welchem Gliede ihr ihn findet: welches auch in den Subtrahiren des Produkts aus dem Divisor in den Quotienten statt findet.

23 a) Mehrere Beyspiele der Division, und die weitere Erläuterung, müssen dem mündlichen Unterrichte vorbehalten seyn.

Erklärung.

24. **Wenn man eine Größe durch sich selbst multipliciret;** so heißet das **Produkt, welches herauskommet,** die andere Potenz oder Dignität derselben Größe. **Multipliciret ihr die andere** Dignität **noch einmal durch die erste; so kommt** die dritte Potenz oder Dignität **heraus. Multipliciret ihr ferner die dritte durch die erste; so kommt** die vierte Potenz oder Dignität **heraus. Multipliciret ihr die vierte durch die erste; so kommet** die fünfte Potenz oder Dignität **heraus,** u. s. w. Die erste Stammgröße, so die erste Dignität genennet wird, heisset auch die Wurzel

in

in Ansehung der anderen, dritten, vierten, fünften ꝛc. Dignität.

Willkührlicher Satz.

25. Den Grad der Potenz oder Dignität einer Größe deutet durch eine kleine Ziffer, oder, wenn er nicht determiniret ist, durch einen kleinen Buchstaben an, den ihr oben zur Rechten an denjenigen Buchstaben setzet, wodurch die Größe benennet wird. Z. E. die andere, dritte, vierte ꝛc. Dignität von x ist x^2, x^3, x^4, ꝛc. x^m. Diese Zahlen aber werden die Exponenten der Dignität genennet.

Zusatz.

26. Dannenhero wenn ihr eine Dignität durch eine andere von eben der Wurzel multipliciren sollet; so dürfet ihr nur ihre Exponenten zusammen addiren.

Exempel.

x^3	y^m	x^m	x^n
x^4	y^n	x^r	x^n
x^7	y^{m+n}	x^{m+r}	x^{2n}

Zusatz.

27. Hingegen wenn ihr die Dignität einer Größe durch eine andere Dignität derselben dividiren sollet; so dürfet ihr nur ihre Exponenten von einander subtrahiren.

Exempel.

x^7	y^7	y^{m+n}	x^m
x^4	y^3	y^n	x^n
x^3	y^4	y^m	x^{m-n}

27a) Nemlich vom Exponenten des Dividendus, muß man abziehen den Exponenten des Divisors, so hat man den des Quotienten.

27 b) Für $m = n$, ist

$$\frac{x^m}{x^m} = x^{m-m} = x^0;$$

Aber

$$\frac{x^m}{x^m} = 1 \text{ also auch } x^0 = 1.$$

27 c) Wäre ferner $n > m$ Z. E. $n = 5$; $m = 2$; so hätte man

$$\frac{x^2}{x^5} = x^{2-5}$$

(nach der Regel (§. 27 a))

$$= x^{-3}. \text{ Aber auch } \frac{x^2}{x^5} = \frac{1}{x^3};$$

also sind die Ausdrücke

x^{-3} und $\frac{1}{x^3}$ und so überhaupt

$\frac{1}{x^\mu}$ und $x^{-\mu}$ gleichbedeutend.

Zusatz.

28. Endlich wenn ihr die Dignität einer Größe zu einer andern Dignität erheben sollet; so dürfet ihr nur ihren Exponenten durch den Exponenten der andern multipliciren. Z. E. ihr sollet x^3 zu der vierten Dignität erheben: so multipliciret 3 durch 4, und nehmet x^{12} für die gesuchte Dignität an.

Anmerkung.

29. Die Ursache ist leicht zu errathen. Denn ihr sollet den Exponenten 3 viermal zu sich selbst addiren (§. 27.) Dieses aber geschiehet, wenn ihr ihn durch 4 multipliciret (§. 13. Arithm.)

Zusatz.

30. Folgends, wenn ihr aus einer gegebenen Dignität eine verlangte Wurzel ziehen sollet, das ist, diejenige Grösse finden, welche zu einer gewissen Dignität erho-

erhoben worden (§. 74. 75. Arithm. und §. 25. Algebr.); so dürfet ihr nur ihren Exponenten durch den Exponenten der Wurzel dividiren. Z. E. die Wurzel der vierten Dignität aus x^{12} ist x^3; die Wurzel m aus x^n ist $x^{n:m}$.

Anmerkung.

31. Merket wohl diese Art die Wurzel zu zeichnen; denn ihr werdet ins künftige grossen Vortheil davon haben.

Willkührlicher Satz.

32. **Wenn ihr die Wurzel aus einer Grösse ziehen sollet, so setzet folgendes Wurzelzeichen vor sie, und über dasselbige den gehörigen Exponenten der Wurzel; in der Quadratwurzel aber könnet ihr den Exponenten weglassen.**

Also schreibet ihr die Cubikwurzel von x, $\sqrt[3]{x}$: hingegen die Wurzel der fünften Dignität von x schreibet ihr $\sqrt[5]{x}$.

Zusatz.

33. Weil $\sqrt{x} = x^{1:2}$, $\sqrt[3]{x^2} = x^{2:3}$, $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ (§. 30.); so könnet ihr jederzeit eine Formel in die Stelle der andern setzen, nachdem ihr von dieser oder jener einen Vortheil haben könnet.

Erklärung.

34. **Dergleichen Grösßen, daraus die verlangte Wurzel nicht genau gezogen werden kann, werden Irrational-Grössen, oder wenn es Zahlen sind, Irrational-Zahlen genennet.**

Dergleichen sind $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[5]{6}$. (§. 80 a).

Erklärung.

34 a) I. Von einer verneinten Größe sind alle Potenzen' eines geraden Exponenten bejaht, und alle Potenzen verneint, deren

deren Exponenten ungerade sind. Z. E. von — 3 ist das Quadrat oder

die zweyte Potenz $= -3 \cdot -3 = +9$
die dritte — $= +9 \cdot -3 = -27$
die vierte — $= -27 \cdot -3 = +81$
u. s. w.

Also ist die Quadratwurzel von + 9 sowohl + 3 als auch — 3, welches man auch so ausdrückt: $\sqrt{9} = \pm 3$ und so überhaupt $\sqrt{+a^2} = \pm a$.

II. Aber aus einer verneinten Größe z. E. aus — 9 wäre die Quadratwurzel etwas **unmögliches**, weil sie weder bejaht noch verneint seyn kann. Solche Wurzeln heist man **unmögliche Größen** (imaginariae). Der Ausdruck $\sqrt{-f}$ wäre also eine solche unmögliche Größe.

III. Alle Wurzeln eines **geraden** Exponenten aus einer **negativen** Größe sind auf diese Art unmöglich, weil sie weder bejaht noch verneint seyn können, denn so wohl von einer verneinten als bejahten Grösse, sind die Potenzen eines geraden Exponenten bejaht. Also kann z. E. $\sqrt[4]{-81}$ weder + 3 — noch — 3 seyn, weil so wohl von + 3 als — 3 die vierte Potenz $= +81$ ist. Demnach wäre $\sqrt[4]{-81}$ ebenfalls eine unmögliche Größe, so wie überhaupt $\sqrt[2n]{-a}$.

IV. Hingegen wenn der Wurzelexponent eine ungerade Zahl ist, so ist die Wurzel **bejaht**, wenn die Grösse woraus sie gezogen werden soll, bejaht ist, **verneint** aber, wenn diese verneint ist. Z. E. $\sqrt[3]{+27}$ kann nur $= +3$ seyn, und $\sqrt[3]{-27}$ nur $= -3$. Hier wäre also $\sqrt[3]{-27}$ keine unmögliche Grösse.

V. Die Wurzel eines geraden Exponenten hat allemal zwey mögliche gleiche, aber einander entgegengesetzte Werthe, wenn die Grösse, woraus sie gezogen werden soll, bejaht ist. Z. E. $\sqrt[4]{+81}$ ist sowohl + 3 als auch — 3.

Aufgabe.

35. Eine Aufgabe algebraisch aufzulösen.

Auflö-

Auflösung.

1. Unterscheidet mit Fleiß die bekannten Grössen von den unbekannten, und benennet jene mit den ersten, diese mit den letzten Buchstaben des Alphabets (§. 5.). Wenn die **Benennung** geschehen; so
2. suchet eine **Gleichung**, daß ihr nemlich eine Sache mit zweyerley Namen beleget; denn so müssen die beyden Werthe einander gleich seyn, (§. 20. Arithm.). Ihr müsset aber so viel Gleichungen finden, als ihr unbekannte Grössen habet. Wenn es nicht angehet; so ist es ein Zeichen, daß ihr die eine unbekannte Größe so groß annehmen könnet, als ihr wollet. Und pfleget man dergleichen Aufgaben **underterminirte Aufgaben** zu nennen. Es sind aber die Gleichungen entweder in der Aufgabe selbst angedeutet, oder ihr müsset sie aus ihren Umständen durch Hülfe derjenigen Lehrsätze suchen, welche von der Gleichheit handeln.
3. Wenn in den Gleichungen bekannte und unbekannte Grössen mit einander vermenget sind; so müsset ihr sie dergestalt einrichten, daß auf einer Seite lauter bekannte, auf der andern aber nur Eine unbekannte stehen bleibet: welches geschiehet, wenn ihr die Größen, welche subtrahiret sind, durch Addiren; welche addiret sind, durch Subtrahiren; welche andere multipliciren, durch Dividiren; welche andere dividiren, durch Multipliciren wegbringet, oder auch die Wurzeln zu ihren Dignitäten erhebet, oder aus den Dignitäten die gehörigen Wurzeln ausziehet: damit ihr immer eine Gleichheit erhaltet (§. 24. 25. 26. 27. Arith.)

Aufgabe.

36. Aus der gegebenen Summe zweyer Grössen und ihrem Unterscheide die Grössen selber zu finden.

Auflö-

Auflösung.

Es sey die Summe $= a$, die kleinere Grösse $= x$,
der Unterscheid $= b$, die grössere Grösse $= y$,

So ist

$x + y = a$ (§. 9. Arithm.) $y - x = b$ (§. 12. Arithm.)

$x = x$ subtr. | $x = x$ add.

$y = a - x$ | $y = b + x$

demnach

$a - x = b + x$ (§. 12. Arithm.)

x | x add.

$a = b + 2x$

$b = b$ subtr.

$a - b = 2x$

2 div.

$\frac{a - b}{2} = x$

Folgends ist die grössere

$y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + b = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b.$

Regel.

Ziehet den Unterschied der beyden Grössen (b) von der Summe (a) ab. Den Rest dividiret durch zwey; so ist der Quotient die kleine Grösse (x). Addiret den Unterscheid zu der Summa; so ist die Hälfte davon die große Grösse (y).

Z. E. es sey $a = 30$, $b = 8$; so ist $(a - b) : 2 = (30 - 8) : 2 = 22 : 2 = 11$, und $(a + b) : 2 = (30 + 8) : 2 = 38 : 2 = 19$.

Anmerkung.

37. Die hier in Worten abgefaßte Regel will weiter nichts sagen, als was die Formel $\frac{a - b}{2} = x$ im Zeichen und Buchsta-

Buchstaben ausdrückt. So kann man in ähnlichen Fällen, wenn es nöthig seyn sollte, **Formeln in Worte übertragen.** Auch ist zu merken, daß öfters in den Gleichungen, da noch Bekanntes mit Unbekannten vermengt ist, nützliche Lehrsätze enthalten sind. Z. E. aus der Gleichung $a - b = 2x$ fliest der Lehrsatz, **daß wenn man von der Summe zwoer Größen, ihren Unterschied abzieht, der Rest zweymahl so groß, als die kleinere der beyden Grössen seyn werde.**

Aufgabe.

38. **Eine Zahl zu finden, deren Hälfte, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ zusammen um 1 grösser sind, als die Zahl selbst.**

Auflösung.

Es sey die gesuchte Zahl $= x$; so ist

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 1$$

das ist

$$(12x + 8x + 6x) : 24 = \frac{26}{24}x = x + 1$$

(§. 65. Arithm.)

mult. 24

$$26x = 24x + 24$$

$24x = 24x$ subtr.

$$2x = 24$$

2 div.

$$x = 12$$

Probe:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 6 + 4 + 3 = 13.$$

Es ist demnach nicht mehr als die einige Zahl 12, welche diese Eigenschaft hat.

Aufgabe.

39. **Aus der gegebenen Summe zweyer Zahlen, und dem Produkte einer Zahl in die andere, die Zahlen selbst zu finden.**

Auflö-

Auflösung.

Es sey die Summe = a, die halbe Differenz = x
das Produkt = b;

so ist die große Zahl $\frac{1}{2}a + x$
die kleine $\frac{1}{2}a - x$ } §. 36.

Und also $\frac{1}{4}aa - xx = b$

$xx = xx$ add

$\frac{1}{4}aa = b + xx$

$b = b$ subtr.

$\frac{1}{4}aa - b = xx$

$\sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)} = x.$

Es sey a = 14, b = 48; so ist $\sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$ $= \sqrt{(49 - 48)} = 1$, folgends die grosse Zahl $\frac{1}{2}a +$ $x = 7 + 1 = 8$, und die kleine $\frac{1}{2}a - x = 7 - 1 = 6$.

Aufgabe.

40. **Aus der gegebenen Summe zweyer Grössen und der Differenz ihrer Quadrate die beiden Grössen zu finden.**

Auflösung.

Es sey die Summe = a, die halbe Differenz der Größen = y, die Differenz der Quadrate = b.

So ist die eine Grösse $\frac{1}{2}a + y$
Die andere $\frac{1}{2}a - y$
Das Quadrat der ersten $\frac{1}{2}aa + ay + yy$
Das Quadrat der andern $\frac{1}{4}aa - ay + yy$

Die Differenz $b = 2ay$

$\frac{b}{2a} = y$

folgends $b : 2a = y$.

Es sey b = 40, a = 10; so ist y = 40 : 20 = 2; folgends die eine Zahl $\frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$, die andere $\frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$.

Auf-

Aufgabe.

41. Aus der gegebenen Summe zweyer Grössen und der Summe ihrer Quadrate die beyden Grössen zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste Summe $= a$, die eine Grösse $\frac{1}{2}a + y$
die andere $= b$, die andere $\frac{1}{2}a - y$.
So ist das Quadrat der ersten $\frac{1}{4}aa + ay + yy$
der andern $\frac{1}{4}aa - ay + yy$

Die Summe $b = \frac{1}{2}aa + 2yy$

folgends $b - \frac{1}{2}aa = 2yy$

$\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}aa = yy.$

$\sqrt{(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}aa)} = y.$

Es sey $a = 10$, $b = 58$; so ist $\sqrt{(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}aa)} = \sqrt{(29 - 25)} = \sqrt{4} = 2$; folgends $\frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$ und $\frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$.

41a) Es sey $a = 12$; $b = 50$, so ist $\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2 = 25 - 36 = -9$ negativ. Demnach $y = \sqrt{-9}$ unmöglich (§. 34a) II.) folglich auch beyde Grössen $\frac{1}{2}a + y = 6 + \sqrt{-9}$, und $\frac{1}{2}a - y = 6 - \sqrt{-9}$ unmöglich, d. h. es giebt keine möglichen Grössen, deren Summe $= 12$ und Summe der Quadrate $= 50$ seyn könnte. Aber jene unmöglichen Grössen, blos als **Formeln** oder **Ausdrücke** betrachtet, werden der Aufgabe ein Gnüge leisten. Denn wenn man das Quadrat von $6 + \sqrt{-9}$ macht, so ist solches $= 36 + 12\sqrt{-9} - 9$; das Quadrat von $6 - \sqrt{-9}$ ist $36 - 12\sqrt{-9} - 9$; Also die Summe derselben $= 36 - 9 + 36 - 9 = 50$. Beyde unmögliche Grössen $6 + \sqrt{-9}$ und $6 - \sqrt{-9}$ zusammen addirt, geben $6 + 6 = 12$. Hieraus erhellet wie imaginäre Grössen einer Aufgabe ein Gnüge leisten können, wenn es gleich keine mögliche Grössen giebt, die ihr entsprechen können, wie in dem angeführten Beyspiele. Bey einer Aufgabe kann man oft nicht gleich wissen, ob die gesuchten Grössen, mög-

liche Werthe haben werden. Die Auflösung wird dies erst zeigen, und daher erhellet der Nutzen, den man in der Algebra von den Ausdrücken der unmöglichen Grössen hat. So sieht man denn überhaupt, daß obige Aufgabe allemahl unmögliche Werthe für die gesuchten Grössen geben wird, so lange $\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2$ etwas negatives ist, also $\frac{1}{4}a^2 > \frac{1}{2}b$, d. h. $a > \sqrt{2b}$ angenommen wird.

Aufgabe.

42. Aus der gegebenen Tagereise zweyer Boten, und der Zeit, da der andere dem ersten nachgehet, die Zeit zu finden, in welcher er ihn einholet.

Auflösung.

Es sey die Tagereise des ersten $= a$, des andern $= b$
die gesuchte Zeit $= x$
die gegebene Zeit $= c$

So ist die Reise des ersten in der gegebenen Zeit $= ac$, in der gesuchten $= ax$. Die Reise des anderen in der letzteren Zeit $= bx$. Da nun beyde einen gleichen Weg zurück geleget; so ist

$ac + ax = bx$
$ax = ax$ subtr.

$ac = bx - ax = (b - a)x$ $\quad b - a$ div.

$ac : (b - a) = x$.

Es sey $a = 6$, $b = 8$, $c = 4$; so ist $x = 24 : (8 - 6) = \frac{24}{2} = 12$.

Aufgabe.

43. Aus der gegebenen Tagereise eines Boten und der Zeit, da er hinweg ist, die Tagereise eines anderen Boten zu bestimmen, der ihn in einer gegebenen Zeit einholen soll.

Auf-

Auflösung.

Es sey die Tagereise des ersten = a des anderen = x

die verflossene Zeit = b
die gegebene Zeit = c

so findet man wie in der vorhergehenden Aufgabe

$$ab + ac = cx$$
$$\frac{ab}{c} + a = x$$

Es sey a = 6, b = 4, c = 12; so ist $x = \frac{24}{12} + 6 = 2 + 6 = 8$.

Aufgabe.

44. Aus der gegebenen Weite zweyer Oerter von einander, aus welchen zu gleicher Zeit zwey Boten ausreisen, und der Tagereise eines jeden, die Zeit zu bestimmen, da sie einander begegnen.

Auflösung.

Es sey die Weite = a, die gesuchte Zeit = x, die Tagereise des ersten = b,
des andern = c,

So ist der Weg des ersten in der zu bestimmenden Zeit = bx, des andern = cx; folgends, weil beyde zusammen die ganze Weite der Oerter von einander durchreisen

$$bx + cx = a$$
$$\text{das ist } (b + c)x = a$$
$$x = a : (b + c).$$

Es sey a = 120, b = 6, c = 4; so ist x = 120 : (6 + 4) = 120 : 10 = 12. Sie begegegnen also einander in dem zwölften Tage.

Aufgabe.

45. Aus dem gegebenen Werthe einer Kanne guten Weins zu bestimmen, wie viel man Wasser darunter mischen muß, damit man das Maaß um einen verlangten geringern Preis geben kann.

Auflösung.

Der höhere Preis sey = a, das Wasser = x.
der geringere = b,
das Kannenmaaß = 1.

Da nun der Preis von 1 = b, so ist der Preis von $1 + x = b + bx$ (§. 85. Arithm.), und daher, weil das Wasser x nichts gilt,

$$b + bx = a \text{ (§. 20. Arithm.)}$$
$$bx = a - b$$
$$x = (a - b) : b$$

Es sey $a = 16$, $b = 10$; so ist $x = (16 - 10) : 10 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Aufgabe.

46. Aus dem gegebenen Preise zweyer Weine von verschiedener Güte zu bestimmen, wie viel man von dem geringeren zu dem besseren giessen muß, damit man ihn für einen verlangten Preis geben kann.

Auflösung.

Es sey der Preis des guten	= a	die Grösse des schlechten	= x
des schlechten	= b	so ist sein Preiß	= bx
des vermischten	= c	die Grösse des guten	= 1 — x
das Kannenmaaß	= 1	sein Preis	= a — ax

Fol-

Folgends

$$\begin{array}{l} a - ax + bx = c \\ ax \quad = ax \\ \hline a + bx = ax + c \\ bx = bx \\ \hline a = ax - bx + c \\ c \quad = \quad c \\ \hline a - c = ax - bx = (a - b)x \\ \hline (a - c) : (a - b) = x \end{array}$$

Es sey $a = 16$, $b = 10$, $c = 12$; so ist $x = (16 - 12) : (16 - 10) = 4 : 6 = \frac{2}{3}$. Demnach werden von dem schlechten $\frac{2}{3}$ und von dem guten $\frac{1}{3}$ genommen.

Erklärung.

47. **Wenn die Wurzel einer Dignität oder Potenz aus zwey Theilen bestehet; nennet man sie eine binomische Wurzel, als** $a + b$. **Bestehet sie aus drey Theilen, als** $a + b + c$; **so heisset sie eine trinomische Wurzel. Wenn sie aus vier Theilen bestehet, eine** quadrinomische Wurzel **u. s. w. Ueberhaupt aber nennet man sie eine** polynomische Wurzel, **wenn sie aus mehr als zwey Theilen bestehet.**

Erklärung.

47 a) Wenn so viel Grössen a, b, c, d, e, ... als man will, vorgegeben sind, und man verbindet jede einzelne, mit jeder der andern, so erhält man alle **Paare** oder **Amben**, die sich aus diesen Grössen formiren lassen, z. E. ab; ac; ad; bc; u. s. w.

Verbindet man je drey und drey jener Grössen, z. E. abc; abd; bcd; u. s. w. so heissen diese Verbindungen **Ternen**, und so jede Verbindungen von 4 Grössen **Quaternen** u. s. w. Die Verbindungen selbst werden auch **Combinationen** genannt, die Amben **Combinationen nach 2**; die Ternen **Combinationen nach 3** u. s. w.

Aufgabe.

47 b) **Wenn n Grössen a, b, c, d; e . . . vorgegeben sind, die Anzahl aller Amben zu bestimmen.**

Auflösung.

Wenn n Buchstaben sind, so macht **jeder einzelne** mit jedem der n — 1 übrigen zusammen n — 1 Amben, also machen n **Buchstaben** in allem n (n — 1) Amben.

Ex. Wäre n = 3, so läßt sich allemahl jeder Buchstabe a, b, c, mit 2 der andern verbinden, und so erhält man folgende Amben.

a mit b und c geben Amben ab; ac;
b — a und c — — ba; bc;
c — a und b — — ca; cb;

Also zusammen 6 = 3 . 2. Amben, und so überhaupt für n Buchstaben n . (n — 1) Amben.

Zus. Wollte man Amben wie ab, ba; die einerley Buchstaben enthalten, für **gleichgültige** Amben nehmen, so sieht man leicht, daß weil in jeder einzelnen Ambe, jeder Buchstabe zwo Stellen haben kann, man obige Zahl von Amben nur noch mit 2 dividiren dürfe, um die Menge aller **eigentlich verschiedenen** Amben ab; bc; ac; zu erhalten. Also ist die Anzahl aller eigentlich verschiedenen Amben, die sich aus n Grössen formiren lassen

$$= \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}$$

Aufgabe.

47 c) **Unter den Bedingungen, (§. 47 b) die Anzahl aller eigentlich verschiedenen Ternen zu bestimmen.**

Auflösung.

Jeder einzelne von den n Buchstaben läßt sich allemahl mit allen Amben, die sich aus den übrigen n — 1 Buchstaben formiren lassen, zu Ternen verbinden. Also erhält man n mahl so viel Ternen, als sich aus n — 1 Buchstaben Amben machen lassen. Aber die Anzahl aller verschiedenen Amben aus n — 1 Buchstaben ist

= n (n

$$= \frac{(n-1)\,.\,(n-2)}{1\,.\,2}\,.$$

Also die Anzahl aller Ternen

$$= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2}\,.$$

Unter diesen Ternen sollen aber diejenigen, welche einerley Buchstaben enthalten, wegfallen. Da nun jeder Buchstabe in einer Terne 3 Stellen, nemlich vorne, mitten, und hinten haben kann, so sieht man leicht, daß obige Zahl von Ternen noch mit 3 dividirt werden müsse, um die Anzahl

$$= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

aller eigentlich verschiedenen Ternen zu erhalten.

Ex. Für $n = 4$

Grössen	a	b	c	d
Amben	bc, bd, cd	ac, ad, cd	ab, ad, bd	ab, ac, bc
Ternen	abc	acb	abc	abd
	abd	adb	adc	acd
	acd	cdb	bdc	bcd

In der ersten Horizontalspalte stehen die 4 Grössen. In der zweyten die Amben, die sich allemahl aus jeden 3 der übrigen Grössen machen lassen, wenn man diejenige allemal weggerechnet, welche in jeder einzeln Verticalspalte oben an stehet. In der dritten stehen die Ternen, aus der Verbindung jedes oben stehenden Buchstabens, mit den unter ihm befindlichen Amben. Unter diesen Ternen finden sich allemahl 3, welche einerley Buchstaben enthalten. Nimmt man also nur die eigentlich verschiedenen Ternen, so erhält man abc; abd; acd; cdb; und ihre Anzahl ist

$$= \frac{4\,.\,3\,.\,2}{1\,.\,2\,.\,3} = 4.$$

Zus. So kann man diese Schlüsse fortsetzen, und findet die Anzahl aller verschiedenen Quaternen, die sich aus n Grössen formiren lassen

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

aller Quinternen

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

u. s. w.

Aufgabe.

47 d) **Wenn man n Factores von der Form $x + a$; $x + b$; $x + c$; u. s. w. in einander multipliciret, das Gesetz der herauskommenden Produkte zu finden.**

Auflösung.

Zwey Factores $x + a$; $x + b$ geben zum Produkt

$$x^2 + ax + ab.$$
$$+ bx$$

Drey Factores geben nach gehöriger Rechnung das Produkt

$$x^3 + ax^2 + abx + abc$$
$$+ bx^2 + acx$$
$$+ cx^2 + bcx$$

Wenn man diese Multiplicationen weiter fortsetzt, so wird man finden, daß 1) jedes solches Produkt sich allemahl mit einer Potenz von x anfängt, deren Exponent der Anzahl aller in einander multiplicirten Factoren gleich ist, und nun folgen der Ordnung nach alle niedrigere Potenzen von x, bis auf das letzte Glied, welches gar kein x mehr enthält. 2) Ist der Coefficient der höchsten Potenz von x allemahl $= 1$. Der zweyte Coefficient in die nächstfolgende Potenz von x besteht aus der Summe aller Grössen $a + b + c + d \ldots$; der dritte Coefficient $ab + ac + bc \ldots$ aus der Summe aller Amben, die sich aus den Grössen a, b, c, . . . formiren lassen. Der vierte Coefficient aus der Summe aller Ternen; der fünfte aus der Summe aller Quaternen, und dies geht fort bis auf das letzte Glied, welches aus dem Produkte aller Grössen $abc \ldots$ selbst besteht.

Zus. Wenn alle Factores einander gleich sind, also $a = b = c = d$ u. s. w. so erhält man eine Potenz von $x + a$. Z. E. in obigem Beyspiele, das Quadrat von $x + a$, den Cubus von $x + a$.

Jede Summe wie $a + b + c + d \ldots$ verwandelt sich dann in $a + a + a \ldots$ d. h. bey der nten Potenz von $x + a$ in $n \cdot a$.

Jede Ambe verwandelt sich in a^2, jede Terne in a^3, jede Quaterne in a^4 u. s. w.

Daher wird

$$(x + a)^n = x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot a} a^2 x^{n-2}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{n-3} \ldots$$

weil jede Ambe wie a^2, jede Terne wie a^3 u. s. w. so oft vorkommen wird, als sich aus n Grössen wie a, b, c, ... Amben, Ternen u. s. w. formiren lassen. Z. E. für $n = 3$ würde

$$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3.$$

Wenn n eine ganze bejahte Zahl ist, so wird obige allgemeine Reihe allemal abbrechen, und ihr letztes Glied wird seyn a^n.

Zus. Diesen Satz, eine zweytheiligte Grösse $x - a$ (§. 47.) auf jede beliebige Potenz zu erheben, nennt man den **binomischen Lehrsatz**, welcher in der ganzen Mathematik von der größten Wichtigkeit ist. Man hat mancherley Beweise für ihn, wohin insbesondere auch der schöne **Kästnerische** in dessen Analys. endlicher Grössen §. 116. zu rechnen ist. Mein Verfahren ist ein Beyspiel der **combinatorischen Analytik**, welche in den neuern Zeiten durch Hrn. Prof. **Hindenburg** in Leipzig ausserordentlich erweitert, und zu einem Grade der Vollkommenheit gebracht worden ist, daß man sie jetzt als einen eigenen Theil der Algebra zu betrachten hat. Aus Hrn. **Töpfers** Combinatorischen Analyt. Leipzig 1779 kann man so wohl die vielen hieher gehörigen Hindenburgischen Schriften, als auch das Verfahren selbst, sich mit mehrerem bekannt machen. Hrn.

Fischers Theorie der **Dimensionszeichen**, ist im wesentlichen mit der Hindenburgischen c. A. einerley, und beyde haben den Zweck, Reihen von Grössen, auf welche man durch combinatorische Operationen kömmt, durch geschickte Bezeichnungen so darzustellen, daß das Gesetz ihres Fortgangs auf das einleuchtendste in die Augen fällt.

47 e) Unter dem **allgemeinen Gliede** einer Reihe, welche nach einem gewissen Gesetze fortgeht, versteht man einen solchen Ausdruck, wodurch allgemein ein jedes Glied der Reihe bestimmt werden kann. So würde z. B. in obiger Binomialpotenz, wenn man das zweyte Glied nax^{n-1} das erste nennen wollte, das mte Glied seyn

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots m} a^m \cdot x^{n-m}$$

und dies wäre also das allgemeine Glied jener Reihe. Je nachdem man nemlich $m = 1$; $m = 2$ u. s. w. setzt, giebt dieser allgemeine Ausdruck, das erste, zweyte, und so jedes folgende besondere Glied. In vielen Fällen ist das Gesetz einer Reihe so einleuchtend, daß es ganz überflüßig ist, die Form des allgemeinen Gliedes hinzusetzen.

Erklärung.

48. **Eine Gleichung von einem höhern Grade** wird eine solche genannt, in welcher höhere Potenzen der unbekannten Grösse, als bloß die erste, vorkommen. Man kann alle Glieder einer solchen Grösse, auf die eine Seite des Gleichheitszeichens schaffen, so daß auf der andern Seite nur Null stehen bleibt, und so erhalten diese Gleichungen folgende allgemeine Formen:

$x + a = o$ Gleichung vom 1ten Grade
$x^2 + ax + b = o$ — — 2— —
$x^3 + ax^2 + bx + c = o$ — — 3— —
u. s. w.

Die Gleichungen vom 2ten Grade heissen auch **quadratische**, die vom 3ten **cubische**. Die Coefficien-

ficienten a, b, c, können nach Gefallen, bejahte und verneinte Grössen, und auch = o seyn. Kömmt in einer höhern Gleichung nur eine einzige Potenz der unbekannten Grösse vor, so heist sie eine **reine Gleichung.** So ist z. E. $x^2 + b = o$ eine reine quadratische Gleichung. $x^2 + ax + b = o$ aber eine **unreine** quadratische Gleichung (aequatio quadratica affecta). Und so in andern Fällen. (M.)

Aufgabe.

49. Eine reine quadratische Gleichung aufzulösen, oder den Werth der unbekannten Grösse x zu finden.

Auflösung.

Aus $x^2 + b = o$; folgt $x = \sqrt{} - b$. welche Wurzel bejaht oder verneint genommen werden kann, welches man so ausdrückt $x = \pm\sqrt{} - b$.

Zusatz.

Die unbekannte Grösse hat also zwey einander gleiche entgegengesetzte Werthe.

Zusatz.

Wenn b bejaht ist, also — b verneint, so sind beyde Wurzeln unmöglich (§. 34 a. II.) Ist aber b verneint, also — b bejaht, so sind beyde Wurzeln möglich. (M.)

Aufgabe.

50. Eine unreine quadratische Gleichung aufzulösen.

Auflösung.

1. Ihr allgemeiner Ausdruck ist:

$$x^2 + ax + b = o \text{ (§. 48).}$$

Das x^2 hat keinen Coefficienten, als 1, denn wenn es auch einen hätte, so ließe sich solcher doch durch die Division wegschaffen. Z. E. wenn $2x^2 + 5x - 8 = o$

wäre,

wäre, so könnte man durchaus mit a dividiren, und erhielte

$$x^2 + \tfrac{5}{2}x - 4 = 0$$

wo denn

$$a = +\tfrac{5}{2} \text{ und } b = -4$$

wäre.

2. Wenn man von $x + \frac{1}{2}a$ das Quadrat macht, so erhält man

$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2.$$

3. Man addire also auf beyden Seiten obiger Gleichung $\frac{1}{4}a^2$ hinzu, so ist

$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 + b = \tfrac{1}{4}a^2$$

demnach

$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - b$$

oder (2);

$$(x + \tfrac{1}{2}a)^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - b$$

demnach

$$x + \tfrac{1}{2}a = \pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b)}$$

oder

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b)}$$

d. h. die unbekannte Grösse x hat auch in der unreinen quadratischen Gleichung zwey **Werthe** oder **Wurzeln**. Der eine Werth ist

$$x = -\tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b)}$$

der andere

$$x = -\tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b)}$$

welche beyde möglich oder unmöglich ausfallen, je nachdem $\frac{1}{4}a^2 - b$ eine bejahte oder verneinte Grösse ist. (M)

Anmerkung.

51. I. Einen quadratischen Ausdruck von der Form $x^2 + ax + b$ kann man allemal ansehen, als sey er entstan-

den

den durch die Multiplication zweyer einfacher Factoren von der Form $x - \alpha$ und $x - \beta$. Denn wenn man $x - \alpha$ mit $x - \beta$ multipliciret, so erhält man den quadratischen Ausdruck

$$x^2 \left.\begin{matrix} - \alpha \\ - \beta \end{matrix}\right\} x + \alpha\beta.$$

Soll dieser mit $x^2 + ax + b$ einerley seyn, so muß $-(\alpha + \beta) = a$; und $\alpha . \beta = b$ seyn, d. h. α und β müssen so groß angenommen werden, daß die Summe der beyden Grössen $\alpha + \beta$ mit dem entgegengesetzten Zeichen genommen, dem Coefficienten a gleich ist, das Produkt $+\alpha\beta$ aus $-\alpha$ in $-\beta$ aber der Grösse $+b$ gleich ist.

II. Diese Grössen α und β können keine anderen seyn, als die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 + ax + b = o.$$

Denn wenn $(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 + ax + b = o$ seyn soll, so muß entweder $x - \alpha = o$; oder $x - \beta = o$ seyn, weil, wenn ein Produkt $= o$ seyn soll, einer von beyden Factoren desselben $= o$ seyn muß. Setzt man $x - \alpha = o$ so wird $\alpha = x$ d. h. α ist gleich einer von den beyden Wurzeln x der quadratischen Gleichung $x^2 + ax + b = o$. Nun kann aber auch eben so gut $x - \beta = o$ also $\beta = x$ d. h. $\beta =$ einer der andern Wurzeln der erwähnten quadratischen Gleichung seyn. Da nun die quadratische Gleichung

$$x^2 + ax + b = o$$

nur zwey Werthe oder Wurzeln hat, so lassen sich auch nur zwey verschiedene einfache Factoren $x - \alpha$ und $x - \beta$ gedenken, welche in einander multiplicirt, den quadratischen Ausdruck $x^2 + ax + b$ geben können, und die Größen α und β in diesen beyden Factoren sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 + ax + b = o$. nemlich

$$\alpha = -\tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b)}$$

(§. 50.)

$$\beta = -\tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b)}$$

Demnach sind

$$x - \alpha = x + \tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b)}$$

und

$$x - \beta = x + \tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b)}$$

die

die beyden einfachen Factoren des quadratischen Ausdrucks

$$x^2 + ax + b,$$

wie man auch finden wird, wenn man diese beyden Factores in einander multipliciret.

III. Hieraus folgt nun weiter, wenn α und β die beyden Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ sind, so sind $x - \alpha$ und $x - \beta$ die beyden einfachen Factoren des quadratischen Ausdrucks $x^2 + ax + b$ linker Hand des Gleichheitszeichens, und der Coefficient a besteht aus der Summe, der den Wurzeln α und β entgegengesetzten Grössen, und der Coefficient b (wenn man die Grösse b so nennen wollte) aus dem Produkte dieser den Wurzeln entgegengesetzten Grössen, nemlich $a = -\alpha - \beta$ (I) und

$$b = -\alpha . -\beta = +\alpha . \beta \text{ (I)}.$$

IV. Man kann auf eine ähnliche Art erweisen, daß ein kubischer Ausdruck wie

$$x^3 + a x^2 + b x + c$$

als aus der Multiplication dreyer einfacher Factoren $x - \alpha$, $x - \beta$; $x - \gamma$; entstanden betrachtet werden kann, weil $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ den kubischen Ausdruck

$$x^3 \left\{ \begin{array}{l} -\alpha \\ -\beta \\ -\gamma \end{array} \right| x^2 \left| \begin{array}{l} +\alpha\beta \\ +\alpha\gamma \\ +\beta\gamma \end{array} \right\} x - \alpha\beta\gamma$$

giebt, wo denn nur

$$\begin{array}{l} -\alpha - \beta - \gamma = a \\ +\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta = b \\ -\quad \alpha\beta\gamma = c \end{array} \quad \odot)$$

gesetzt werden darf. Verwandelt sich nun jener kubische Ausdruck

$$x^3 + a x^2 + b x + c$$

in eine kubische Gleichung, d. h. setzt man

$$x^3 + a x^2 + b x + c = 0,$$

so muß diese kubische Gleichung drey Werthe für x oder drey Wurzeln haben, weil der Ausdruck linker Hand der Null, als aus der Multiplication dreyer einfacher Factoren $x - \alpha$; $x - \beta$; $x - \gamma$ anzusehen ist, und dieser Ausdruck dreymahl $= 0$ werden kann, einmahl für $x - \alpha = 0$, also für $x = \alpha$;

dann

dann für $x = \beta = 0$; also für $x = \beta$, und endlich für $x - \gamma = 0$; also für $x = \gamma$. Aber es hält sehr schwer, diese Werthe von α, β, γ, also die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

aus den obigen drey Gleichungen (⊙) aus den Coefficienten a, b, c, allgemein zu bestimmen. Hier gnügt es zu wissen, daß jede kubische Gleichung nothwendig 3 Wurzeln haben muß, so wie die quadratische deren zwo hat.

V. Wenn nun α, β, γ diese Wurzeln sind, so besteht der erste Coefficient a der kubischen Gleichung aus der Summe der entgegengesetzten Werthe dieser Wurzeln (⊙); der zweyte Coefficient b, aus der Summe aller Amben, die sich durch die Multiplication von je zwey und zwey jener Werthe machen lassen. Der dritte Coefficient c, aus der Summe aller Ternen, und so kann man allgemein erweisen, daß eine Gleichung vom Grade m also

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} \ldots + q = 0$$

erstlich m Wurzeln hat, und wenn nun diese der Ordnung nach α, β, γ, δ . . . heisen, daß der erste Coefficient a aus der Summe aller den Wurzeln entgegengesetzten Grössen bestehe, der zweyte Coefficient b aus der Summe aller ihrer Amben, der dritte c aus der Summe aller Ternen u. s. w. Aber einen vollkommnen Beweiß von diesen in der ganzen Algebra höchst wichtigen Sätzen zu geben, würde die Gränzen der gegenwärtigen Anfangsgründe überschreiten. Man s. hierüber Herrn Hofrath **Kästners** Anfangsgründe d. Anal. endlicher Grössen §. 214. u. f. woselbst denn §. 319. auch gezeigt wird, die Wurzeln höherer Gleichungen durch Näherung zu finden. Eine allgemeine für die Ausübung brauchbare Methode, die Wurzeln höherer Gleichungen durch Formeln auszudrücken, wie §. 50. bey der quadratischen geschehen ist, ist aber bis jetzt noch nicht entdeckt. Da die höhern Gleichungen selten vorkommen, so wird dies zur Entschuldigung dienen, daß ich von der Auflösung derselben nichts weiter mehr beybringe, und selbst dasjenige weglasse, was Wolf am Ende dieser Algebra davon beygebracht hat, da es doch höchst unvollständig ist, und wegen Ermangelung vieler anderer Sätze auch gar nicht gründlich vorgetragen werden konnte. So habe ich auch mehrere andere Dinge weggelassen, die mir von keiner besondern Wichtigkeit schienen. (M.)

Auf-

Aufgabe.

52. Aus dem gegebenen Produkte zweyer Grössen und ihrem Unterschiede die Grössen selbst zu finden.

Auflösung.

Es sey das Produkt $= \alpha$ die Differenz $= \beta$, so hat man, wenn x die grössere und y die kleinere der beyden gesuchten Grössen bedeutet, folgende zwo Gleichungen

$$xy = \alpha$$
$$x - y = \beta$$

Aus der ersten ist

$$y = \frac{\alpha}{x};$$

und aus der zweyten

$$y = x - \beta;$$

also

$$\frac{\alpha}{x} = x - \beta$$

oder

$$\alpha = x^2 - \beta x$$

oder

$$x^2 - \beta x - \alpha = 0$$

Vergleicht man diese quadratische Gleichung mit der obigen (§. 50), so ist das dortige a hier $= -\beta$ und $b = -\alpha$; diese Werthe in (§. 50. 3) substituirt, geben

$$x = \tfrac{1}{2}\beta + \sqrt{(\tfrac{1}{4}\beta^2 + \alpha)}$$

oder auch

$$x = \tfrac{1}{2}\beta - \sqrt{(\tfrac{1}{4}\beta^2 + \alpha)}$$

Beyde Werthe von x thun der Aufgabe ein Gnüge. Weil nun $y = x - \beta$, so ist klar, daß es auch für y zwey Werthe giebt, und sich jeder einzelne, allemahl aus dem für x angenommen ergiebt.

Exem-

Exempel.

Es sey $\alpha = 40$; $\beta = 3$, so ist x entweder
$= \frac{3}{2} + \sqrt{(40 + \frac{9}{4})}$ oder $= \frac{3}{2} - \sqrt{(40 + \frac{9}{4})}$
das heißt:
$= \frac{3}{2} + \frac{13}{2}$ oder $= \frac{3}{2} - \frac{13}{2}$
d. h. entweder
$x = +8$ oder $= -5$.
Nimmt man $x = +8$ so ist
$y = x - \beta = +8 - 3 = +5$.
Nimmt man aber $x = -5$, so ist
$y = x - \beta = -5 - 3 = -8$.

Probe.

Für $x = +8$ und $y = +5$ ist nemlich $x\,y = 40$
$x - y = 3$
Für $x = -5$ u. $y = -8$ ist auch
$x\,y = 40$
$x - y = 3$
Also giebt es zwey Werthe von x und y, welche der Aufgabe ein Gnüge leisten, und die Fruge verstattet also zwey Antworten. (M.)

Aufgabe.

53. Die Differenz zweyer Quadrate zu finden, deren Wurzeln um 1 unterschieden sind.

Auflösung.

Es sey die eine Wurzel n, die andere $n + 1$, so ist das Quadrat

der grossen	$n^2 + 2n + 1$
der kleinen	n^2
die Differenz	$= 2n + 1$

allemahl eine ungerade Zahl, und der Summe beyder Wurzeln gleich.

Bayerische Staatsbibliothek München

Aufgabe.

54. Den Unterscheid zweyer Cubikzahlen zu finden, deren Wurzeln um 1 von einander unterschieden sind.

Auflösung.

Es sey die eine Wurzel $= n$, die andere $n + 1$, so ist

die grosse Cubikzahl	$n^3 + 3n^2 + 3n + 1$
die kleine — —	n^3
der Unterscheid	$3n^2 + 3n + 1$

Das ist,

$$n^2 + 2n + 1 + 2n^2 + n = (n+1)^2 + 2n^2 + n.$$

Also ist der verlangte Unterscheid die Summe aus dem Quadrate der grossen Wurzel, und dem Quadrate der kleinen zweymal genommen, und der kleinen Wurzel. Z. E. es seyn die Wurzeln 8 und 9; so ist der Unterscheid ihrer Cubikzahlen

$$217 = 81 + 128 + 8 = 9^2 + 2.8^2 + 8.$$

Aufgabe.

55. Zu finden, wie groß in einer arithmetischen Progression, die Summe der beyden äussersten Glieder sey.

Auflösung.

Das erste Glied der Progression heise a, der Unterschied der Glieder d, so ist die Progression folgende:

$$a;\ a+d;\ a+2d;\ a+3d;\ a+4d;\ \ldots\ a+(n-1)d$$

wo $a + (n - 1)\,d$ das **allgemeine Glied**, und zwar das nte Glied dieser Reihe ist, wenn a das erste heist. Addiret man nun die beyden äussersten zusammen, so ist die Summe

$$= 2a + (n - 1)\,d.$$

Das

Das vorletzte Glied würde heisen $a + (n - 2)d$ und würde eine Differenz d weniger enthalten, als das letzte; da nun das zweyte $a + d$ eine Differenz mehr als das erste a enthält, so ist begreiflich, daß die Summe des zweyten und vorletzten Gliedes, so viel als die Summe des ersten und letzten Gliedes betragen wird, nemlich

$$a + d + a + (n - 2)d$$

ist auch

$$= 2a + (n - 1)d.$$

So würde die Summe des dritten Gliedes rechter Hand des ersten a, und des dritten linker Hand des letzten auch wieder so viel, als die Summe des ersten und letzten Gliedes geben müssen.

Kurz alle paar von Gliedern, welche von dem ersten und letzten gleich weit abstehen, geben einerley Summe; ist die Zahl der Glieder ungleich, so ist die Summe des ersten und letzten, auch doppelt so groß, als das mittlere.

Zum Exempel:

3	6	9	12	15	18	21
			12	9	6	3
			24	24	24	24 (M.)

Zusatz.

56. Derowegen bekommet ihr die Summe der ganzen Progression, wenn ihr die Summe des ersten und letzten Gliedes durch die halbe Zahl der Glieder multipliciret.

Aufgabe.

57. Aus dem ersten Gliede a, dem Unterschiede d der Glieder, und der Summe c einer arithmetischen Progression die Zahl der Glieder x und das letzte Glied y zu finden.

Auflösung.

Die Sätze (§. 55. und 56) geben folgende zwo Gleichungen:

$$a + (x - 1)\,d = y \quad (§.\ 55)$$
$$\tfrac{1}{2}\,x\,(a + y) = c \quad (§.\ 56).$$

Also $x\,(a + y) = 2c$; Setzt man hier statt y den Werth $a + (x - 1)\,d$ hinein, so wird

$$x\,(2a + xd - d) = 2c$$

folglich

$$x^2 + \frac{2a - d}{d} \cdot x - \frac{2c}{d} = 0$$

vergleicht man diese Gleichung mit der (§. 50) so ist das dortige a hier

$$= \frac{2a - d}{d};$$

und das dortige

$$b = -\frac{2c}{d};$$

Man setze der Kürze halber

$$\frac{2a - d}{d} = m \quad \text{und}$$

$$-\frac{2c}{d} = n$$

so wird

$$x = -\tfrac{1}{2}\,m \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}\,m^2 - n)}$$

von welchen beyden Werthen man hier die obere nimmt, wenn die Zahl der Glieder bejaht seyn soll.

Exempel.

Es sey

$$a = 2;\ d = 3;\ c = 57$$

so ist

$$m = \tfrac{1}{3} \text{ und } n = -38$$

Dem-

Demnach

$$x = -\tfrac{1}{6} + \sqrt{\tfrac{1}{36} + 38)}$$
$$= -\tfrac{1}{6} + \sqrt{\tfrac{1369}{36}}$$
$$= -\tfrac{1}{6} + \tfrac{37}{6} = 6$$

folglich

$$y = a + (x - 1)d = 2 + 5 \cdot 3 = 17 \text{ (M.)}$$

Aufgabe.

58. Zu finden, wie die Glieder einer geometrischen Proportion versetzt und verändert werden können, damit sie einander proportional bleiben.

Auflösung.

Versetzet sie auf alle mögliche Weise, und vergleichet ihre Summe, Unterschiede u. s. w. mit einander, so werdet ihr bald sehen, in welchen Fällen eine Proportion bleibet, ob in beyden Verhältnissen, die mit einander verglichen werden, einerley Exponent ist (§. 52. Arithm.) Es sey demnach

$$a : ma = b : mb$$

so ist alternatim

$$a : b = ma : mb$$

inverse $ma : a = mb : b$

conversim $a + ma : a = b + mb : b$

composite $a + ma : ma = b + mb : mb$

divisim $ma - a : a = mb - b : b$

$$ma - a : ma = mb - b : mb$$

Ferner: $a^2 : m^2a^2 = b^2 : m^2b^2$

oder überhaupt $a^n : m^n a^n = b^n : m^n b^n$

imgleichem $a : mac = b : mbc$

$\left\{\begin{array}{l} ac : ma = bc : mb \\ \text{wo c auch ein Bruch seyn kann.} \end{array}\right.$

$$ac : mac = b : mb$$

$$\left\{\begin{array}{l} ac : mac = bd : mbd \\ \text{wo d auch ein Bruch seyn kann.} \end{array}\right\}$$

Es sey ordinate

$$\text{und} \quad \left\{\begin{array}{l} a : ma = b : mb \\ ma : mna = mb : mnb \end{array}\right\}$$

$$\text{so ist ex aequo} \quad a : mna = b : mnb$$

Es sey perturbate

$$\text{und} \quad \left\{\begin{array}{l} a : ma = b : mb \\ ma : mna = mb : mnb \end{array}\right\}$$

$$\text{so ist ex aequo} \quad a : mna = b : mnb$$

$$\text{Auch} \quad a : mna = \frac{b}{n} : mb$$

Anmerkung.

59. Hier habet ihr ohne Mühe 18 sehr nützliche Lehrsätze gefunden, die ihr euch wohl bekannt machen müsset, wenn ihr inskünftige entweder die mathematischen Schriften zu lesen, oder auch durch eigenes Nachsinnen mathematische Wahrheiten herauszubringen gedenket. Denn die geometrische Proportion ist die Seele der mathematischen Wissenschaften. Ich halte es für unnöthig, die gefundenen Lehrsätze mit Worten auszudrucken, weil ein jeder das für sich selbst thun kann, wenn er Lust dazu hat. Z. E. der erste Lehrsatz lautet also:

Wenn vier Grössen proportional sind; so verhält sich auch die erste zu der dritten, wie die andere zu der vierten. Der 2 wird so gegeben: **Wenn ihr in einer geometrischen Proportion das erste und dritte Glied durch eine Grösse multipliciret; so bleiben auch die veränderten Grössen den vorigen proportional.**

Auf-

Aufgabe.

60. Formeln zu finden, vermittelst deren sich die verschiedenen Aufgaben, welche bey geometrischen Progressionen vorkommen können, auflösen lassen.

Auflösung.

I. Es sey das erste Glied der Progression = a, und der Exponent = e, so ist die Progression folgende:

Zahl der Glieder:

$$1; 2; 3; 4 \ldots . m - 1; m$$

Progression:

$$a; ea; e^2a; e^3a \ldots e^{m-2}a; e^{m-1}a.$$

II. Heist man nun das mte oder letzte Glied der Progression = u, so hat man $u = e^{m-1}a$, und dies ist die erste Gleichung, welche das Verhalten zwischen den 4 Grössen a, e, m, u, ausdrückt und gebraucht werden kann, wenn drey von diesen Grössen gegeben sind, allemahl die vierte zu finden.

III. Man nenne die Summe obiger Progression = s, oder

$$a + ea + e^2a + e^3a \ldots + e^{m-2}a + e^{m-1}a = s$$

so ist, wenn man auf beyden Seiten mit e multipliciret

$$ea + e^2a + e^3a \ldots + e^{m-1}a + e^m a = s.e$$

und folglich

$$ea + e^2a + e^3a \ldots + e^{m-1}a = s.e - e^m a$$

und

$$a + ea + e^2a + e^3a \ldots + e^{m-1}a = s.e - e^m a + a$$

Da nun die Reihe linker Hand des Gleichheitszeichens hier wieder diejenige ist, welche wir mit s bezeichnet haben, so hat man

$$s = s.e - e^m a + a$$

Demnach

$$\frac{e^m a - a}{e - 1} = s$$

Und so wäre dies denn eine zwote Gleichung, welche das Verhalten zwischen den Grössen e; m; a; s; ausdrückte.

IV. Weil (II) $u \cdot e = e^m a$, so ist auch

$$\frac{u \cdot e - a}{e - 1} = s$$

Diese Gleichungen (II. IV.) lösen eine Menge Aufgaben auf, welche bey den geometrischen Progressionen vorkommen können. Sie alle hieher zu setzen, verstattet der Raum nicht. Ich will sie durch einige Beyspiele erläutern. (M.)

Aufgabe.

61. Die Summe einer ohne Ende fortgehenden geometrischen Reihe von Brüchen zu finden, deren Zähler = 1, die Nenner aber Potenzen einer beliebigen ganzen Zahl y sind.

Auflösung.

In diesem Falle wäre die geometrische Reihe von Brüchen folgende:

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3} \ldots \text{u. s. w.}$$

Man sieht leicht, daß wenn y eine ganze Zahl oder sonst nur größer, als 1 ist, die Nenner dieser Brüche immer grösser und grösser, und die Brüche selbst also immer kleiner werden müssen, je weiter man diese Reihe fortsetzt; Gedenkt man sie sich bis ins Unendliche fortgesetzt, so wird das letzte Glied dieser Reihe, d. h. dasjenige, welches unendlich weit vom Anfange wegläge, unendlich klein

klein oder verschwindend seyn müssen. Man würde also in der Formel (§. 60. IV.) $u = o$ setzen dürfen, welches für diesen Fall denn

$$s = \frac{a}{e - 1}, \text{ oder } s = \frac{a}{1 - e}$$

gäbe. Nun ist aber für die obige Bruchreihe das erste Glied

$$a = \frac{1}{y}$$

und der Exponent also e auch

$$= \frac{1}{y};$$

Demnach die Summe jener unendlichen Reihe von Brüchen, oder

$$s = \frac{1}{y} : \left(1 - \frac{1}{y}\right)$$

oder

$$s = \frac{1}{y} : \frac{y-1}{y} = \frac{1}{y} \cdot \frac{y}{y-1} = \frac{y}{y-1};$$

Exempel.

Für $y = 2$, wäre die Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots = 1. \quad (M.)$$

Zusatz.

62. Für $y = 1$ wäre

$$1 + 1 + 1 + 1 \ldots = \frac{1}{0}$$

Da nun $\frac{1}{0}$ eine unendliche Grösse bezeichnet, so ist in diesem Falle die Summe der ohne Ende fortgehenden Reihe von Einern **unendlich** groß, wie auch ohnehin klar ist. (M.)

Anmerkung.

63. Daß $\frac{1}{0}$ eine unendliche Grösse bezeichnet, erhellet so:

Es sey $\frac{a}{b}$ ein beliebiger Bruch. Je kleiner man den Nenner dieses Bruchs macht, desto grösser wird der Werth desselben, wenn man a ungeändert läßt (§. 62 c Arithm.) Wenn demnach b bis auf o abnimmt, so wächst der Werth des Bruchs bis ins Unendliche. Also bezeichnet $\frac{1}{0}$ eine unendliche Grösse, wofür in der Algebra auch das Zeichen ∞ gebraucht wird. (M.)

Zusatz.

64. Wäre y negativ, so würde, weil alle geraden Potenzen von einer negativen Grösse bejaht, alle ungeraden verneint sind, obige Bruchreihe sich in

$$-\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y^3}+\frac{1}{y^4}-\ldots.$$

verwandeln, und davon wäre die Summe s jetzt

$$=\frac{1}{-y-1}=-\frac{1}{y+1}$$

folglich

$$+\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y^3}-\frac{1}{y^4}\ldots=\frac{1}{y+1}$$

Dies ist also die Summe einer geometrischen Reihe von Brüchen, deren Glieder mit abwechslenden Zeichen fortgehen.

Z. E. die Summe der unendlichen Reihe

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}\ldots.$$

wäre $=\frac{1}{3}$ (M.)

Aufgabe.

65. Aus dem ersten Gliede a, dem Exponenten e und dem letzten Gliede u einer geometrischen Progression, die Zahl m aller Glieder zu finden.

Auflö-

Auflösung.

Weil $u = e^{m-1} . a$, so ist, wenn man auf beyden Seiten Logarithmen nimmt, wegen

$$\log e^{m-1} = (m - 1) \log e$$

(§. 16. Trig.)

$$\log u = (m - 1) \log e + \log a.$$

Also

$$\frac{\log u - \log a}{\log e} + 1 = m$$

Freylich wird man hier den Werth von m in den meisten Fällen nicht ganz genau finden, weil in den Tabellen die Logarithmen der Zahlen nur bis auf eine gewisse Decimalstelle gehen. Indessen war die Absicht dieser Aufgabe nur zu zeigen, wie mit einer unbekannten Grösse in einer Gleichung zu verfahren ist, wenn sie nicht auf die gewöhnliche Weise, sondern als **Exponent einer Potenz** in derselben vorkömmt, wie für die unbekannte Grösse m der Fall war, und nun die Gleichung so verändert werden soll, daß die unbekannte Grösse bloß als Factor in ihr vorkomme, und dann auf die gewöhnliche Art auf die eine Seite des Gleichheitszeichens geschafft werden könne. Ohne den Gebrauch der Logarithmen würde die unbekannte Grösse m in gegenwärtigem Falle nicht bequem gefunden werden können. Doch setzt dieses Verfahren voraus, daß die unbekannte Grösse nur **einmahl** als Exponent vorkomme. (M.)

Aufgabe.

66. **Wenn 100 Thlr. Kapital in einem Jahre 5 Zinsen trage, zu finden, wie hoch sich ein gewisses Kapital = a, nach einer gegebenen Zahl von Jahren = n belaufen wird, wenn die jährlichen Zinsen immer wieder zum Kapitale geschlagen werden.**

Auf-

Auflösung.

Weil $100 : 5 = 20 : 1$, so betragen die jährlichen Zinsen allemahl $\frac{1}{20}$ des Kapitals, und wenn man folglich diese zum Kapitale addiret, so wird sich allemahl das Kapital am Ende eines gewissen Jahres, zu dem am Anfange des Jahres verhalten $= 1 + \frac{1}{20} : 1$ d. h. wie $\frac{21}{20} : 1$. Wenn demnach ein gewisses Kapital zu Anfange eines Jahres $= p$ ist, so ist dessen Werth zu Ende des Jahres $= \frac{21}{20} p$ durch den Zuwachs der Zinsen.

Nun sey $p = a$, so wird der Werth des Kapitals a am Ende des ersten Jahres $= \frac{21}{20} a$. Multipliciret man dieses wieder mit $\frac{21}{20}$, so kömmt $(\frac{21}{20})^2 . a$ für den Werth des Kapitals a nach Verfluß des zweyten Jahres, und so sieht man leicht, daß das Kapital a durch den Zuwachs der Zinsen, am Ende des dritten Jahres sich belaufen wird auf $(\frac{21}{20})^3 . a$, und so am Ende des nten auf $(\frac{21}{20})^n . a$, kurz, daß die Kapitalien nach einer **geometrischen Progression** wachsen, deren Exponent $= \frac{21}{20}$.

Würden die Zinsen uns zu 4 pr. Ct. gerechnet, so würde der Exponent der geometrischen Progression nur $= \frac{26}{25}$. (M.)

Zusatz.

67. Man setze den Werth des Kapitals a nach n Jahren $= A$, so hat man die Gleichung $A = (\frac{21}{20})^n . a$.

Exempel.

Wie hoch wird sich ein Kapital $a = 100$ Thl. nach $n = 100$ Jahren belaufen, wenn die Zinsen zu 5 pr. Ct. gerechnet werden. Hier wäre also

$$A = (\tfrac{21}{20})^{100} . 100.$$

Dies

Dies kann man durch Logarithmen rechnen.

log 21 = 1,3222193
log 20 = 1,3010300

0,0211893
mult. mit — — 100

2,1189300
addirt log 100 = 2,

log A = 4,1189300

wozu die Zahl A = 13151 Thl. gehört, so hoch wird also ein Kapital von 100 Thl. nach 100 Jahren angewachsen seyn. (N.)

Zusatz.

68. I. Wäre A und a gegeben, und man wollte n finden, so müßte man wie in §. 64. verfahren.

Nemlich:

$$\log A = n \log \tfrac{21}{20} + \log a.$$

Also

$$\frac{\log A - \log a}{\log 21 - \log 20} = n.$$

Zusatz.

II. Aus A und n fände sich umgekehrt

$$a = (\tfrac{20}{21})^n . A.$$

Exempel.

Wenn ein gewisses Kapital nach 10 Jahren bis auf 15000 Thl, anwachsen soll, wie groß muß es jetzt seyn.

log

log A = 4,1760913
10 log 20 = 13,0103000
17,1863913
10 log 21 = 13,2221930
log a = 3,9641983
Also a = 9208,7 Thl.

Die Zinsen die also dieses Kapital in 10 Jahren tragen würde, würden sich auf 15000 — 9208,7, oder auf 5791,3 Thlr. belaufen, wenn von den Zinsen immer wieder Zinsen genommen würden. Diesen Betrag von Zinsen nennet man das **Interusurium.**

Wenn demnach ein Kapital von 15000 Thl. erst in 10 Jahren zu bezahlen wäre, man wollte aber den Empfänger jetzt gleich bezahlen, so könnte er nur 9208,7 Thlr. verlangen, wenn man voraussetzen dürfte, daß er mit diesem Kapitale Zinsen auf Zinsen gewinnen könnte, er müßte sich also der frühern Bezahlung wegen, einen Abzug oder **Rabatt** von 5791,3 Thlr. gefallen lassen. Wegen der juristischen Streitigkeit hierüber lese man Hrn. Hofr. **Kästners** Programm de justitia calculi interusurii Leibniziani. Lipl. 1747. Wenn nicht Zinsen auf Zinsen gerechnet würden, so müßte man das Interusurium, oder den Rabatt freylich anders berechnen. Denn da würde der Werth eines Kapitals a in n Jahren nur seyn

$$B = a + \frac{n}{20} a = a \left(1 + \frac{n}{20}\right)$$

wenn die Zinsen zu 5 pr. Ct. angenommen werden, woraus denn

$$a = \frac{B}{1 + \frac{n}{20}}$$

und also das Interusurium

B — a

$$B - a = \frac{n}{n + 20} \cdot B$$

gefunden wird, welches man in diesem Falle das einfache Interusurium nennt. (M.)

Aufgabe.

69. Wenn Jemand Geld auf Zinsen zu 5 pr. Cent stehen hat, könnte aber mit den Zinsen allein nicht auskommen, sondern müßte jährlich von dem Kapitale etwas zusetzen, zu finden, wie lange er noch leben dürfte, oder wie lange es noch anstehen werde, bis er nichts mehr einzunehmen habe, vorausgesetzt, daß er in jedem Jahre gleich viel brauche.

Auflösung.

1. Das auf Zinsen stehende Kapital sey $= a$, und was die Person im ersten Jahre zusetze $= b$, so hat sie im ersten Jahre einzunehmen die Zinsen $= \frac{a}{20}$ und setzt am Ende des Jahres einen Antheil $= b$ des Kapitales zu, verzehrt mithin im ersten Jahre eine Summe

$$= \frac{a}{20} + b.$$

So viel will die Person in jedem folgenden Jahre verzehren.

2. In dem nächsten Jahre ist das Kapital nur noch $= a - b$, und die Zinsen $= \frac{a - b}{20}$; Was sie am Ende dieses Jahres wieder von dem Kapitale zusetzt, heisse x, so muß seyn

$$\frac{a - b}{20} + x = \frac{a}{20} + b \quad (1)$$

Also

Also

$$x = b + \frac{b}{20} = \frac{21}{20} b .$$

Am Ende des zweyten Jahres muß also die Person zusetzen $\frac{21}{20}$ b.

3. Am Anfange des dritten Jahres ist also das Kapital nur noch $= a - b - \frac{21}{20} b$, und dies trägt die Zinsen $\frac{1}{20} (a - b - \frac{21}{20} b)$. Wird nun am Ende dieses Jahres wiederum y zugesetzt, so hat man

$$\frac{1}{20} (a - b - \frac{21}{20} b) + y = \frac{a}{20} + b \quad (1)$$

Also

$$y = b + \frac{1}{20} b + \frac{21}{20} \cdot \frac{1}{20} b$$
$$= \frac{21}{20} b + \frac{21}{20} \cdot \frac{1}{20} b = \frac{21}{20} (1 + \frac{1}{20}) b$$

oder

$$y = (\frac{21}{20})^2 b.$$

4. Wenn also die Person im ersten Jahre b zusetzt, so muß sie im zweyten zusetzen $\frac{21}{20} b$, im dritten $(\frac{21}{20})^2 . b$, und so weiter im vierten $(\frac{21}{20})^3 b$, und also im nten Jahre $(\frac{21}{20})^{n-1} b$.

5. Soll demnach nach Verfluß von n Jahren, das ganze Kapital aufgezehrt seyn, so muß die Summe der geometrischen Progression

$$b + \frac{21}{20} b + (\frac{21}{20})^2 b + \ldots (\frac{21}{20})^{n-1} . b = a$$

seyn.

6. Um die Summe dieser geometrischen Progression zu finden, ist in der Formel (§. 60. IV.) das dortige u hier $= (\frac{21}{20})^{n-1} . b$; das dortige a hier $= b$, und e $= \frac{21}{20}$. Demnach die Summe dieser Progression

$$= \frac{(\frac{21}{20})^n b - b}{\frac{1}{20}} = 20 \, ((\frac{21}{20})^n b - b)$$

7. Also

7. Also hat man die Gleichung

$$20\,b\,((\tfrac{21}{20})^n - 1) = a$$

Mithin wenn die Anzahl Jahre $= n$ gesucht wird

$$(\tfrac{21}{20})^n = \frac{a}{20\,b} + 1 = \frac{a + 20\,b}{20\,b}$$

oder

$$n \log \tfrac{21}{20} = \log (a + 20\,b) - \log 20\,b$$

und

$$n = \frac{\log (a + 20\,b - \log 20\,b}{\log 21 - \log 20},$$

Exempel.

8. Es sey

$$a = 5000, \text{ und } b = 50,$$

so ist

$$a + 20b = 6000;\ 20b = 1000$$

also

$$\log 6000 = 3{,}7781513$$
$$\log 1000 = 3{,}$$
$$0{,}7781513$$

Ferner

$$\log 21 - \log 20 = 0{,}0211893 \text{ (§. 66.)}$$

Also

$$n = \frac{7781513}{211893} = 36\ \frac{153364}{211893};$$

oder 36 Jahre 264 Tage. Nach Verfluß dieser Zeit würde also unter den angeführten Bedingungen das ganze Kapital aufgezehrt seyn.

Diese Aufgabe gehört, in die Lehre von den **Leibrenten**, wovon man in von Florencourts Abhandl. aus der juristischen und politischen Rechenkunst u. a. Schriften weitere Ausführung findet.

Wir wollen nun den Nutzen der Algebra auch noch in einigen geometrischen Aufgaben zeigen, welche man aber erst lesen muß, nachdem man die Geometrie inne hat.

Aufgabe.

70. **Einen Circul zu finden, der so groß ist, als die Fläche eines gegebenen Cylinders.**

Auflösung.

Es sey der Diameter des Cylinders $= d$, seine Peripherie $= p$, die Höhe $= a$; so ist die Fläche $= a\,p$ (§. 134. Geom.) Es sey ferner der Diameter des Circuls $= x$; so ist $d : p = x : (p\,x : d)$. Und demnach die Peripherie des Circuls $p\,x : d$, folgends seine Fläche $p\,x^2 : 4d$ (§. 167. Geom.) Derowegen ist

$$p\,x^2 : 4d = a\,p$$

$$x^2 = 4ad$$

$$x = \sqrt{4ad} \text{ oder } \tfrac{1}{2}x = \sqrt{ad}$$

Der halbe Diameter des verlangten Circuls ist die mittlere Proportionallinie zwischen der Höhe und dem Diameter des Cylinders.

Aufgabe.

71. **Aus dem gegebenen Diameter einer Kugel und der Höhe eines Cylinders, der ihr gleich ist, den Diameter des Cylinders zu finden.**

Auflösung.

Es sey die Höhe des Cylinders $= a$, der Diameter der Kugel $= d$, ihre Peripherie $= p$, der Diameter des Cylinders $= x$; so ist der Inhalt der Kugel $= \frac{1}{6}pd^2$ (§. 208. Geom.), die Peripherie des Cylinders $p\,x : d$, sein Inhalt $a\,p\,x^2 : 4d$ (§. 197. Geom.) und demnach

$\frac{1}{2}pd$

$$\frac{\frac{1}{8}pd^2 = apx^2 : 4d}{\frac{4}{8}pd^3 = apx^2} \quad \begin{matrix} 4d \\ ap \end{matrix}$$

$$\frac{2d^3}{3a} = x^2,$$

Es ist also wie $3a : 2d = d^2 : x^2$
und $x = \sqrt{(2d^3 : 3a)}$

Aufgabe.

72. Aus dem gegebenen Diameter und der Höhe eines Kegels, den Diameter eines Cylinders zu finden, der ihm der Höhe und dem Inhalte nach gleich ist.

Auflösung.

Es sey der Diameter des Coni $= d$, die Höhe $= a$, der Diameter des Cylinders $= x$, die Verhältniß des Diameters zur Peripherie $= d : p$; so ist der Inhalt des Coni $= \frac{1}{12} adp$, die Peripherie des Cylinders $px : d$, und sein Inhalt $apx^2 : 4d$, folgends

$$\frac{\frac{1}{12}adp = apx : 4d}{\frac{1}{3}ad^2p = apx^2} \quad \begin{matrix} 4d \\ ap \end{matrix}$$

$$\frac{\frac{1}{3}d^2 = x^2}{\sqrt{\frac{1}{3}d^2} = x}$$

Suchet zwischen $\frac{1}{3}d$ und d die mittlere Proportionallinie, und beschreibet darum einen Circul; dieser ist die Grundfläche des Cylinders.

Aufgabe.

73. Aus dem gegebenen Diameter eines Kegels und seiner Höhe, den Diameter einer Kugel zu finden, die ihm gleich ist.

Auflösung.

Es sey der Diameter der Grundfläche des Kegels $= d$, seine Peripherie $= p$, die Höhe $= a$, der Diameter der Kugel $= x$; so ist der Inhalt des Kegels $= \frac{1}{12} adp$ (§. 201. Geom.), hingegen der Inhalt der Kugel $px^3 : 6d$ (§. 208. Geom.). Derowegen ist

$$\frac{\frac{1}{12} adp = 1px^3 : 6d}{\frac{1}{2} ad^2 = x^3}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2} ad^2} = x.$$

Ende der Algebra, oder der Analysis endlicher Grössen.

Anfangs-Gründe der Geometrie.*)

Erklärung.

1.

Die Geometrie ist eine Wissenschaft des Raums, den die körperlichen Dinge nach ihrer Länge, Breite und Dicke einnehmen.

Erklärung.

2. Wenn man die Länge ohne die Breite und Dicke betrachtet, so nennet man sie eine Linie; ihren Anfang und Ende aber einen Punkt, den man sich also ohne alle Theile gedenken muß.

*) Von den vielen hierher gehörigen Schriftstellern nenne ich nur folgende:

I. Ueber die Geometrie überhaupt: Die Herrn Davies, Clemin, Krebs, Funk, Mönnich, Klügel, von Segner, Karsten, Kästner, Lempe, Hildebrand.

II. Ueber die praktische Geometrie: Die Herrn Penther, Böhm, Zollmann, Marinoni, Hogreven, Lambert, Maier.

III. Ueber die Markscheidekunst: Die Herrn Maler, Stigler, Weidler und sein Uebersetzer Fuchsthaler, Kästner, von Oppel, König, von Cancrin, Beyer, Lempe.

IV. Ueber die Geometrie in Verbindung mit der Rechtsgelehrsamkeit: Die Herrn Polack, Wilke, Wiedeburg, Rheinhold.

muß, massen er sonst eine Linie wäre, und wieder seinen Anfang und Ende haben müste. Wenn sich nun ein Punkt von einem Orte gegen den andern beweget, wird eine Linie beschrieben.

Anmerkung.

3. Die Geometer haben hinlängliche Ursachen gehabt, warum sie den Punkt untheilbar annehmen, unerachtet die Einbildung so wenig, als unsere Hand mit ihren Instrumenten, einen untheilbaren Punkt formiren kann. Damit er nemlich kein Theil der Linie würde, welches in der Ausübung der Geometrie mit Sorgfalt zu vermeiden.

3 a) Wer sich z. B. Deutschland durch zwo einander durchkreuzende Linien in vier Theile getheilt, vorstellt, kann bey diesen Linien an keine **Dicke**, sondern blos an ihre **Länge** denken. Denkt man dabey an die Stelle, wo beyde Linien einander durchkreuzen, so fällt bey diesem Gedanken offenbar aller Begriff von Ausdehnung weg. In einem Fall hat man geometrische Linien, in diesem einen geometrischen Punkt.

Erklärung.

4. Die Aehnlichkeit ist die Uebereinstimmung dessen, wodurch die Dinge von einander durch den Verstand unterschieden werden.

Anmerkung.

5. Zum Exempel, ich habe zwey Sachen A und B, und betrachte eine nach der andern. Ich merke mit Fleiß auf alles, was nur in der Sache A wahrzunehmen, und zeichne es auf das genaueste auf. Gleichergestalt schreibe ich alles haarklein auf, was ich in der Sache B erkennen kann. Wenn ich nun beydes gegen einander halte, was ich aufgezeichnet habe, so finde ich, daß es einerley sey. Die Grösse wird ausgenommen, weil man einem diese nicht mit bloßen Worten begreiflich machen kann.

Zusatz.

6. Also können ähnliche Dinge nicht von einander unterschieden werden, wenn man sie nicht entweder wirklich,

lich, oder in Gedanken, vermittelst einer dritten Sache, z. E. eines Maaßstabes, zusammen bringet.

Erklärung.

7. Eine gerade Linie AB ist, deren Theil der I. ganzen ähnlich ist. Eine krumme Linie AB ist, I. deren Theile der ganzen unähnlich sind.

Anmerkung.

8. Auf dem Papiere wird eine gerade Linie mit einer Reißfeder, oder einem subtilen Stifte, nach dem Lineale gezogen, welches man auf die zwey gegebene Punkte anleget; auf dem Holze oder Steine durch einen mit Kreide oder Rötel bestrichenen Faden aufgeschlagen; auf dem Felde mit zweyen Stäben abgesteckt, die an ihren Enden aufgerichtet werden. Es kann aber mit zween Stäben der dritte in einer geraden Linie gestecket werden, wenn das Auge, so gegen den einen gerichtet wird, die andern beyde nicht siehet.

Anmerkung.

9. Man nimmt zum Maaßstabe der Linie eine gewisse Linie oder Länge an, welche man eine **Ruthe** nennet. Dieselbe theilet man, um die Beschwerlichkeit im Rechnen zu vermeiden, in 10 gleiche Theile, und nennet einen derselben einen **Schuh**, der Schuh wird in 10 **Zoll**, und der Zoll in 10 **Linien** getheilet. Weil aber der Maaßstab willkührlich ist; so kann man leicht erachten, daß nicht an allen Orten der Schuh von gleicher Grösse sey.

9a) Eben darum ist es nöthig, sich die Verschiedenheit der gebräuchlichsten Fusmaase bekannt zu machen. Dazu dient folgende

Tafel zur Vergleichung der Fusmaaße.

Aachen	1285	Berlin	1373
Amsterdam	1255	Bern	1300
Ansbach	1320	Bolwgra	$1682\frac{2}{7}$
Antwerpen	1266	Braunschweig	1265
Augsburg	$1282\frac{18}{23}$	Bremen	1282
Augsburg. Landsch.	1309	Breslau	1260
Basel	1322	Brüssel	1290
Bern	986	Calenberg	1296

Carlsruhe	1241	Lübeck	1290
Cleve	1310	Mecklenburg	1290
Cölln	1220	Nürnberg	1346¼
Dänemark	1391,3	Paris königl. Fus	1440
Danzig	1271,5	6 machen 1 Toise	
Dresden	1255	Pommern	1295
Emden	1313	Prag	1338
Erfurt	1251	Rheinländischer	1391,3
Florenzer Bauelle	2430	Riga	1215
Frankfurt am Mayn	1270	Römischer Palme	990
Giesen	1320	alter Röm. Fus	1320
Gotha	1275	Rostock	1282
Gröningen	1295	Schweden	1316,5
Halle	1320	Schweiz	1330
Hamburg	1270	Spanien	1253
Hanover	1295	Strasburg	1282¾
Holstein	1323	Stettin	1253
Königsberg	1364	Turin	1432
Leiden	1390	Ulm	1281
Leipziger Baufus	1253	Utrecht	1210
der gemeine	1251	Venedig	1540
London	1351,6	Wien	1420
gemeiner	1350	Wittenberg	1255

Anmerkung.

10. Auch ist wohl zu merken, daß nicht an allen Orten die Ruthen und Schuhe auf gleiche Art eingetheilet werden. Denn das rheinländische Maaß wird immer in 12 getheilet, da hingegen das geometrische nur 10 Theile hat.

Erklärung.

I. 2. 11. **Unter den krummen Linien ist die bekannteste, und zur Zeit die nützlichste, die Cirkullinie. Es wird aber ein Cirkul beschrieben, wenn eine gerade Linie CA sich auf der Ebene um einen festen Punkt C beweget.**

Anmerkung.

12. Auf dem Papiere wird dieses mit einem besonderen Instrumente verrichtet, welches man einen **Zirkel** nennet. Auf dem Felde und im Grossen brauchet man anstatt der Linie einen Faden oder eine Schnure, oder eine Stange: wie man dann auch besondere Stangenzirkel hat.

Erklä-

Erklärung.

13. **Der Punkt C heisset der Mittelpunkt** (Centrum), **weil alle Punkte in der Peripherie gleichweit von demselben abstehen** (§. 11.); **die Linie** CA **der** Halbmesser (Semidiameter, oder Radius); **die Linie, so von einem Punkte der Peripherie** D **bis zu dem andern** E **durch den Mittelpunkt** C **gezogen wird,** der Durchmesser (Diameter); **eine andere auf gleiche Art, aber nicht durch den Mittelpunkt gezogene Linie** F G **eine Sehne** Chorda Subtensa.) I. 2.

Anmerkung.

14. Die Peripherie eines jeden Circuls, er mag groß oder klein seyn, wird in 360 gleiche Theile oder Grade eingetheilet, weil sich diese Zahl durch viele Zahlen genau dividiren lässet, als durch 2. 3. 4. 5. 6. 8. 10. 12. und so weiter. Jeder Grad bestehet aus 60 Minuten, jede Minute aus 60 Secunden, u. s. w. Die Grade zeichnet man mit (o), wie die Ruthen, die Minuten mit (′), wie die Schuhe. Z. E. $3^{o}\ 25'\ 17''$ heisset 3 Grad, 25 Minuten, 17 Secunden. $3^{o}\ 2'\ 4''$; 3 Ruthen, 2 Schuh, 4 Zoll.

Erklärung.

15. **Wenn man zwey Linien** AB **und** AC **in einem Punkte** A **zusammensetzet, so heisset ihre Neigung gegen einander ein Winkel.** I. 3.

Anmerkung.

16. Diesen Winkel nennet man entweder mit einem Buchstaben A, oder in gewissen Fällen, um die entstehende Verwirrung mit andern Winkeln zu vermeiden, mit drey Buchstaben BAC, so daß derjenige mitten stehet welcher an der Spitze des Winkels zu finden. Seine Grösse aber pfleget man durch einen Circulbogen, der aus dem Mittelpunkte A mit beliebiger Eröffnung des Circuls beschrieben wird, zu messen. Nemlich so viel der Bogen DE Grade und Minuten hat, so viel Grade und Minuten eignet man dem Winkel A zu. Man erforschet aber ihre Anzahl durch halbe Cirkel von Messing, davon die

kleinen, die auf dem Papier gebraucht werden, Transporteurs heissen.

16a) Bey der Art, die Größe eines Winkels zu bestimmen, kommt es auf folgende Bemerkung an. Man gedenke sich die Linie AC fest und bey A gleichsam ein Gewerb, um das sich die Linie AB herumdrehen läßt. Anfänglich liege AB auf AC, so daß man noch gar keinen Winkel hat; sobald man nun AB aufwärts dreht, ergiebt sich zwischen AB und AC ein Winkel von gewisser Größe. Je länger man AB fortdreht, desto größer wird nothwendig der Winkel, und wenn man so lange zu drehen fortfährt, bis AB rings um den Punkt A herumkommt, so daß solche endlich wieder auf AC unterhalb auffällt, so hat AB einen ganzen Kreis beschrieben. Wäre die Linie AB nur bis D gekommen, daß sie also mit der AC den Winkel DAC machte, so müßte man, um ihre Lage AC, d. i. um die Größe des Winkels DAC zu bestimmen, untersuchen, um den wievielten Theil der ganzen Umdrehung oder der ganzen Kreislinie die Linie AB von AC weggekommen wäre. Wüßte man z. B. daß AB um den zehenten Theil der ganzen Umdrehung von AC sich entfernt habe, so wüßte man zugleich genau ihre Lage, folglich die Größe des Winkels A; und eben so, wenn man z. B. wüßte, daß AB um $\frac{1}{60}$tel oder $\frac{1}{90}$tel der ganzen Kreisumdrehung von AC weggekommen wäre. Es ist daher das leichteste Mittel zur Bestimmung der Größe eines Winkels, wenn man angiebt, um den wievielten Theil einer ganzen Kreislinie der eine Schenkel von dem andern entfernt ist. Um diese Bestimmung desto bequemer und in ganzen Zahlen ausdrucken zu können, ist man nun darin übereingekommen, daß man $\frac{1}{360}$tel von einer ganzen Umdrehung einen **Grad**, und nur $\frac{1}{60}$tel eines Grads eine **Minute**, $\frac{1}{60}$tel einer Minute eine **Sekunde**, $\frac{1}{60}$ einer Sekunde eine **Terzie** u. s. f. genennt hat, und nun durch Grade, Minuten, Sekunden u. s. f. angiebt, um wieviel ein Schenkel von dem andern abgedreht oder entfernt ist. Wäre also der Schenkel AB um den 7ten Theil der ganzen Umdrehung von dem AC entfernt, so druckt man dieses so aus: der Winkel A enthält $\frac{360}{7}$ Gr. oder $51\frac{3}{7}$ Gr. oder 51 Gr. $\frac{180}{7}'$ d. i. 51 Gr. $25\frac{5}{7}'$. Wollte man aber diesen Winkel bis in Sekunden ausdrucken, so erhielte man $51^\circ\ 25'\ \frac{3600}{7}''$ oder $51^\circ\ 25'\ 42\frac{6}{7}''$, da man wieder statt des Bruchs, wo es nöthig ist, Terzien beysetzt und in allen dergleichen Fällen eben so verfährt.

Erklä-

Erklärung.

17. Wenn eine Linie AB auf der andern CD dergestalt aufgerichtet stehet, daß die Winkel zu beyden Seiten einander gleich sind, so saget man, es stehe dieselbe auf CD perpendicular oder senkrecht. 1. 4.

Erklärung.

18. Der Winkel ABC, den die Perpendicular-Linie AB mit der Linie BC machet, heisset ein rechter Winkel (angulus rectus): Ein jeder kleinerer Winkel, E, ein spitziger Winkel (angulus acutus), und ein jeder grösserer, F, ein stumpfer Winkel, (angulus obtusus). 1. 4. 5. 6.

Erklärung.

19. Wenn man einen Winkel A durch eine gerade Linie BC schliesset, so entstehet ein Dreyeck oder Triangel. Man nennet es aber rechtwinklicht; wenn der eine Winkel A ein rechter ist; stumpfwinklicht, wenn der eine Winkel D ein stumpfer ist; spitzwinklicht, wenn alle drey spitzig sind, wie A, B, C. Hingegen, wenn alle drey Seiten AB, BC, CA, gleich sind, heisset es ein gleichseitiger Triangel, (Triangulum aequilaterum); sind zwey Seiten AB und BC gleich, ein gleichschenklichter (Triangulum aequicrurum, oder Isosceles); ist keine Seite der andern gleich, ein ungleichseitiger, als HIK, (Triangulum Scalenum). 1. 7. 8. 9. 9. 10. 11.

Erklärung.

20. Ein Quadrat (Quadratum) ist eine Figur, die vier gleiche Seiten AB, BC, CD, DA, und lauter rechte Winkel hat. Ein länglichtes Viereck (Oblongum oder Rectangulum) hat lauter rechte Winkel, aber es sind nur die zwey einander entgegengesetzten Seiten EF und HG, ingleichen 1. 12. 13.

chen EH und FG einander gleich. Eine Raute
14. (Rhombus) hat vier gleiche Seiten IK, KL, LM,
MI, und lauter schiefe Winkel. Eine länglich-
15. te Raute (Rhomboides) hat zwar lauter schiefe
Winkel, aber nur die beide einander entgegen-
gesetzte Seiten ON und PQ, OP und QN sind
einander gleich. Die übrigen Vierecke wer-
16. den Trapezia genennet, als STVZ.

Erklärung.

21. Die übrigen Figuren, so mehr als vier Seiten haben, werden Polygone, oder Vielecke genennet: und insonderheit Fünfecke, wenn sie fünf; Sechsecke, wenn sie sechs Seiten haben,
1. u. s. w. Sind alle Seiten und Winkel einan-
17. der gleich, als in ABCDEF, heisset sie eine re-
guläre, oder ordentliche Figur: sind aber die Seiten
und Winkel nicht alle einander gleich, als in
18. GHIKL, so nennet man sie eine irreguläre oder
unordentliche Figur.

Erklärung.

I. 22. Wenn zwey Linien AB und CD im-
19. mer eine Weite von einander behalten: so sind
es Parallel-Linien.

22a) Von der Richtigkeit dieser Erklärung hängt die ganze Lehre der Parallellinien, die für die ganze Mathematik von äuserster Wichtigkeit ist, ab. Eine genaue Betrachtung zeigt bald, daß es so leicht nicht ist, eine hinlänglich bestimmte mathematische Erklärung von den Parallellinien zu geben, weil man gar zu leicht in den Fehler fällt, das schon bey der Erklärung vorauszusetzen, was erst in der Folge noch bewiesen werden soll, und dennoch die nachher folgenden Beweissätze selbsten wieder auf die Erklärung zu gründen. Es bleibt im Grunde der richtige Charakter von Parallellinien, daß sie immer einerley Weite von einander
III. behalten; aber was bestimmt diese Weite? Ohne Zwei-
46. fel das Perpendikel von der einen Linie auf die andere. Sollen z. B. AB, CD Parallellinien seyn, also überall gleich-

weit

weit von einander abstehen, so heist dieses ohne Zweifel so viel: alle Perpendikel von der einen auf die andere sollen gleich groß seyn. Wenn also z. B. IH, GK bei H, K rechte Winkel machen, so sollen IH, GK gleich groß seyn; folgt aber hieraus auch, daß ein Perpendikel von K auf AB gefällt, dem aus G auf CD gefällt gleich seyn müsse? Es läugnen, hiese, nach dem gegebenen Begriff von Parallellinien, wohl so viel als behaupten, die Entfernung der Linie AB von der CD könne anders seyn, als die Entfernung der CD von der AB. Inzwischen scheint die geometrische Schärfe doch von der Gleichheit dieser Perpendikel einen besondern Beweis zu fordern, und eben darum in dem Begriff von Parallellinien nichts zu gestatten, was auf jene Perpendikel Bezug hätte. Daher setzt Hr. H. **Kästner** folgenden Begriff fest: Parallellinien seyen **grade Linien, welche auf beyden Seiten ohne Ende verlängert, niemalen zusammenstoßen.** Dieser Charakter ist zwar nicht von der Art, daß er unmittelbar zu entscheiden diente, ob man in irgend einem vorkommenden Falle wirklich Parallellinien habe, weil sich nie eine unendliche Verlängerung vornehmen läßt; es werden aber andere Eigenschaften daraus hergeleitet, welche solches zu entscheiden dienen.

Erklärung.

23. **Die Vierecke, deren Seiten einander parallel sind, nennet man** Parallelogramma.

Grundsatz.

24. **Zwischen zweyen Punkten kann nur Eine gerade Linie seyn.**

Zusatz.

25. Derowegen können zwey gerade Linien keinen Raum einschliessen; weil sie in ihren beyden äußersten Punkten zusammenstoßen müßten.

Zusatz.

26. Folgends sind in jedem Dreyecke zwey Seiten AB und AC zusammengenommen grösser, als die dritte BC. I. 9.

Grundsatz.

27. Alle Radii eines Cirkuls sind einander gleich (§. 13.)

Grundsatz.

I. 20. 28. Alle Bogen DE und BC, welche aus der Spitze eines Winkels A innerhalb seinen Schenkeln AB und AC beschrieben werden, haben eine gleiche Anzahl Grade.

Zusatz.

29. Weil man die Grösse des Winkels A nach der Zahl der Grade eines solchen Bogens DE oder BC erachtet (§. 16.); so gilt es gleich viel, ob der Bogen DE mit einem grossen oder kleinen Radio beschrieben wird, wenn man den Winkel messen will.

Grundsatz.

30. Wenn gerade Linien und Winkel einander decken, so sind sie gleich: und wenn sie gleich sind, decken sie einander.

Grundsatz.

31. Figuren, die einander decken, sind einander gleich: und die gleich und ähnlich sind, decken einander (§. 4.).

Anmerkung.

32. Es ist wohl zu merken, daß von gleichen Figuren erfordert wird, sie sollen alle beyde einander decken: denn wenn gleich die obere die untere decket, so sie auf dieselbe geleget wird, würde doch die untere die obere nicht decken, wenn sie auf dieselbe geleget würde, wo sie nicht einander gleich wären. Nemlich, wenn Figuren dergestalt auf einander geleget werden, daß sie einander decken, so haben sie einerley Umfang.

Grundsatz.

33. Wenn zwey Figuren oder Linien auf einerley Art erzeuget oder beschrieben werden,

und

und dasjenige, woraus sie erzeuget oder beschrieben worden, beyderseits einander ähnlich ist; so sind die Figuren und Linien einander ähnlich (§. 4.).

Zusatz.

34. Da nun alle Punkte (§. 2. 4.) und gerade Linien einander ähnlich sind (§. 7. 2.) und ein jeder Circul erzeuget wird, wenn eine gerade Linie sich um einen festen Puukt herum beweget (§. 11.); so müssen alle Circul und ihre Peripherien einander ähnlich seyn.

Grundsatz.

35. Wenn zwey Winkel einerley Maaß haben, sind sie einander gleich, und wenn sie gleich sind, haben sie einerley Maaß (§. 16.)

Grundsatz.

36. Auf jeder Linie AB kann man aus einem angenommenen Punkte C einen halben Circul beschreiben (§. 11.) I. 21.

Zusatz.

37. Wenn man aus dem Mittelpunkte C eine Perpendikular-Linie CD aufrichtet, so sind die beyden Winkel o und x einander gleich (§. 17.) Derowegen hat ein rechter Winkel zu seinem Maaße einen Quadranten, das ist 90 Gr., (§. 16. 36. 35.); und sind demnach alle rechte Winkel einander gleich (§. 35.) Ja ein Winkel, der einem rechten gleich ist, ist ein rechter Winkel (l. c.)

Lehrsatz.

38. Die beyden Winkel x und o, welche eine Linie DC auf einer andern Linie AB machen zusammen 180 Gr. I. 22.

Beweis.

Beweis.

Aus C kann auf der Linie AB ein halber Circul beschrieben werden, (§. 36.) Derowegen haben die Winkel x und o zu ihrem Maasse einen halben Circul (§. 16.), folgends machen sie 180 Gr. (§. 14.) W. Z. E.

Zusatz.

39. Wenn man also auf dem Felde zu einem Winkel nicht kommen kann, den man messen soll, oder wenn man mit einem Quadranten einen stumpfen Winkel zu messen hat: darf man nur den Nebenwinkel (angulum contiguum) messen.

Lehrsatz.

I. 40. **Wenn eine Linie AB die andere CD in**
23. **E schneider; so sind die Verticalwinkel o und x einander gleich.**

Beweis.

Denn $o + u = 180$ Gr. und $u + x = 180$ Gr. (§. 38.). Also ist $o + u = u + x$ (§. 22. Arithm.); folgends $o = x$ (§. 25. Arithm.). W. Z. E.

Zusatz.

41. Daher kann man auf dem Felde, oder wo man sonst Winkel zu messen hat, anstatt des Winkels x seinen Verticalwinkel o messen, wenn man jenem nicht beykommen kann.

Lehrsatz.

I. 42. **Alle Winkel, die um einen Punkt C**
24. **herum sind, machen zusammen vier rechte Winkel, oder 360 Gr.**

Beweis.

Ihr Maaß ist ein ganzer Circul (§. 11. 16.). Also halten sie zusammen vier rechte Winkel in sich (§. 37.), oder 360 Gr. (§. 14.) W. Z. E.

Auf-

Aufgabe.

43. Einen vorgegebenen Winkel zu messen.

Auflösung.

Auf dem Papiere.

1. Leget den Mittelpunkt des Transporteurs auf die Spitze des Winkels A, und rücket das Instrument, bis die innere Schärfe des Lineals an die Linie AB streichet. II. 25.
2. Zählet die Grade an dem Bogen DE: die zwischen die Schenkel des Winkels AC und AB fallen.

Auf dem Felde:

1. Richtet den Winkelmesser dergestalt, daß der Diameter AB auf den einen Schenkel des Winkels fället. I. 26.
2. Verschiebet das an dem Mittelpunkte D bewegliche Lineal EF, und visiret durch die Dioptern auf demselben, bis ihr das äusserste des andern Schenkels erblicket.
3. Zählet die Grade, so das Lineal auf dem Instrumente abschneidet:

So wisset ihr in beyden Fällen die Grösse des Winkels (§. 16.).

Aufgabe.

44. Eine gerade Linie zu messen.

Auflösung.

Vor allen Dingen bereitet man sich einen Maaßstab. Auf dem Papier nehmet eine Linie, schneidet davon 10 kleine Theile für die Schuhe ab, und traget sie zusammen so vielmal in den übrigen Theil der Linie, als angehen will, für die Ruthen. So habt ihr einen Maaßstab (§. 9.). Auf dem Felde brauchet man entweder eine Kette, oder eine Schnure oder eine Stange,

die in ihre gehörige Zolle, Schuhe und Ruthen eingetheilet worden. Doch ist zu merken, daß man nur die letzte Ruthe in Schuhe, und den letzten Schuh in Zolle eintheilen darf.

Wenn ihr nun auf dem Papier eine Linie messen wollet; so

II. 27. 1. setzet den Cirkel in A und thut ihn auf bis in B.

2. Den einen Fuß dieses unverrückten Cirkels setzet auf dem Maaßstabe in den Anfang einer Ruthe, als in 10, und gebet Acht, welchen Schuh der andre Fuß absticht, z. E. 5. So ist die Linie 1° 5'.

Auf dem Felde:

1. Stecket an beyden Enden der Linie einen Stab, und (wenn eure Meßkette nicht so lang ist) zwischen dieselbe noch einen oder mehr andere (§. 8.)

2. Spannet die Schnure oder Kette von einem Stabe bis zu dem andern aus.

3. Zählet endlich daran die Ruthen, Schuhe und Zolle.

Anmerkung.

45. Ihr könnet auch an die beyden Enden der Meßkette zwey Rinken machen, durch dieselben zwey Stäbe stellen, und diese jederzeit mit dem Stabe an dem Ende der Linie, die ihr messet, in eine Linie stellen (§. 8.).

Anmerkung.

46. Die Meßketten sind etwas beschwerlich zu tragen, und lassen sich nicht wohl ausziehen. Wenn man die Linie mit einer Stange überschläget, muß man so viel Stangen-Dicken zu der gefundenen Länge addiren, als die Stange überschlagen worden, oder sie um eine Stangen-Dicke kürzer machen, als das Maaß erfordert. Die hanfene Meßschnüre kriechen vom Feuchten ein, und dehnen sich ungleich aus. Es merket **Schwenter** an (Geom. pract. Lib. I. Tract. 2. p. 381), daß ihm eine dergleichen Schnure von 16 Schuhen innerhalb einer

Stun-

Stunde vom Reiffe fast um einen ganzen Schuh eingegangen. Diesem Fehler abzuhelfen, soll man sie wiedersinnes winden, in Leinöle sieden, nachdem sie getrocknet, durch ein zerlassen Wachs ziehen, und mit hartem Wachse durch und durch bestreichen lassen. Es versichert Schwenter p. 382., daß, wenn man sie auch einen Tag im Wasser liegen lässet, sie doch nicht merklich kürzer werde.

46 a) Ich bemerke hier ein für allemal, daß gegenwärtige Anfangsgründe bey weitem nicht hinlänglich sind, praktische Geometer zu bilden. Unter allen hierher gehörigen Schriften ist das klassische Werk des Hrn. Hofrath **Mayer** bey weitem das beste.

Anmerkung.

47. Man hat auf dem Papier noch ein künstlicheres Instrument, die Linien abzumessen, welches man einen **verjüngten Maaßstab** nennet. Davon sich erst unten wird reden lassen.

Aufgabe.

48. Einen Winkel zu machen, der so groß ist, wie ein anderer gegebener Winkel.

Auflösung.

Der erste Fall. Wenn der Winkel in Graden gegeben wird, so II. 25.

1. ziehet eine gerade Linie AB.
2. Leget auf A den Mittelpunkt des Transporteurs, und an die Linie AB seinen Radium.
3. Zählet an demselben so viel Grade ab, als der Winkel haben soll.
4. Bey dem letzten Grade merket euch den Punkt E.
5. Ziehet endlich von A durch E eine gerade Linie. So ist BAC der verlangte Winkel.

Der andere Fall. Wenn der Winkel DEF nur auf dem Papiere gegeben wird; so II. 29.

1. beschreibet aus E, mit beliebiger Eröffnung des Zirkels; einen Bogen GH.
2. Ziehet eine gerade Linie ef.

3. Beschreibet mit voriger Eröffnung des Zirkels aus e den Bogen h i.

4. Setzet den Zirkel in H, und thut ihn auf bis in G.

5. Mit dieser Eröffnung schneidet aus h von dem Bogen h i den Bogen g h ab.

6. Ziehet aus e durch g eine Linie e d.

So ist geschehen, was man verlangte.

Der dritte Fall. Auf das Feld kann man einen in Graden gegebenen Winkel durch den Winkelmesser tragen; wie aus der ersten Aufgabe (§. 43.) abzunehmen.

Beweis.

Im ersten und dritten Falle ist kein Beweis nöthig. Im andern Falle ist der Bogen g h = G H, wie unten (§. 92.) ohne gegenwärtigen Satz soll erwiesen werden, und also der Winkel d e f = D E F (§. 16. 35.). W. Z. E.

Lehrsatz.

II. 30. **Wenn in zweyen Triangeln A B C und a b c der Winkel A = a, A C = a c und A B = a b; so sind die ganzen Triangel einander gleich, und B C = b c, B = b, C = c.**

Beweis.

Man gedenke, es würde der Triangel a c b dergestalt auf den andern A C B geleget, daß der Punkt a auf A, und die Linie a b auf die Linie A B fället. Weil nun a b = A B, so fället der Punkt b auf B (§. 30.): weil a = A, so fället die Linie a c auf A C (§. 30.), und, da a c = A C, der Punkt c auf C (§. cit.): folgends die Linie b c auf B C (§. 24). Derowegen sind die Triangel A B C und a b c einander gleich (§. 31.), und B C = b c etc. (§. 30.). W. Z. E.

Lehr-

Lehrsatz.

50. **Wenn in zweyen Triangeln** ABC **und** abc **der Winkel** A = a **und** B = b, **über dieses die Seite** AB = ab; **so sind die ganzen Triangel einander gleich, und** AC = ac, BC = bc, C = c. II. 30.

Beweis.

Man gedenke, es werde der Triangel ABC auf den andern abc dergestalt geleget, daß der Punkt A auf a, und die Seite AB auf die Seite ab fället; so fället der Punkt B auf b, die Linie AC auf ac, und BC auf bc (§. 30.) Da nun die Linien AC und BC im Punkte C, und die Linien ac und bc im Punkte c zusammenstossen, muß auch der Punkt C auf den Punkt c fallen. Derowegen sind die Triangel einander gleich (§. 31.), und AC = ac etc. (§. 30.). W. Z. E.

Lehrsatz.

51. **Wenn in zweyen Triangeln** ACB **und** acb, AC = ac, AB = ab **und** BC = bc; **so sind die Triangel einander gleich, und** A = a, B = b, C = c. II. 30.

Beweis.

Man beschreibe aus A mit AB den Bogen y, und aus C mit CB den Bogen x. Hierauf gedenke man, es werde der Triangel acb auf den Triangel ACB dergestalt geleget, daß der Punkt a auf A, und c auf C fället (§. 30.); so wird die Linie ab in den Bogen y, und cb in den Bogen x fallen (§. 13.), folgends der Punkt b in B, wo die Bogen einander durchschneiden. Daher sind die Triangel (§. 31.), und die Winkel (§. 30.) einander gleich. W. Z. E.

Zusatz.

52. Also kann aus drey gegebenen Linien nicht mehr als einerley Triangel gemacht werden.

Aufgabe.

II. 31. 53. Auf einer gegebenen Linie AB einen gleichseitigen Triangel aufzurichten.

Auflösung.

1. Setzet den Zirkel in A, thut ihn auf bis in B, und beschreibet damit über der Linie einen Bogen.
2. Setzet hierauf den Zirkel in B, und beschreibet mit unveränderter Eröffnung einen andern Bogen, der den ersten in C durchschneidet.
3. Ziehet von A und B in C die Linien AC und BC; so ist geschehen, was man verlangete.

Beweis.

Die Linien AC und BC hat man so groß gemacht, als die Linie AB (§. 27.). Derowegen ist der Triangel ABC gleichseitig (§. 19.). W. Z. E.

Aufgabe.

II. 32. 54. Aus zwey gegebenen Linien AB und BC einen gleichschenklichten Triangel zu machen.

Auflösung.

1. Setzet an das Ende A der einen Linie AB, welche die Grundlinie des Triangels geben soll, den Zirkel, und beschreibet mit der Eröffnung nach der Länge der andern gegebenen Linie einen Bogen.
2. Mit eben dieser Eröffnung beschreibet aus B einen andern Bogen, der den ersten in C durchschneidet.
3. Ziehet aus C in A und B gerade Linien; so ist der begehrte Triangel fertig.

Beweis.

Die Linien AC und BC hat man einander gleich gemachet. Also ist ACB ein gleichschenklichter Triangel (§. 19.) W. Z. E.

Auf-

Aufgabe.

55. Aus drey gegebenen Linien einen Tri- II.
angel zu machen. 33.

Auflösung.

1. Nehmet die eine von den gegebenen Linien AB zur Grundlinie des Triangels an.
2. Aus A beschreibet mit der Eröffnung des Zirkels nach der Länge der andern Linie AC einen Bogen über derselben, und
3. aus B mit der Eröffnung nach der dritten Linie BC einen andern Bogen, der den ersten in C durchschneidet.
4. Ziehet die Linien AC und CB; so ist der Triangel fertig (§. 52.).

Anmerkung.

56. Wenn die zwey Bogen einander nicht erreichen, so kann aus den gegebenen drey Linien kein Triangel gemachet werden. (§. 26.).

Anmerkung.

57. Die Zeichnung der Figuren ist von großem Nutzen. Sie dienet die Felder in den Grund zu legen, ohne welches man sie nicht ausrechnen kann. Ja nachdem ich die Gründe der Aehnlichkeit in die Geometrie gebracht, dienet sie zugleich zum Beweise der Aehnlichkeit der Figuren, wie aus dem Folgenden zu ersehen. Man kann auch aus derselben ersehen, was auf dem Felde oder sonst im Grossen zu messen nöthig ist, wenn man es in Grund legen, das ist, auf das Papier ins Kleine bringen will. Derowegen lassen wir uns nicht verdriessen, mehrere Aufgaben von den Dreyecken hieher zu setzen.

Aufgabe.

58. Aus zwey gegebenen Linien AB und II.
AC und einem Winkel A einen Triangel zu 34.
machen.

Auflösung.

1. Nehmet die Linie A B zur Grundlinie an, und
2. machet in A einen Winkel, der dem gegebenen gleich ist (§. 48.).
3. Auf die Linie AB traget die andere gegebene Linie A C, und
4. ziehet von C bis B eine gerade Linie; so ist der Triangel fertig (§. 49.).

Aufgabe.

II. 58a) Aus zwey gegebenen Linien AB, AC, und einem Winkel B, welchen die gegebenen Linien nicht
33. einschließen, ein Dreyeck zu zeichnen.

Auflösung.

1. Man ziehe die AB, auf welcher der gegebene Winkel B liegen soll

2. Mit der andern AC, welche man mit dem Zirkel faßt, beschreibe man aus A einen Bogen C D.

3. In B trage man auf die AB den gegebenen Winkel B, und ziehe die grade Linie B C, welche den Bogen in C und D schneidet.

4. Zieht man nun die AC und AD, so hat man zwey verschiedene Dreyecke ABC und ABD, wovon jedes der Aufgabe Genüge thut. Um zu entscheiden, welches von beyden in einem bestimmten Fall das verlangte ist, muß in der Aufgabe noch überdas angegeben seyn, ob der im Dreyeck der Grundlinie AB gegenüber liegende Winkel **spitz** oder **stumpf** ist; im ersten Fall gilt das Dreyeck ABC, im letzten das ABD.

Anmerkung.

59. In der Ausübung ist niemals nöthig, die unnützen Linien, als hier AD, auszuziehen: sondern, nachdem man das Lineal angeleget, kann man gleich den Punkt C abstechen.

Aufgabe.

II. 60. Aus zwey gegebenen Winkeln und einer Linie AB einen Triangel zu machen.
35.

Auflö-

Auflösung.

1. Auf dem einen Ende A der gegebenen Linie A B richtet einen Winkel auf, der einem von den gegebenen gleich, und
2. auf dem andern Ende B einen andern, der dem andern von den gegebenen gleich ist, (§. 48.); so werden sich die Schenkel dieser Winkel in C durchschneiden und den verlangten Triangel A B C auf der Linie A B formiren (§. 50.).

Aufgabe.

61. Die Weite zweyer Oerter A und B zu messen, zu deren jedem man aus einem in C angenommenen Stande kommen kann. II. 36.

Auflösung.

1. Stecket in C einen Stab nach Belieben ein.
2. Messet die Linie A C (§. 44.), und traget sie zurücke in a, dergestalt, daß in a ein Stab mit dem Stabe C und dem Orte A in eine gerade Linie gesetzet wird (§. 8.).
3. Auf gleiche Weise messet die Linie B C, traget sie zurücke in b, und stecket in b wie vorhin einen Stab mit C und B in einer geraden Linie ein (§. 8.).
4. Endlich messet die Linie a b: so habt ihr die verlangte Weite.

Beweis.

Denn die Winkel x und y sind einander gleich (§. 40.). Da nun auch A C = a C und B C = b C, so ist a b = A B (§. 49.). W. Z. E.

Anmerkung.

62. Wenn man nicht Raum hat, die ganzen Linien A C und B C zurücke zu tragen; so träget man nur ihre Hälften, oder den dritten, oder auch den vierten Theil derselben zurücke: Alsdenn ist a b = $\frac{1}{2}$, oder $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$ A B, wie unten wird erwiesen werden (§. 152.).

Aufgabe.

II. 37. 63. Mit einer blossen Schnure oder Kette einen Winkel auf dem Felde von einem Orte auf den andern zu tragen.

Auflösung.

Man soll den Winkel A in C tragen.

1. Messet in den beyden Schenkeln AB und AC des gegebenen Winkels A zwey Linien von beliebiger Grösse AF und AD ab, und zugleich die Querlinie FD, so daher entstehet.
2. Traget aus C in d die gefundene Linie AD, und spannet an den beyden Stäben C und d eine Schnure dergestalt aus, daß Cf = AF und df = DF.
3. Stecket in f einen Stab, so ist der Winkel dCF = FAD.

Beweis.

Es ist AF = Cf, AD = Cd und DF = df. Derowegen ist auch der Winkel C dem Winkel A gleich (§. 51.).

Aufgabe.

II. 38. 64. Die Weite zweyer Oerter zu messen, zu deren einem B man nur kommen kann.

Auflösung.

1. Stecket nach Gefallen einen Stab in E und traget die Linie BE dergestalt zurücke, daß der Stab C mit E und B in eine Linie kommet (§. 8.).
2. Machet einen Winkel in C, der so größ ist wie der Winkel B (§. 63. 43.).
3. Endlich gehet mit dem Stabe D so weit zurücke, bis er mit C und F, ingleichen mit E und A in einer Linie stehet:

So ist die Linie CD der Linie AB gleich.

Beweis.

Beweis.

Ihr habet den Winkel C so groß wie B, und die Linie CE so groß wie EB gemachet. Nun sind überdieses die Verticalwinkel bey E einander gleich (§. 40.). Derowegen ist auch C D = A B (§. 50.). W. Z. E.

Anmerkung.

65. Es gilt auch hier, was bey (§. 62.) erinnert worden.

Anmerkung.

66. Wenn man die Breite eines Flusses messen wollte, und könnte die Linie BE an dem Ufer nicht zurücke tragen: so stecket man den Stab B so weit von Ufer weg, als einem beliebet. Alsdenn wird die Linie CD um so viel breiter, als der Fluß, um wie viel der Stab B von dem Ufer weggerücket worden.

Aufgabe.

67. **Durch einen gegebenen Punkt C mit einer gegebenen Linie AB eine Parallel-Linie auf dem Papier zu ziehen.** II. 39.

Auflösung.

1. Leget an die Linie AB das Lineal.
2. Setzet den Zirkel in C ein, und thut ihn bis an das Lineal auf, als wenn ihr einen Bogen beschreiben wolltet, der das Lineal oder die Linie AB berührte.
3. Ziehet mit dem etwas schräge angelegten Zirkel an dem Lineale herunter; so wird der andere Fuß durch den Punkt C die begehrte Parallellinie DE beschreiben (§. 22.)

Anders.

Man kann es auch durch ein Parallel-Lineal verrichten: welches Instrument aus zwey Linealen bestehet, die durch zwey gleich lange Querbänder dergestalt zusammen verknüpfet sind, daß sie sich nach Gefallen von ein- II. 40.

ander

ander verschieben lassen. Wenn ihr nun dergleichen Instrument habet; so leget

1. die Schärfe des einen Lineals an die gegebene Linie AB an, und
2. schiebet das andere Lineal bis an den Punkt C fort; so könnet ihr
3. durch denselben die verlangte Linie DE ziehen.

Anmerkung.

II. 41. 68. Wenn man in der ersten Auflösung den Zirkel nicht bis an den Punkt E aufthun kann; so ziehet mit AB in beliebiger Weite die Parallel-Linie CD und mit dieser die Parallellinie LM durch den gegebenen Punkt E; so wird LM auch mit AB parallel seyn. Denn es ist EF = IH und EG = IK. Derowegen EF + FG = HI + IK, das ist, EG = HK (§. 24. Arithm.) folgends ist LM mit AB parallel (§. 22.)

Aufgabe.

II. 42. **69. Von einem gegebenen Punkte C auf eine Linie AB ein Perpendicul zu fällen.**

Auflösung.

1. Setzet den Zirkel in C und durchschneidet mit gefälliger Eröffnung in zweyen Punkten D und E die Linie AB.
2. Aus D und E machet mit beliebiger Eröffnung des Zirkuls einen Durchschnitt in F.
3. Durch C und F ziehet die Linie FG, diese stehet auf AB perpendicular.

Beweis.

Denn weil DC = CE und DF = FE, wie auch CF = CF (§. 20. Arithm.), so sind auch die Winkel DFG und GFE (§. 51.), folgends die Nebenwinkel bey G einander gleich (§. 49.). Derowegen stehet die Linie CG auf AB perpendicular (§. 17.). W. Z. E.

Auf-

Aufgabe.

II. 43. 70. Aus einem gegebenen Punkte C auf einer gegebenen Linie AB ein Perpendicul aufzurichten.

Auflösung.

1. Setzet den Zirkel in C ein und
2. durchschneidet die Linie AB mit beliebter Eröffnung in D und E.
3. Aus D und E machet mit einerley Eröffnung des Cirkels einen Durchschnitt in F.
4. Ziehet durch C und F die Linie GC; so stehet sie auf AB perpendicular.

Beweis.

Weil DC = EC und DF = EF, CF = CF (§. 20. Arithm.); so sind die Winkel bey C einander gleich (§. 51.). Demnach stehet die Linie GC auf AB perpendicular (§. 17.). W. Z. E.

Anders.

II. 44. Lasset euch einen Winkelhacken verfertigen, das ist, ein Instrument, welches aus zweyen rechtwinklich zusammengesetzten Linealen bestehet.

1. Das eine Theil dieses Instruments leget an die gegebene Linie AB dergestalt, daß die Spitze seines Winkels den gegebenen Punkt C berühret.
2. Ziehet nach dem andern Theile des Instruments eine gerade Linie CD aus dem gegebenen Punkte C. Diese stehet auf AB perpendicular.

Beweis.

Denn der Winkelhacken ist rechtwinklich: derowegen müssen auch die beyden Linien CB und CD, die nach ihm gezogen sind, keinen rechten Winkel machen.

machen. Und also stehet CD auf CB perpendicular (§. 18.). W. Z. E.

Lehrsatz.

II. 45. §. 71. **Wenn in zweyen rechtwinklichten Triangeln ABC und abc, AB = ab und BC = bc, oder in schiefwinklichten von einerley Art, ausser diesen Seiten A = a; so sind die ganzen Triangel einander gleich, und AC = ac, B = b und C = c.**

Beweis.

Man beschreibe durch C in der Weite BC einen Bogen FG, und lege in Gedanken den Triangel abc auf den andern ABC dergestalt, daß der Punkt a auf A und ab auf AB fället. Da nun ab = AB und a = A; so fället der Punkt b in B, und ac auf AC (§. 30.), folgends der Punkt c in die Linie AC. Da nun ferner bc = BC; so muß der Punkt c auch in den Bogen FG fallen (§. 13.), folgends in C, wo der Bogen FG und die Linie AC einander durchschneiden, und demnach fället bc auf BC (§. 24.). Derowegen sind die ganzen Triangel einander gleich (§. 31.) W. Z. E.

Lehrsatz.

III. 46. §. 72. **Wenn zwey Parallel-Linien AB und CD von einer dritten EF in G und H durchschnitten werden, so sind 1. die Wechselwinkel x und y einander gleich; 2. der äussere Winkel o ist dem innern y gleich, und 3. die beyden inneren Winkel u und y machen zusammen 180 Gr.**

Beweis.

1. Ziehet die beyden Perpendicular-Linien HI und GK, welche einander gleich sind (§. 22.) Es sind aber auch die Winkel I und K einander gleich (§. 18. 37.). Derowegen ist x = y (§. 71.); **welches das erste war.**

2. Nun

2. Nun ist $x = 0$ (§. 40.) Demnach $y = 0$ (§. 22. Arithm.): welches das andere war.

3. Es ist aber $u + 0 = 180$ Gr. (§. 38.) Derowegen ist auch $u + y = 180$ Gr. (§. 22. Arithm.) W. Z. E.

72 a) In dem vorstehenden Beweis ist die Voraussetzung zum Grund gelegt worden, daß die Perpendikel von CD auf AB denen von AB auf CD gleich seyen, oder daß ein Perpendikel auf AB zugleich senkrecht auf CD angenommen werden könne. Letzteres zu bestätigen, sey HI nicht nur auf AB, sondern auch auf CD senkrecht; nun setze man, es sollen GA, HC nach AC verlängert irgendwo zusammenstoßen, so müßten aus gleichem Grund IB, HD nach BD verlängert irgendwo zusammenstoßen, weil die Figuren AIHC, BIHD, wenn man zu beyden Seiten von IH gleiche Längen nimmt, nothwendig einander decken müssen (§. 30.) Es müßten also die beyden graden Linien einen Raum einschließen; da nun dieses nicht seyn kann (§. 25.) so ist auch kein Punkt des Zusammenstoßens möglich, und es sind also AB, CD, Parallel-Linien (§. 22 a). Wenn also angenommen wird, das Perpendikel GK, welches auf CD senkrecht ist, sey zugleich bey G auf AB senkrecht, so hat solches für die Voraussetzung, daß AB, CD einander parallel sind, seine Richtigkeit. Es ist nun ferner dem Begriff von Parallellinien gemäß, daß alle von der einen (CD) auf die andere (AB) gefällte Perpendikel (wie HI, KG) gleich groß seyn müssen, und so scheint also der Beweis (§. 72. no. 1) hinlänglich gerechtfertigt zu seyn. Inzwischen hat man gegen jede Rechtfertigung immer neue Erinnerungen beyzubringen gewußt, und hierdurch hat diese Lehre von den Parallellinien ungemeine Schwierigkeiten erhalten, mit deren Hebung sich die größten Mathematikverständigen beschäftigt haben, so sehr man auch von der Wahrheit der Lehre selbst längstens überzeugt war. Schon im Jahr 1763. hat Hr. Prof. **Klügel** auf Anrathen des Hrn. Hofrath **Kästner** in einer besondern Schrift unter dem Titel: Conatuum praecipuorum Theoriam parallelarum demonstrandi recensio 28erley Versuche erzählt, wodurch ihre Urheber dieser Lehre ein mehreres Genüge zu thun geglaubt haben. Hr. Hofrath **Kästner** ist in seinen **Anfangsgründen der Geometrie** wieder einen neuen Weg gegangen, und Hr. Hofr. **Karsten** hat in sei-

nen

nen Anfangsgründen der mathematischen Wissenschaften und in einer nachgefolgten Anzeige seiner Vorlesungen einen abermaligen Versuch zur Berichtigung dieser Lehre gemacht. Auch gehören die Bemühungen der Herrn Schulz und Rehbein zur Geschichte dieses Satzes. S. unten §. 74a.

Lehrsatz.

III. 46. 73. Wenn zwey Linien AB und CD von einer dritten EF dergestalt in G und H durchschnitten werden, daß die Wechselswinkel x und y, oder auch der äussere o und der innere y einander gleich sind, oder die beyden inneren u und y zusammen 180 Grad machen; so sind die Linien AB und CD parallel.

Beweis.

1. Lasset aus G einen Perpendicul GK auf die Linie CD fallen, machet Gl = HK und ziehet die Linie GH. Weil nun x = y: so ist I = K und HI = GK (§. 49.), folgends l ein rechter Winkel (§. 37.) und AB mit CD parallel (§. 22.): welches das erste war.

2. Es sey o = y. Weil nun o = x (§. 40.); so ist x = y (§. 22. Arithm.), folgends vermöge dessen, was erst erwiesen worden, sind die Linien AB und CD parallel: welches das andere war.

3. Es mache y mit u 180 Gr. Weil o und u 180 Grad machen (§. 38.); so ist o = y (§. 22. 25. Arithm.), und also vermöge dessen, was jetzt erwiesen worden, sind die Linien AB und CD parallel: welches das dritte war.

Lehrsatz.

III. 47. 74. In jedem Triangel ABC machen alle drey Winkel zusammen 180 Gr., und wenn man die eine Seite verlängert, so ist der äussere Winkel so groß, wie die beyden innern, die ihm gegen über stehen, zusammen.

Beweis.

Beweis.

Man ziehe durch die Spitze des Triangels C mit seiner Grundlinie AB eine Parallellinie DE, so ist 1 = I und 2 = II (§. 72.) Nun ist I + 3 + II = 180 Gr. (§. 38.) Derowegen ist 1 + 3 + 2 = 180 Gr. (§. 24. Arithm.); welches das erste war.

Wenn die Seite AB verlängert wird in D; so ist 3 + 4 = 180 Gr. (§. 38.) Nun ist aber jetzt erwiesen worden, daß 1 + 2 + 3 = 180 Gr. Derowegen, 3 + 4 = 1 + 2 + 3 (§. 22. Arithm.), folgends 4 = 1 + 2 (§. 25. Arithm.); welches das andere war. II. 48.

74a) Daß die 3 Winkel eines Dreyecks zusammen 180 Grad ausmachen, liesse sich, ohne erst die Lehre von den Parallellinien vorzutragen, gradezu auf folgende Art darthun:

1. Es sey abc ein Dreyeck von welcher Art man will; man gedenke sich die Seiten ab, bc, ca, nach B, C, A, ohne Ende verlängert, daß also B, C, A, Punkte in einer a, b, c, unendlich entfernten Kreislinie vorstellen, so ist Bogen BC das Maaß des Winkels x, Bogen CA das Maaß des Winkels y, und Bogen AB, das Maas des Winkels z; also x + y + z = BC + CA + AB = 360 Gr. IX. 48*

2. Nun ist

x + n = 180 Gr.
y + o = 180 —
z + m = 180 —

also x + y + z + n + o + m = 360 Gr. + 180 Gr.
Aber x + y + z = 360 Gr. (no. 1.); also
n + o + m = 180 Gr.

74b) Hieraus ließe sich nun umgekehrt die Lehre von den Parallellinien herleiten.

Zusatz.

75. Derowegen kann in einem Triangel nicht mehr als Ein rechter Winkel seyn, und wenn dieses ist, machen die zwey übrigen zusammen auch noch einen rech-

ten Winkel, das ist 90 Grad aus (§. 37.); auch können zwey Linien, die auf einer dritten perpendicular stehen, von keiner Seite zusammenstoßen, wenn sie gleich unendlich fort verlängert werden, und sind demnach parallel (§. 22.).

Zusatz.

76. Vielweniger kann mehr als ein stumpfer Winkel in einem Triangel seyn (§. 18.).

Zusatz.

77. Wenn man in einem Triangel einen Winkel von 180 Gr. abziehet; so bleibet die Summe der beyden übrigen übrig. Und wenn man die Summe zweyer von 180 Gr. wegnimmt, bleibet der dritte übrig.

Zusatz.

78. Wenn in zweyen Triangeln zwey Winkel zweyen gleich sind, muß auch der dritte in einem, dem dritten in dem andern gleich seyn (§. 25. Arithm.)

Lehrsatz.

III. 49. 79. In einem gleichschenklichten Triangel ABC sind die Winkel an der Grundlinie x und y einander gleich, und die Perpendicular-Linie CD theilet sowohl den Winkel C, als die Grundlinie AB und den Triangel in zwey gleiche Theile.

Beweis.

Man theile die Linie AB in zwey gleiche Theile in D, und ziehe die Linie DC. Weil nun auch AC = CB (§. 19.), so ist x = y und o = u, m = n, und △ ACD = △ CDB (§. 51.), folgends CD auf AB perpendicular (§. 17.) W. Z. E.

Zusatz.

80. Also sind in einem gleichseitigen Triangel alle Winkel einander gleich, und folgends jeder 60 Grad, (§. 74.)

Lehr-

Lehrsatz.

81. **Wenn die Winkel x und y an der III. Grundlinie AB eines Triangels ACB einander 49. gleich sind: so sind auch die Seiten AC und CB einander gleich.**

Beweis.

Man ziehe die Linie CD dergestalt, daß m = n. Weil nun x = y, so ist auch o = u (§. 78.) und daher AC = BC (§. 50.) W. Z. E.

Zusatz.

82. Wenn also drey Winkel einander gleich sind, und folgends ein jeder 60 Grad hält (§. 74.); so sind alle drey Seiten einander gleich.

Lehrsatz.

83. **Der Winkel an dem Mittelpunkte eines Circuls ist zweymal so groß, wie der Winkel an der Peripherie, die mit ihm auf einem Bogen stehet.**

Beweis.

1. o = x + u (§. 74.) Weil aber AC = BC III. (§. 27.); so ist x = u (§. 79.) folgends o = u + 50. u = 2 u.

2. x = 2 y und u = 2 o, wie erst n. 1. erwiesen III. worden. Derowegen ist x + u = 2 y + 2 o. (§. 24. 51. Arithm.)

3. o + x = 2 u + 2 y und o = 2 u, wie n. 1. III. erwiesen worden. Derowegen ist x = 2 y (§. 25. 52. Arithm.). W. Z. E.

Zusatz.

84. Also hat der Winkel an der Peripherie ABD III. zu seinem Maasse den halben Bogen AD, darauf er ste- 50. het; denn der ganze Bogen AD ist das Maaß des Winkels bey dem Mittelpunkte ACD (§. 16.) Wenn der

III. 54. 55. Winkel ACB auf einem halben Circul ADB, oder HBK auf einem grösseren Bogen HIK als einem halben Circul stehet; so ist klar, daß der halbe Bogen AD des Winkels ACD und $\frac{1}{2}$ DB des Winkels DCB, gleichergestalt $\frac{1}{2}$ HI des Winkels HBI und $\frac{1}{2}$ IK des Winkels IBK, folgends $\frac{1}{2}$ ADB, oder ein Quadrant des Winkels ACB und $\frac{1}{2}$ HIK, oder mehr als ein Quadrant des Winkels HBK Maaß sey.

Zusatz.

III. 53. 85. Wenn zwey oder mehrere Winkel ABC und und ADC an der Peripherie eines Circuls sich endigen, und auf einem Bogen AC stehen; so sind sie einander gleich (§. 35).

Zusatz.

III. 54. 86. Jeder Winkel in einem halben Circul ABC ist ein rechter Winkel, denn er stehet auf einem halben Circul, und also ist sein Maaß ein Quadrant (§. 84.).

Zusatz.

III. 55. 87. Wenn der Winkel innerhalb einem Cirkul auf einem kleineren Bogen DE als einem halben Circul stehet; so ist er kleiner als ein rechter Winkel. Stehet er aber auf einem grösseren HDEK, so ist er auch grösser als ein rechter Winkel (§. 86.), und dannenhero in dem ersten Falle spitzig, in dem andern stumpf (§. 18.).

Aufgabe.

III. 54. 88. **Einen Winkelhacken zu probiren, ob er richtig ist, oder nicht.**

Auflösung.

1. Beschreibet nach Belieben einen halben Zirkel ACB, und

2. ziehet nach Gefallen von beyden Enden des Diameters AB bis an die Peripherie die Linien AC und BC.

3. Le-

3. Leget den Winkelhacken mit seinem Winkel an den Punkt C. Wenn die Schenkel desselben die beyden Linien zugleich berühren; so ist er richtig.

Beweis.

Der Winkel ACB ist ein rechter Winkel (§. 86.). Wenn also der Winkelhacken sich in denselben schicket, so ist er richtig (§. 30.) W. Z. E.

Aufgabe.

89. Auf das Ende einer Linie einen Perpendicul aufzurichten. III. 56.

Auflösung.

1. Setzet den Zirkel in einem beliebten Punkt C, und thut ihn auf bis A.
2. Mit dieser Weite bemerket auf der Linie AB den Punkt D.
3. Leget das Lineal auf D und C, und bemerket aus C mit unverrücktem Zirkel den Punkt E.
4. Endlich ziehet die Linie AF: so stehet sie auf AB perpendicular.

Beweis.

Weil AC = CD = EC; so lässet sich aus C durch E, A und D ein halber Cirkel beschreiben (§. 27. 36.). Derowegen ist bey A ein rechter Winkel (§. 86.) und stehet die Linie FA auf AB perpendicular (§. 18.). W. Z. E.

Anders.

Man kann es auch durch Hülfe des Winkelhackens, wie oben (§. 70.) verrichten.

Aufgabe.

90. Eine Linie AB in zwey gleiche Theile zu theilen. III. 57.

Auflösung.

1. Machet aus A und B nach Belieben Durchschnitte in C und D.

2. Ziehet die Punkte derselben mit einer geraden Linie DC zusammen; so theilet sie die Linie AB in zwey gleiche Theile.

Beweis.

Weil AC = CB und AD = DB, CD = CD (§. 20. Arithm.); so ist o = y (§. 51.), und daher ferner auch in den Triangeln ACE und ECB, AE = EB (§. 49.) W. Z. E.

Anmerkung.

III. 58. 91. Man kann es auch mechanisch, das ist, durch Versuchen verrichten. Setzet nemlich einen Cirkel in A ein, und thut ihn nach dem Augenmaaße so weit auf, als beynahe die Hälfte der Linie AB beträget. Schneidet damit ein in C und gleichfalls aus B in D: so werdet ihr ohne Mühe durch das Augenmaaß den Punkt E finden können, wodurch AB in zwey gleiche Theile getheilet wird.

Lehrsatz.

III. 59. **92. In einem Cirkul sind die Sehnen gleicher Bogen AB und DE einander gleich: und wenn die Sehnen gleich sind, so sind auch die Bogen gleich.**

Beweis.

Man ziehe aus dem Mittelpunkte C die Radios AC, CB, CE und CD. Dieselben sind alle einander gleich (§. 27.) Weil nun ferner die Bogen AB und und DE gleich sind; so müssen auch die Winkel ACB und DCE gleich seyn (§. 35.) Derowegen ist auch AB = DE (§. 49.): **welches das erste war.**

Wenn AB = DE, so ist o = x (§. 51.); folgends sind die Bogen AB und DE einander gleich (§. 35.); **welches das andere war.**

Zusatz.

93. Wenn man also einen Circul in gleiche Theile theilet, und die Sehnen der Bogen ziehet; so hat die

Figur

Figur lauter gleiche Seiten (§. 92.); aber auch lauter gleiche Winkel (§. 85.) Derowegen ist es eine reguläre Figur (§ 21.).

93 a) Eine Figur mag soviel Seiten haben, als man will; liegen nur ihre Winkelpunkte in dem Umfang eines einzigen Kreises, so hat sie immer den nämlichen Flächeninhalt, ihre Seiten mögen, in welcher Ordnung man will, auf einander folgen.

Aufgabe.

94. Einen Circulbogen in zwey gleiche Theile zu theilen. III. 60.

Auflösung.

1. Machet aus A und B mit beliebter Eröffnung des Zirkels zwey Durchschnitte in C und D.
2. Ziehet durch die Punkte C und D eine Linie; so ist der Bogen AB in zwey gleiche Theile in E getheilet.

Beweis.

Die Linie CD theilet die Linie AB in F in zwey gleiche Theile, und machet bey F zwey rechte Winkel (§. 90. 18.) Derowegen ist auch AE = BE (§. 49.), folgends sind die Bogen AE und EB einander gleich (§. 92.). W. Z. E.

Lehrsatz.

95. Die Perpendicular-Linie DA, welche die Sehne EF in G in zwey gleiche Theile theilet, gehet durch den Mittelpunkt des Circuls C, und theilet auch den Bogen EDF in zwey gleiche Theile. Und wenn aus dem Mittelpunkt des Circuls C ein Perpendicul CD auf die Sehne EF gezogen wird, theilet es sowol sie, als den Bogen EDF, in zwey gleiche Theile. III. 61.

Beweis.

1. Weil EG = GF und bey G zwey rechte Winkel; so ist EAD = DAF (§. 49.), und also sind die Bogen ED und DF einander gleich (§. 85. 35.); welches das erste war.

2. Es müssen ferner die Sehnen EA und AF (§. 49.), und folgends die Bogen AF und EA (§. 92.) einander gleich seyn. Demnach ist AE + ED + AF + FD (§. 24. Arithm.); und dannenhero AD der Diameter des Circuls, folgends gehet AD durch den Mittelpunkt (§. 13.): welches das andere war.

3. Wenn CG auf EF perpendicular stehet; so sind bey G rechte Winkel (§. 18.) Da nun EC = CF (§. 27.); so ist EG = GF und ECD = DCF (§. 71.); folgends sind die Bogen ED und DF einander gleich (§. 35.); welches das dritte war.

Aufgabe.

III. 62. 96. Einen Winkel BAC in zwey gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

1. Setzet den Zirkel in A, und bemerket mit beliebter Eröffnung die Punkte D und E.
2. Daraus machet einen Durchschnitt in F und
3. ziehet die Linie AF: diese theilet den Winkel A in zwey gleiche Theile.

Beweis.

Weil AD = AE und DF = EF, AF = AF (§. 20. Arithm.); so ist o = x (§. 51.) W. Z. E.

96 a) Die Theilung eines Winkels in 3 gleiche Theile ist eine Aufgabe der höheren Geometrie.

Aufgabe.

III. 63. 97. Durch drey gegebene Punkte A, B, C, einen Cirkul zu beschreiben.

Auf-

Auflösung.

1. Machet aus A und B mit beliebter Eröffnung die Durchschnitte D und E, und ziehet die Linie D E.
2. Gleichergestalt machet aus B und C die Durchschnitte F und G, und ziehet die Linie F G.

Wo die beyden Linien F G und D E einander durchschneiden, nemlich in H, daselbst ist der Mittelpunkt des Circuls.

Beweis.

Wenn man von A bis B, ingleichen von B bis C eine Linie ziehet; so sind selbige Sehnen zweyer Bogen von dem verlangten Circul (§. 13.) Nun stehen die beyden Linien D E und F G auf diesen Sehnen A B und B C perpendicular, und theilen sie in zwey gleiche Theile (§. 90.) Derowegen gehen beyde durch den Mittelpunkt des Circuls (§. 95.) Und ist demnach derselbe in H, wo die beyden Linien einander durchschneiden. W. Z. E.

Aufgabe.

97 a) Aus einer Seite eines Dreyecks und dem gegenüberstehenden Winkel den Halbmesser des Kreises zu finden, worinn sich das Dreyeck verzeichnen läßt.

Auflösung.

1. Die gegebene Seite sey A B und der gegebene Winkel p; man verdoppele diesen Winkel, und ziehe ihn verdoppelt von 180 Gr. ab. X. 138.
2. Den Rest halbire man, und trage die Hälfte auf beyden Enden der gegebenen Linie A B, so daß x y diese Hälften sind.
3. Der Punkt z, worin die Schenkel A F, B E einander durchschneiden, ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.
4. Man mag nun aus A und B, in welchen Punkt der Peripherie man will (z. B. in C D) grade Linien zusammenziehen, so hat man allemal das verlangte Dreyeck.

Beweis.

Es ist $x + y = 180$ Gr. $- 2p$ und zugleich $= 180$ Gr. $- z$, also $z = 2p$; ferner die Winkel bey C, D $= \frac{1}{2} z = p$

= p (§. 83); also jedes Dreyeck ACB, ADB u. d. g. das in der Aufgabe bestimmte.

Aufgabe.

III. 64. 98. **Auf eine gegebene Linie AB ein Quadrat zu machen.**

Auflösung.

1. Richtet in A einen Perpendicul auf (§. 70. 89.), und machet ihn so groß wie AB.
2. Aus C und B machet mit AB einen Durchschnitt in D, und
3. ziehet die Linien CD und BD.

Aufgabe.

III. 65. 99. **Aus zwey gegebenen Linien AC und BC ein Rectangulum zu machen.**

Auflösung.

1. Setzet BC auf AB perpendicular (§. 89.)
2. Ziehet aus A mit BC einen Bogen, und aus C mit AB einen andern, der den ersten in D durchschneidet.
3. Endlich ziehet die Linie CD und DA.

Aufgabe.

III. 66. 100. **Aus einer gegebenen Linie AB und einem schiefen Winkel einen Rhombum zu machen.**

Auflösung.

1. Setzet auf die Linie AB den gegebenen Winkel A (§. 48.) und machet AC = AB.
2. Aus C und B machet mit AB einen Durchschnitt in D.
3. Ziehet die Linie CD und DB.

Auf-

Aufgabe.

101. Aus zwey gegebenen Linien A B und III. AC nebst einem schiefen Winkel A einen Rhom- 67. boidem zu machen.

Auflösung.

1. Richtet in A an dem Ende der einen gegebenen Linie AB den gegebenen Winkel auf (§. 48.), und machet AC der andern gegebenen Linie gleich.
2. Ziehet aus B mit AC einen Bogen, und aus C mit AB einen andern, der den ersten in D durchschneidet.
3. Endlich ziehet die beyden Linien CD und DB.

Lehrsatz.

102. Ein Quadrat, Rectangulum, Rhombus IV. und Rhomboides, wird von der Diagonallinie 68. AD in zwey gleiche Theile getheilet; die beyden einander entgegengesetzte Winkel sind einander gleich, uud die entgegengesetzte Seiten AB und CD, AC und BD parallel.

Beweis.

In allen diesen Figuren AC=DB und CD=AB (§. 20.) Derowegen sind die Triangel ACD und ABD einander gleich, ingleichen x=x und o=o, u=u (§. 51.), folgends AB mit CD und AC mit BD parallel (§. 73.). W. Z. E.

Zusatz.

103. Also sind alle diese Vierecke Parallelogramma (§. 23.)

Lehrsatz.

103 a) Die Winkel in jedem Viereck machen allemal zusammen 360 Gr.

Beweis.

Jedes Viereck läßt sich durch eine Diagonale in zwey Dreyecke zerlegen, deren 6 Winkel die vier des Vierecks ausmachen,

machen, und die also zusammen 2 ∠ 180 Gr. = 360 Gr. betragen (§. 74.)

Lehrsatz.

103 b) Jedes Viereck wird durch fünf Stücke, worunter höchstens drey Winkel seyn dürfen, bestimmt.

Beweis.

Jedes Viereck läßt sich durch eine Diagonale in zwey Dreyecke zerlegen, welche völlig bestimmt sind, wenn von jedem drey Stücke gegeben sind. Sind nun 5 Stücke vom Viereck gegeben, so hat man allemal drey Stücke von dem einen Dreyeck, das also nebst der Diagonale bestimmt ist. Die beyden andern Stücke aber bestimmen nunmehr nebst der Diagonale auch das andere Dreyeck.

Aufgabe.

103 c) **Aus 5 gegebenen Stücken eines Vierecks, worunter höchstens 3 Winkel begriffen sind, das Viereck zu verzeichnen.**

I.

Aus drey Seiten und zween einander gegenüber stehenden Winkeln.

Auflösung.

X. 139. Es seyen die Seiten Mm, MN, Nn nebst den beyden Winkeln x und y gegeben:

1. Aus den beyden Seiten MN, Mm und dem eingeschlossenen Winkel y verzeichne man das Dreyeck MmN.
2. Nun beschreibe man einen Kreis, worin die Punkte N und m nebst der Spitze des Winkels x liegen (§. 97 a).
3. Die gegebene Linie Nn fasse man mit dem Zirkel, und beschreibe damit aus N einen Bogen ab; wo dieser den Kreis durchschneidet, da ist der vierte Punkt des Vierecks.

II.

Aus zween einander nicht gegenüberstehenden Winkeln und drey Seiten, welche einen der gegebenen Winkel einschließen.

Auflösung.

Man verzeichnet zuerst das eine Dreyeck, welches aus den beyden gegebenen Seiten mit dem gegebenen eingeschlossenen

senen Winkel besteht, und setzt dann das andere ohne Mühe an.

III.

Aus drey Seiten und den beyden Winkeln, welche auf der unbekannten Seite liegen, d. i. aus AB, AD, DC und den beyden Winkeln x und y.

Auflösung.

X. 140. 1. Man verzeichne zuerst eine gegebene Seite mit dem gegebenen anliegenden Winkel, z. B. die Seite AB mit dem Winkel x, unter welchem man die grade Linie BE von unbestimmter Länge ansetzt.

2. Durch einen in BE willkührlich angenommenen Punkt m ziehe man unter dem Winkel Bmn, der dem gegebenen gleich ist, eine grade Linie mn, welche der gegebenen CD gleich ist.

3. Durch n ziehe man eine grade Linie FG der BE parallel.

4. Aus A beschreibe man mit einem Halbmesser, welcher der gegebenen Seite AD gleich ist, einen Bogen p q, welcher die grade Linie FG in D durchschneidet.

5. Jetzt ziehe man aus D auf BE eine Linie DC der mn gleichlaufend, und zugleich die Linie DA, so hat man das gesuchte Viereck ABCD.

IV.

Aus drey Seiten und zween Winkeln, welche beyde zwischen den gegebenen Seiten liegen.

Die Auflösung ergiebt sich aus der bekannten Verzeichnung der Dreyecke.

V. u. VI.

Aus 2 Seiten und 3 Winkeln.

1ter Fall, wenn die zwo Seiten an einander liegen.

Auflösung.

Die bekannte Verzeichnung der Dreyecke ist hier schon hinreichend.

2ter Fall, wenn die zwo Seiten einander gegenüber liegen, z. B. BC, AD.

Auf=

Auflösung.

1. Man ziehe die eine Seite BC und von deren Endpunkten unter den gegebenen Winkeln x und y unbestimmte grade Linien BE, CF.

2. Durch einen willkührlich in BE angenommenen Punkt ziehe man unter dem gegebenen Winkel y die grade Linie m n so groß als die gegebene AD.

3. Durch n ziehe man nD der BE gleichlaufend.

4. Zieht man nun durch den Durchschnittspunkt D die Linie DA der m n parallel, so ergiebt sich das verlangte Viereck ABCD.

Aufgabe.

104. Den Winkel in einem regulären Vieleck zu finden.

Auflösung.

1. Theilet 360 durch die Zahl der Seiten des Vieleckes.

2. Was herauskommet, ziehet von 180 ab; so bleibet die Zahl der Grade für den gegebenen Winkel übrig.

Z. E. Im Sechsecke dividiret 360 durch 6, und ziehet den Quotienten 60 von 180 ab: so kommet für den Winkel des Sechsecks ABC 120 Gr.

Beweis.

IV. 69. Es sey ABC der verlangte Winkel. Man beschreibe durch die drey Punkte A, B, C, einen Circul (§. 97.). Weil AB = BC (§. 21.); so sind auch die Bogen AB und BC einander gleich (§. 92.). Da nun AD, der halbe Bogen ADC, das Maaß des Winkels B ist (§. 84.); so darf man nur den Bogen AB von dem halben Cirkul BAD abziehen; wenn man den Bogen AD oder den Winkel B wissen will. W. Z. E.

Auf-

Aufgabe.

105. **In einem jeden Vielecke die Summe aller Winkel zu finden.** IV. 70.

Auflösung.

1. Multipliciret 180 durch die Zahl der Seiten.
2. Von dem Produkte ziehet 360 ab; so bleibet die Summe der Winkel übrig. Z. E.

	180		180
V Ecke	5	VI Ecke	6
	900		1080
	360		360
	540		720

Beweis.

Ein jedes Vieleck kann aus einem angenommenen IV. Punkte F in so viel Triangel getheilet werden, als Sei- 70. ten sind. Wenn ihr 180 durch die Zahl der Seiten multipliciret, so kommen die Winkel in allen Triangeln heraus (§. 74.) Die Winkel um den Punkt F gehören nicht zu dem Vielecke, machen aber jederzeit 360 Gr. (§. 42.) Derowegen, wenn ihr 360 von oben gefundenem Produkte abziehet, bleibet die Summe der Polygon-Winkel übrig. W. Z. E.

Aufgabe.

106. **Auf eine gegebene Linie AB ein begehrtes reguläres Vieleck zu beschreiben.** IV. 71.

Auflösung.

1. Traget in A und B die halben Polygonwinkel, so werden sich die Seiten des gleichschenklichten Triangels ABC in Mittelpunkte des Circuls C durchschneiden.
2. Beschreibet aus C mit CA den Circul, und traget die Seite AB darinnen herum.

Auf-

Aufgabe.

IV. 72. 107. In einem gegebenen Circul ein regulär Vieleck zu beschreiben.

Auflösung.

1. Dividiret 360 durch die Zahl der Seiten; so habet ihr die Grösse des Winkels ACB.
2. Diesen traget an den Mittelpunkt des Circuls C (§. 48.); so giebet sich die Seite des Vielecks AB, die ihr
3. in dem Circul herumtragen könnet.

Lehrsatz.

IV. 72. 108. Die Seite des Sechsecks AB ist dem Radio des Circuls AC gleich.

Beweis.

Der Winkel ACB ist 60 Gr. (§. 104.). Dannenhero sind die übrigen A und B 120 Gr. (§. 77.) Weil nun AC = BC (§. 27.): so ist auch A = B (§. 79.), folgends ist jeder von beyden 60 Gr., und also dem Winkel C gleich. Derowegen ist auch AB = AC (§. 82.). W. Z. E.

Zusatz.

109. Also darf man nur den Radium sechsmal in dem Circul herumtragen, wenn man in demselben ein Sechseck beschreiben soll.

Zusatz.

110. Und wenn man auf eine gegebene Linie ein Sechseck machen soll, darf man nur einen gleichseitigen Triangel auf dieselbe setzen (§. 53), so ist die Spitze C der Mittelpunkt des Circuls, darin es kommen soll.

Aufgabe.

IV. 73. 111. Aus allen Seiten der Figur, und drey Diagonalen weniger, als Seiten sind, eine jede Figur zu zeichnen.

Auf-

Auflösung.

Weil eine jede Figur durch Diagonallinien in zwey Triangel weniger, als Seiten sind, zertheilet wird; so hat man nichts nöthig, als (§. 55.) immer einen Triangel auf den andern zu setzen.

Aufgabe.

112. Aus allen Seiten der Figur, und drey Winkeln weniger, als Seiten sind, eine jede Figur zu zeichnen. IV. 74.

Auflösung.

1. Ziehet die Linie AB, so einer Seite gleichet, und traget auf A und B die gehörigen Winkel A und B (§. 48.): so lassen sich
2. die beyden Seiten EA und CB ansetzen.
3. Wenn ihr nun in E den gehörigen Winkel hinsetzet (§. 48.); so lässet sich ED ansetzen, und DC ziehen.
4. Oder mit den letzten beyden ED und CD machet aus E und C einen Durchschnitt in D, so ist die Figur geschlossen.

Anmerkung.

113. Wenn alle Winkel weniger einen gegeben werden; so dürfen zwey Seiten nicht gegeben werden.

Aufgabe.

114. Ein Quadrat auszumessen. IV. 75.

Auflösung.

1. Messet die Seite des Quadrats, und
2. multipliciret sie durch sich selbst; so kommet der Inhalt der Fläche heraus.

Seite des Quadrats 345″

345

1725
1380
1035

Inhalt der Fläche 119025″

Beweis.

Wenn man eine Fläche ausmessen will, muß man auch eine Fläche zum Maaßstabe annehmen. Da nun das Quadrat lauter rechte Winkel und gleiche Seiten hat, ist selbiges zum Maaßstabe anzunehmen beliebet worden. Und demnach heisset eine Quadratruthe ein Quadrat, welches eine Ruthe lang und eine Ruthe breit ist; ein Quadratschuh ein Quadrat, so einen Schuh lang und einen Schuh breit ist, u. s. w. Wenn nun die Seite AB z. E. in vier gleiche Theile eingetheilet ist, oder 4 Schuhe hält; so ist klar, daß man finden kann, wie viel schuhige Quadrate oder Quadratschuhe in dem großen Quadrate ABCD enthalten sind, wenn man die Seite AB mit sich selbst multipliciret. Denn im grossen Quadrat müssen so viel Reihen der kleineren seyn, und in jeder Reihe so viel kleine Quadrate, als die Seite AB Theile hat.

IV. 75.

Zusatz.

115. Wenn die Seite des Quadrats 10 ist: so wird der Inhalt desselben 100 seyn. Da nun eine Ruthe im Längenmaaße 10 Schuhe hat, ein Schuh 10 Zoll u. s. w. so muß im Flächenmaaße eine Quadratruthe 100 Schuhe, ein Quadratschuh 100 Quadratzolle u. s. w. haben.

Zusatz.

116. Daher kann man eine gegebene Zahl gar leicht in Quadratzolle, Quadratschuhe, Quadratruthen resolviren, wenn man nur von der Rechten gegen die

Linke

Linke 2 Zahlen für die Zolle, 2 für die Schuhe abschneidet; denn das übrige bleibet für die Ruthen. Z. E. wenn man 119025 Zolle hat, so sind es 11 Ruthen, 90 Schuhe 25 Zolle.

Aufgabe.

117. **Ein** Rectangulum A B C D **auszu-** IV. **messen.** 76.

Auflösung.

1. Messet die Breite A B, ingleichen die Höhe B C.
2. Multipliciret jene durch diese; so kommet der verlangte Inhalt der Figur heraus.

Z. E. Es sey A B = 3° 4′ 5″
A D = 1 2 3

	10	3 5
	69	0
	345	

so ist der Inhalt = 4° 24′ 3 5″.

Beweis.

Der Beweis ist eben wie in der vorhergehenden Aufgabe.

Lehrsatz.

118. **Zwey** Parallelogramma A B D C **und** IV. **EFDC, die Eine** Basin **oder Grundlinie** C D **und** 77. **Eine** Höhe A C **haben, sind einander gleich.**

Beweis.

Weil A C = B D, E C = F D und A E = B F (§. 20. Geom. und §. 24. Arithm.); so ist △ A E C = △ B F D (§. 51.), folgends, wenn man beyderseits den Triangel B E G wegnimmt, A B G C = E G D F (§. 25. Arithm.) Addiret man nun beyderseits den Triangel C G D; so ist auch A B C D = E C D F (§. 24. Arithm.) W. Z. E.

Zusatz.

119. Also müssen auch die Triangel, so gleiche Grundlinien und Höhen haben, einander gleich seyn (§. 102.).

Zusatz.

120. Ein Triangel ist die Hälfte des Parallelogrammi, wenn er mit ihm eine gleiche Grundlinie hat, und zwischen einerley Paralkellinien stehet (§. 22.).

Aufgabe.

IV. 78. 121. Den Inhalt eines Rhombi und Rhomboidis auszurechnen.

Auflösung.

1. Nehmet die eine Seite AB für die Grundlinie an, und lasset darauf aus C ein Perpendicul CE fallen (§. 69.).
2. Multipliciret die Grundlinie AB durch die Höhe CE; so kommet der verlangte Inhalt heraus.

Z. E. Es sey

AB = 4 5 6″
CE = 2 3 6

1 8 2 4
1 3 6 8
9 1 2

so ist der Inhalt = 10°6 7′ 0 4″

Beweis.

Der Rhombus oder Rhomboides ABCD ist gleich einem Rectangulo, dessen Grundlinie AB, die Höhe aber CE ist (§. 118. 103.). Nun findet man den Inhalt des Rectanguli, wenn man AB durch CE multipliciret (§. 117.). Derowegen wird der Inhalt des Rhombi und Rhomboidis gleichfalls gefunden, wenn man AB durch CE multipliciret. W. Z. E.

Auf-

Aufgabe.

122. Den Inhalt eines jeden Triangels zu IV. finden. 79.

Auflösung.

1. Nehmet die Seite AB für die Grundlinie an, und lasset darauf aus C die Perpendicularlinie CD fallen (§. 69.)
2. Messet die Linie AB und CD, und multipliciret sie durch einander.
3. Was herauskommt, dividiret durch 2; so habet ihr den Inhalt des Triangels.

Beweis.

Wenn ihr AB durch CD multipliciret; so habet ihr den Inhalt eines Parallellogramms, dessen Seiten *AB* und *DC* sind (§. 117. 121.). Da nun der Triangel die Hälfte von diesem Parallelogrammo ist (§. 120.); so dürfet ihr den gefundenen Inhalt nur durch 2 dividiren, um den Inhalt des Triangels zu haben. W. Z. E.

Anders.

Man darf nur die Grundlinie AB durch die halbe Höhe CD, oder auch die Höhe CD durch die halbe Grundlinie AB multipliciren, wenn man den Inhalt des Triangels haben will; wie aus beygesetztem Exempel zu ersehen.

AB 3° 4′ 2″	AB 3° 4′ 2″	½ AB 1° 7′ 1″
CD 2 3 4	½ CD 1 1 7	CD 2 3 4
1 3 6 8	2 3 9 4	6 8 4
1 0 2 6	3 4 2	5 1 3
6 8 4	3 4 2	3 4 2
800 2 8	40 0 1 4 ACB	40 0 1 4

2) 800 2 8

400 1 4 ACB

Aufgabe.

IV. 80. 123. **Den Inhalt einer geradlinichten Figur zu finden.**

Auflösung.

Weil jede Figur sich aus einem Winkel B durch die Diagonallinie EB, BD, in so viel Triangel zertheilen lässet, als Seiten sind, weniger zwey, als z. E. das Fünfeck ABCDE in drey Triangel ABE, BED und BCD, so darf man nur nach der vorhergehenden Aufgabe jeden Triangel besonders ausrechnen, und sie hernach in eine Summe addiren.

Oder, wenn zwey Höhen CF und EG auf eine Grundlinie gezogen werden; so kann man das Trapezium EBCD auf einmal finden, wenn man entweder die halbe Grundlinie BD durch die Summe der Höhen EG und CF, oder die ganze Grundlinie durch die halbe Summe der Höhen multiplicîret.

Exempel.

$\frac{1}{2}$BD = 4° 3′	$\frac{1}{2}$BD = 4° 3′	$\frac{1}{2}$EB = 4° 2′
CF = 3 5	EG = 4 5	AH = 3 0
215	215	△AEB = 1260′
129	172	

△ECD = 1505, △EBD = 1935′
△AEB = 1260
△BCD = 1505

Inhalt der Figur = 4700′

Zusatz.

IV. 81. 124. Ein reguläres Vieleck kann aus dem Mittelpunkt C des Circuls, darein es sich beschreiben lässet, in so viel gleiche Triangel, als Seiten sind, eingetheilet werden. Denn die Grundlinien dieser Triangel AB, BE, EF, &c. sind einander gleich (§. 21.), und die Schenkel derselben AC, CB, CE, CF &c. gleichfalls (§. 27.)

(§. 27.) Derowegen sind auch die Triangel selbst einander gleich (§. 51.) Wenn ihr nun den Inhalt eines von diesen Triangeln findet (§. 122.), und denselben durch die Zahl der Seiten multipliciret; so kommet der Inhalt des Vielecks heraus.

Z. E. $\frac{1}{2}$ AB = 2° 7′
DC = 2 9

2 4 3
5 4

△ ABC 7 8 3′
Zahl der Seiten 5

Inhalt des Vcks = 39° 1 5′.

Zusatz.

125. Daher ist ein reguläres Vieleck einem Triangel gleich, dessen Grundlinie so groß ist, wie die Peripherie des ganzen Vieleckes, die Höhe aber so groß als die Höhe CD eines von den Triangeln, in welche er aus dem Mittelpunkte C zertheilet worden (§. 119.). IV. 82.

Zusatz.

126. Wenn man die Seiten des Vielecks, so in einem Circul beschrieben worden, unendlich klein annimmt, so werden sie sich endlich in der Peripherie des Circuls verlieren. Und alsdann wird die Höhe der Triangel CD mit dem Radio BC übereinkommen. Derowegen ist der Circul einem Triangel gleich, dessen Grundlinie so groß ist, als die Peripherie des Circuls, die Höhe aber dem Radio desselben gleich (§. 125.) IV. 81.

Zusatz.

127. Der Ausschnitt eines Circuls ACB ist also einem Triangel gleich, dessen Grundlinie so groß, als der Bogen AB, die Höhe aber so groß, als der Radius AC. IV. 83.

Zusatz.

128. Wenn also die Peripherie und der Diameter eines Circuls gegeben werden; so kann man den Inhalt finden, wenn jene durch den vierten Theil von diesem multipliciret wird.

Anmerkung.

129. Es haben sich von alten Zeiten her viele unterwunden, die wahre Verhältniß des Diameters eines Circuls zu seiner Peripherie zu erfinden; allein es ist noch keinem gelungen, unerachtet heut zu Tage die Kunst zu erfinden, bey den Mathematikern sehr hoch gestiegen. Unterdessen haben sich einige mit gutem Fortgange bemühet, eine Verhältniß auszurechnen, die beynahe zutrift. Archimedes hat in einem Büchlein von der Circul-Messung in dem andern Lehrsatze zuerst erwiesen, daß der Diameter eines Circuls zu seiner Peripherie sich beynahe verhalte, wie 7 zu 22. Weil aber die Verhältniß in großen Circuln etwas zu viel bringet, haben andere eine genauere gesuchet. Niemand aber hat sich in diesem Stücke mehr Mühe gegeben, als Ludolph von Cölln, welcher endlich herausgebracht, daß, wenn der Diameter des Circuls 100 000 000 000 000 000 000 000 ist, die Peripherie beynahe 314 159 265 358 979 323 846 sey. Allein da diese Zahlen im Rechnen viel zu weitläuftig sind: nimmt man beyderseits die ersten drey Ziffern, und setzet die Verhältniß des Diameters zu der Peripherie des Circuls, wie 100 zu 314, in welcher Ptolomäus, Vieta, Hugenius und Ludolph von Cölln, übereinkommen. In kleinen Zahlen ist keine genauere Verhältniß, als Adrianus Metius gegeben, wie 113 zu 355. Daß aber alle Diameter zu ihren Peripherien einerley Verhältniß haben, ist leicht zu begreifen. Denn wenn in verschiedenen Circuln die Diameter zu ihren Peripherien verschiedene Verhältniß hätten: könnten sie dadurch von einander unterschieden werden, und daher unmöglich einander ähnlich seyn, welches doch oben erwiesen worden (§. 34.).

129a) Unten (§. 145a) sollen noch einige hierher gehörige Bemerkungen nachgeholt werden.

Lehrsatz.

130. Der Inhalt des Circuls verhält sich zum Quadrate seines Diameters, wie beynahe 785 zu 1000.

Beweis.

Beweis.

Wenn der Diameter 100 Theile hat, bekommet die Peripherie 314. (§. 129.); also ist der Inhalt des Circuls 7850 (§. 128.), das Quadrat des Diameters aber 10000 (§. 114.); folgends verhält sich jener zu diesem, wie 6850 zu 10000, das ist, wenn man beyderseits mit 10 dividiret, wie 785 zu 1000 (§. 59. Arithm.) W. Z. E.

Lehrsatz.

131. **Die Flächen der Circul verhalten sich gegen einander, wie die Quadrate ihrer Diameter.**

Beweis.

Wie sich die Fläche des einen Circuls zu dem Quadrate seines Diameters, so verhält sich die Fläche des andern Circuls zu dem Quadrate seines Diameters, (§. 120. 130.) Derowegen verhält sich auch die Fläche des einen Circuls zu der Fläche des andern, wie das Quadrat des einen Diameters zu dem Quadrate des andern (§. 83. Arithm.). W. Z. E.

Aufgabe.

132. **Es wird gegeben der Diameter des Circuls, man soll die Peripherie finden.**

Auflösung.

Suchet zu 100; 314 und dem gegebenen Diameter die vierte Proportionalzahl (§. 85. Arithm.) Diese ist die verlangte Peripherie (§. 129).

Es sey der Diameter 56′. Sprechet

100 : 314 = 56 : x

5 6

1884

1570

17°5′8″4‴ Peripherie des Circuls = x.

Aufgabe.

133. Es wird gegeben die Peripherie des Circuls (17584‴), man soll den Diameter finden.

Auflösung.

Suchet zu 314, 100 und der gegebenen Peripherie 17584‴ die vierte Proportionalzahl (§. 85. Anithm.); so kommet der verlangte Diameter 56′ heraus (§. 129.).

$$314 = 100 : 17584 : x$$

$$\frac{100}{1758400}$$

xx	
xxx	
xxxxxx	$5°6'0''0'''$ Diameter. $= x$
xxxxx	
xxx	
xx	

Aufgabe.

134. Es wird gegeben der Diameter (oder die Peripherie) des Circuls, man soll den Inhalt desselben finden.

Auflösung.

1. Suchet erstlich die Peripherie (§. 132.), oder den Diameter (§. 133.).

2. Multipliciret die Peripherie durch den vierten Theil des Diameters (§. 128.).

Z. E. Es sey der Diameter 5600‴; so ist die Peripherie 17584‴; folgends der Inhalt des Circuls 24617600‴.

Anders.

Multipliciret den Diameter (56′) durch sich selbst, und suchet zu 1000; 785 und dem gefundenen Quadra-

te

te des Diameters 3136 die vierte Proportionalzahl, 246176″ (§. 85. Arithm.); so habet ihr den verlangten Inhalt des Circuls (§. 130.).

Aufgabe.

135. Es wird gegeben der Inhalt des Circuls, man soll den Diametrum finden.

Auflösung.

1. Suchet zu 785; 1000 und dem gegebenen Inhalt des Cirkuls 246176″ die vierte Proportionalzahl 313600 (§. 85. Arithm.)

2. Hieraus ziehet die Quadratwurzel 56. (§. 77. Arithm.), diese ist der verlangte Diameter (§. 130.).

Zusatz.

136. Wollet ihr die Peripherie wissen, so könnet ihr, nachdem der Diameter bekannt worden, dieselbe nach (§. 132.) suchen.

Aufgabe.

137. Es wird gegeben der Radius des Cir- IV.
culs AC (6′) und die Grösse des Bogens AB 83.
(6°), man soll den Inhalt des Ausschnittes oder Sectoris ABC finden.

Auflösung.

1. Suchet zu 100; 314 und dem Radio AC (§. 85. Arithm.) die vierte Proportionalzahl 1884‴. Diese ist die halbe Peripherie (§. 132. Geom. und §. 59. Arithm.)

2. Suchet ferner zu 180 Gr., dem gegebenen Bogen 6 Gr. und der gefundenen halben Peripherie 1384‴ die vierte Proportionalzahl $62\frac{4}{7}$‴ (§. 85. Arithm.) so ist euch der Bogen AC in Linien bekannt.

3. Die-

3. Diese multipliciret durch den vierten Theil des Diameters 300‴; so kommet der Inhalt des Ausschnittes ABC 18840‴ heraus (§. 123. 127.)

Lehrsatz.

IV. 138. **Wenn zwey Parallelogramma ABCD**
84. **und BEFD einerley Höhe AC haben; verhalten sie sich gegen einander wie ihre Grundlinien CD und DF: hingegen wie ihre Höhen, wenn die Grundlinien gleich sind.**

Beweis.

Den Inhalt des Parallelogramms AD bekommet man, wenn man seine Grundlinie CD durch AC multipliciret; hingegen den Inhalt des Parallelogramms BF, wenn seine Grundlinie DF durch AC multipliciret wird (§. 117.) Also verhalten sich die beyden Parallelogrammen, wie die Produkte aus AC in CD, und aus AC in DF, das ist, wie CD zu DF (§. 59. Arithm.): **welches das erste war.**

Auf eben solche Art wird erwiesen, daß wenn die Grundlinien gleich sind, die Parallelogrammen sich wie die Höhen verhalten: **welches das andere war.**

Zusatz.

139. Weil jeder Triangel als die Hälfte eines Parallelogramms betrachtet werden kann (§. 120.); so müssen auch die Triangel von gleicher Höhe sich wie ihre Grundlinien; und die auf gleichen Grundlinien, wie ihre Höhen verhalten.

Aufgabe.

V. 140. **Ein Parallelogramm ABEC aus ei-**
85. **nem gegebenen Punkte D in zwey gleiche Theile zu theilen.**

Auflösung.

Machet EF = AD, und ziehet die Linie DF; so sind die beyden Trapezia ADFC und DB″EF einander gleich.

Beweis.

Beweis.

Die Triangel ABC und BCE sind einander gleich (§. 102.) Weil AB = EC und diese Linien einander parallel (§. 102.), über dieses AD = EF; so ist ferner o = x und y = u (§. 72.), und FC = DB (§. 25. Arithm.). Derowegen ist auch △ DBG = △ GCF (§. 50.), folgends das Trapezium ACFD dem Trapezio DFEB gleich (§. 24. 25. Arithm.). W. Z. E.

Aufgabe.

141. **Es wird gegeben der Inhalt eines Triangels (36′) und seine Grundlinie (18′) man soll die Höhe finden.**

Auflösung.

Durch die halbe Grundlinie (9′) dividiret den Inhalt des Triangels (36′); so kommet die Höhe (4′) heraus (§. 122.).

Aufgabe.

142. **Eine jede gradlinichte Figur in so viel Theile zu theilen, als man begehret.**

Auflösung.

1. Rechnet den Inhalt der Figur aus (§. 123.) und theilet ihn in die begehrten Theile, z. E. in drey. V. 86.
2. Den Inhalt des Triangels AED ziehet von dem dritten Theile der Figur ab, und was übrig bleibet, dividiret durch $\frac{1}{2}$ AD; so kommet die Höhe des Triangels ADI heraus, den man noch zu AED hinzusetzen muß, damit AEDI der dritte Theil der Figur wird (§. 141.)
3. In der Weite dieser Höhe ziehet mit DA eine Parallellinie (§. 67.), welche AB in I durchschneidet; so könnet ihr die Linie DI ziehen.
4. Halbiret den dritten Theil der Figur, und dividiret die Hälfte durch $\frac{1}{2}$ DI, so kommet die Höhe des Triangels DIK heraus, die dem sechsten Theile der Figur gleich ist.

5. In

5. In der Weite gedachter Höhe ziehet mit DI eine Parallellinie (§. cit.), damit sich der Punkt K giebet.

6. Den sechsten Theil der Figur dividiret durch $\frac{1}{2}$ DK, und mit der Weite des Quotienten ziehet wie vorhin eine Linie mit DK parallel, damit ihr den Punkt L findet, und folgends die Linie LK ziehen könnet, welche den anderen Theil DIKL abschneidet, und zugleich den dritten LKBC giebet.

Z. E. Es sey AD 516″, AC 580″, EH 154″, BG 315″, DF 375″,; so ist AED 39732″, ABC 91350″ ADC 108750″ und daher die ganze Figur 239832″, der dritte Theil 79944″, der sechste 39972″, die Höhe des ΔDIA 156″, $\frac{1}{2}$ DI 265″, die Höhe des ΔDIK 151″, $\frac{1}{2}$ DK 287″, und die Höhe des ΔDKL 139″.

Anmerkung.

143. Wenn die Eintheilung auf dem Papier geschehen: so werden auf dem Felde die Punkte I, K und L durch die Grösse der Linien AI, IK und DL leicht gefunden.

Lehrsatz.

V. 87. 144. In einem rechtwinklichten Triangel ABC ist das Quadrat ACFG der größten Seite AC den Quadraten BCED und ABIH der beyden übrigen Seiten BC und BA gleich.

Beweis.

Man ziehe die Linien AE und BF, ingleichen BK mit AG parallel (§. 67.). Weil der Triangel BCF mit dem Rectangulo LCFK eine Grundlinie CF hat, und mit ihm zwischen den beyden Parallellinien CF und BK stehet; so ist er die Hälfte von demselben (§. 120.). Eben so, weil der Triangel ACE mit dem Quadrate BCED eine Grundlinie CE hat, und zwischen den beyden Parallellinien AD und CE stehet; so ist er die Hälfte von dem-

demselben (§. 120.). Nun ist CF = AC und BC = CE (§. 20.), und der Winkel ACE dem Winkel BCF gleich (§. 24. Arithm.) weil nemlich ACF = BCE = 90° (§. 20. 37.). Derowegen sind die ganzen Triangel ACE und ECD (§. 49.), folgends auch das Quadrat BDEC und das Rectangulum LCFK einander gleich (§. 26. Arithm.)

Da nun auf gleiche Weise erwiesen wird, daß das Quadrat AHBI dem Rectangulo ALKG gleich sey; so ist klar, daß die beyden Quadrate AHIB und BCDE zusammengenommen dem Quadrate AGFC gleich sind. W. Z. E.

Anmerkung.

145. Dieser Lehrsatz wird von seinem Erfinder Pythagoras der Pythagorische Lehrsatz, und wegen seines vortreflichen Nutzens durch die ganze Mathematik von einigen Magister Matheseos genennet.

145 a) Die Wahrheit des Pythagorischen Lehrsatzes ließe sich auch auf folgende Art beweisen:

1. aBb sey ein rechtwinklichtes Dreyeck; Bb = b, Ba = a; nun verlängere man die beyden Seiten Bb, Ba so daß BC = BA = a + b wird, und verzeichne das Quadrat ABCD. IX. 5.

2. Jetzt nehme man Cc = Dd = b, und verzeichne das Viereck abcd, welches ein Quadrat ist, weil es 4 gleiche Seiten hat, und überdas jeder Winkel z = 180 Gr. — (x + y) = 90 Gr. ist.

3. Der Flächeninhalt des Quadrats ABCD sey = F, der des Quadrats abcd = β, und der von jedem der 4 rechtwinklichten Dreyecke = α, so ist $F = \beta + 4\alpha$; es ist aber auch $F = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; also

$$\beta + 4\alpha = a^2 + 2ab + b^2;$$ oder, weil $\alpha = \frac{ab}{2}$ ist,

$$\beta + 2ab = a^2 + 2ab + b^2;$$ demnach $\beta = a^2 + b^2$.

145 b) Es hat seinen sehr großen Nutzen für Anfänger der Mathematik, wenn man ihre Denkkraft frühzeitig durch mancherley Zusammenstellung und Anwendung schon erlernter

ter Sätze zu schärfen sucht. Die Ideen werden dadurch vervielfältigt, der Verstand auf die Verbindung dieser Ideen zur Erfindung neuer Wahrheiten geleitet, und eben hierdurch der Erfindungsgeist und Scharfsinn frühzeitig rege gemacht.

145 c) Wenn man den Halbmesser eines Kreises = 1 setzt, so weiß man aus (§. 109.), daß auch die Seite des Vlecks = 1 ist. Hieraus läßt sich nun mittelst des Pythagorischen Lehrsatzes die Seite des XIIecks durch Ausziehung der Quadratwurzel so genau man will finden. Nämlich $\sqrt{(1 - \frac{1}{4})}$ oder $\sqrt{0,75} = 0,866025\ldots$ ist das Perpendikel aus des Kreises Mittelpunkt auf die Seite des Vlecks; und nun ist die Verlängerung dieses Perpendikels bis zur Peripherie

$$= 1 - 0,866025\ldots = 0,133975;$$

also die Seite des XIIecks

$$= \sqrt{(\tfrac{1}{4} + 0,133975^2)} = \sqrt{0,26794930\ldots}$$
$$= 0,51763\ldots$$

Das Perpendikel aus des Kreises Mittelpunkt auf die Seite des XIIecks ist nun

$$\sqrt{\left(1 - \left(\frac{0,51763}{2}\right)^2\right)} = 0,9659,$$

also die Verlängerung dieses Perpendikels bis zur Peripherie

$$= 1 - 0,9659 = 0,0340,$$

und nun die Seite des XXIVecks

$$= \sqrt{\left(\frac{0,51763}{2}\right)^2 + 0,034^2}.$$

u. s. f. Berechnet man nun jedesmal sehr viele Decimalstellen, und setzt diese Berechnung z. B. bis zur Seite des 3072ecks fort, so hat man die Seite eines Vielecks, welches sich schon sehr nahe in den Umfang des Kreises verliehrt, und diese Seite mit 3072 multiplicirt, gäbe also den Umfang des Kreises, dessen Halbmesser = 1 wäre, schon mit ausserordentlicher Genauigkeit.

145 d) Auf eine ähnliche Weise hat **Ludolph von Cölln** berechnet, daß, wenn der Durchmesser = 1 ist, der Umfang

$$= 3,14159265358979323846264338387950$$

in 32 Decimalstellen herauskommt.

Die

Die Analysis des Unendlichen giebt Kunstgriffe an die Hand, welche die Berechnung dieser Verhältniß sehr abkürzen. Durch sie hat **Machin** die erwähnte Verhältniß bis auf 100 Decimalstellen berechnet, so daß zu der Ludolphschen Zahl noch folgende Zifern hinzukommen:

... 2884197169399375105820974944592307816
4062862089986280348253421170679

und **Lagny** hat diese Berechnung bis auf 127 Decimalstellen fortgeführt, so daß zu den vorigen noch folgende Zifern hinzugesetzt werden müssen.

... 82148086513272306647093844 6

In den neuesten Zeiten sind von verstimmten Köpfen mancherley Verhältnisse angegeben worden, deren Unrichtigkeit sogleich durch ihre Abweichung von den hier als richtig erwiesenen Verhältnißzahlen dargethan wird. Im gemeinen Leben ist beynahe in allen Fällen die Verhältniß 1 zu 3,14, oder 100 zu 314 genau genug, und wo es nur auf beyläufige Ueberschläge ankommt, bleibt man bey der schon vom **Archimed** angegebenen Verhältniß 7 zu 22 stehen.

S. Hrn. Hofrath Kästners geometrische Abhandlungen, zweyte Sammlung S. 174 bis 204 wo von den hierher gehörigen Bemühungen umständliche Nachrichten mitgetheilt werden.

Aufgabe.

146. **Ein Quadrat zu machen, welches so groß ist, wie zwey oder mehrere andere zusammengenommen.**

Auflösung.

1. Setzet die Seiten der beyden Quadrate AB und BC rechtwinklicht zusammen (§. 70. 89.). V. 88.

2. Ziehet die Linie AC; so habet ihr die Seite des Quadrates, welches so groß ist, wie die andern beyden zusammen (§. 144.).

3. Richtet CE = AC auf die Seite des dritten Quadrates CD perpendicular auf, und

4. ziehet die Linie DE; so habet ihr die Seite eines Quadrates, welches so groß ist, als die drey Quadrate zusammen (§. 144.) u. s. w.

Aufgabe.

146a) Jedes Vier- und Fünfeck in ein Dreyeck zu verwandeln.

Auflösung.

I. Für das IVeck.

VI. 103. 1. Das gegebene Viereck sey ACDE; man ziehe die Diagonale CE und mit dieser durch D die De gleichlaufend, welche die verlängerte Seite AE in e schneidet.

2. Nun ziehe man die grade Ce, so ist das Dreyeck ACe dem Viereck ACDE gleich.

Beweis.

Es ist △ EDC = △ EeC (§. 119. 120.)

II. Für das Veck.

VI. 103. Wenn ABCDE das gegebene Veck ist, so verwandelt man wie vorhin das IVeck ACDE in das △ ACe, und eben so das △ ABC in das AaC.

146b) Ein ähnliches Verfahren läßt sich auch bey Figuren von mehreren Seiten anwenden, s. H. H. Maiers prakt. Geom.

Lehrsatz.

147. **Wenn in geradlinichten Figuren die gleichnamigen Winkel einander gleich sind, und die Linien, so sie einschliessen, beyderseits einerley Verhältniß haben; so sind sie einander ähnlich: und wenn sie ähnlich sind; so hat es mit den Winkeln und Linien die gemeldete Beschaffenheit.**

Beweis.

Die geradlinichten Figuren können nicht anders, als durch die Grösse der gleichnamigen Winkel und durch die Verhältniß der Seiten, so sie einschließen, von einander

ander unterschieden werden: denn sonst lässet sich nichts deutlich in ihnen begreifen. Wenn nun die Winkel einerley Grösse, und die Seiten, so sie einschliessen, einerley Verhältniß haben; so kommen die Sachen überein, wodurch sie von einander unterschieden sind. Derowegen sind sie einander ähnlich (§. 4.); **welches das erste war.**

Wenn zwey Figuren einander ähnlich sind; so kommen die Sachen mit einander überein, wodurch sie von einander zu unterscheiden sind (§. 4.) Nun werden die geradlinichten Figuren durch die Grösse der gleichnamigen Winkel und die Verhältniß der Seiten, so sie einschliessen, unterschieden. Derowegen muß die Grösse der Winkel und die Verhältniß der Seiten beyderseits einerley seyn: **welches das andere war.**

Lehrsatz.

148. **Wenn in zweyen Triangeln** BAC **und** DEF, B = D **und** C = E, **so ist** BA: AC = DF EF **und** AB: BC = FD: DE; **und wenn hingegen die Seiten proportional sind, so sind auch die gleichnamigen Winkel gleich.** V. 89.

Beweis.

Weil B = D und C = E, und aus zwey gegebenen Winkeln und einer Seite sich der Triangel beschreiben lässet (§. 60.): so werden die Triangel ABC und FDE auf gleiche Art erzeuget. Derowegen sind sie einander ähnlich (§. 33.); folgends BA : AC = FD : FE und AB : BC = FD : DE (§. 147.): **welches das erste war.**

Weil im andern Falle die drey Seiten des einen Triangels proportional sind den drey Seiten des anderen, und aus dreyen Seiten sich ein Triangel beschreiben lässet (§. 55.); so werden die Triangel ABC und FDE auf gleiche Art erzeuget. Derowegen sind sie einander

ähnlich (§. 33.), und also die gleichnamigen Winkel einander gleich (§. 147.): welches das andere war.

Lehrsatz.

V. 89. 149. **Wenn in einem Triangel ABC eine Linie DE mit der Grundlinie BC parallel gezogen wird, so verhält sich AD zu AE wie AB zu AC, und wie BD zu EC, auch AD : DE = AB : BC.**

Beweis.

Weil DE mit BC parallel; so ist $o = x$ und $u = y$ (§. 72.), daher AD : AE = AB : AC und AD : DE = AB : BC (§. 148.) folgends weil AD : AB = AE : AC (§. 83. Arithm.), AD : AE = DB : EC. W. z. E.

Aufgabe.

V. 90. 150. **Zu zwey gegebenen Linien AC und AB die dritte Proportionallinie zu finden.**

Auflösung.

1. Machet nach Gefallen einen Winkel EAD, und
2. traget aus A in C die Linie AC; aus A in B, ingleichen aus C in E die Linie AB.
3. Ziehet von B in C eine gerade Linie CB und aus E die Linie DE mit CB parallel, welches geschiehet, wenn ihr (§. 48.) den Winkel E dem Winkel C gleich machet (§. 73.); so ist BD die verlangte dritte Proportionallinie (§. 149.).

Aufgabe.

V. 91. 151. **Zu drey gegebenen Linien AB, AC und BD die vierte Proportionallinie zu finden.**

Auflösung.

1. Machet nach Belieben einen Winkel EAD.
2. Traget aus A in B die Linie AB, aus A in C die Linie AC, und aus B in D die Linie BD.

3. Von B in C ziehet eine gerade Linie, und
4. aus D eine andere DE mit CB parallel, wie in der vorhergehenden Aufgabe; so ist CE die verlangte vierte Proportionallinie (§. 149.).

Lehrsatz.

152. **Wenn in zweyen Triangeln ABC und FDE, B = D und AB : BC = FD : DE; so ist auch A = F und C = E, und BA : AC = DF : FE.** V. 89.

Beweis.

Weil B = D und AB : BC = FD : DE, und aus einem Winkel mit den beyden Seiten, die ihn einschliessen, sich ein Triangel beschreiben lässet (§. 58.); so werden die Triangel ABC und FDE, auf gleiche Art erzeuget. Derowegen sind sie einander ähnlich (§. 33.); folgends A = F, C = E und BA : AC = DF : FE (§. 247.). W. Z. E.

Anmerkung.

153. Die Lehrsätze von der Aehnlichkeit der Triangel sind von den nützlichsten in der ganzen Mathematik, und dienen zu den meisten Erfindungen, die man in derselben haben kann. Auch die vornehmste Ausübung der Geometrie auf dem Felde beruhet auf denselben, wie bald mit mehrerem erhellen soll.

Aufgabe.

154. **Eine gerade Linie AB in so viel gleiche Theile zu theilen, als man verlanget.** V. 92.

Auflösung.

1. Traget nach Belieben auf eine Linie CD so viel gleiche Theile, als die Linie AB bekommen soll, z. E. fünfe.
2. Setzet auf CD einen gleichseitigen Triangel CED. (§. 53.)
3. Traget aus E in A und aus E in B die Linie AB.
4. Endlich ziehet gegen den ersten Theilungspunkt G aus der Spitze des Triangels E die Linie E G so

ist AE der fünfte Theil von der gegebenen Linie AB.

Beweis.

Weil EA : EB = EC : ED; so ist A = C und EA : AB = EC : CD (§. 152.). Nun ist EC = CD; derowegen ist auch EA = AB. Weil nun ferner EA : AF = EG : CG (§. 148.), das ist: AB : AF = CD : CG und CG = $\frac{1}{5}$CD; so ist auch AF = $\frac{1}{5}$AB (§. 53. Arithm.). W. Z. E.

Aufgabe.

V. 93. 155. Eine gerade Linie AB nach der Proportion einzutheilen, nach welcher eine andere CD eingetheilet worden.

Auflösung.

1. Beschreibet auf die eingetheilte Linie CD einen gleichseitigen Triangel (§. 53.).
2. Traget aus E in A und B die gegebene Linie AB.
3. Ziehet aus der Spitze des Triangels E an die Theilungspunkte G, I, die Linien EG, EI. Diese theilen die gegebene Linie AB in F und H nach der gehörigen Proportion.

Beweis.

Der Beweis ist, wie in der vorhergehenden Aufgabe.

Anmerkung.

156. Diese Aufgabe hat viel Nutzen in der Baukunst und Fortification, sonderlich wenn man einen vorgegebenen Riß nach Belieben vergrössern oder verkleinern soll.

Aufgabe.

VI. 106. 107. 157. Ein Parallelogramm, ingleichen einen Triangel in so viel gleiche Theile zu theilen, als man verlanget.

Auf-

Auflösung.

1. Theilet die Grundlinie CD oder CB in so viel gleiche Theile, als die Figur eingetheilet werden soll (§. 154.).
2. Ziehet aus den Theilungspunkten 1. 2. in dem ersten Falle mit der andern Seite AC Parallellinien 1. 1. und 2. 2. (§. 67.); in dem anderen Falle aber Linien bis an die Spitze des Triangels A 1 und A 2; so sind beyde Figuren in gleiche Theile eingetheilet (§. 138. 139.)

Aufgabe.

158. **Zwischen zwey gegebenen Linien AB und BE eine mittlere Proportionallinie zu finden.** VI. 108.

Auflösung.

1. Traget die gegebenen Linien AB und BE in eine an einander, und theilet sie in C in zwey gleiche Theile (§. 90.).
2. Beschreibet aus C mit CA einen halben Circul.
3. Richtet aus B die Perpendicularlinie BD auf (§. 70.). Diese ist die verlangte mittlere Proportionallinie.

Beweis.

Der Winkel ADE ist ein rechter Winkel (§. 86.): ABD ist auch ein rechter Winkel (§. 18.). Der Winkel DAB ist beyden Triangeln DAB und DAE gemein. Derowegen ist auch der Winkel ADB dem Winkel DEB gleich (§. 78.). Nun ist in dem Triangel DEB der Winkel DBE auch ein rechter Winkel (§. 18.) Derowegen verhält sich AB zu BD, wie BD zu BE (§. 148.). W. Z. E..

Anmerkung.

159. Wenn man für 1. eine Linie annimmt, und nach derselben eine gegebene Zahl durch eine andere Linie exprimiret;

so kann man durch diese Aufgabe vermittelst des verjüngten Maaßstabes die Quadratwurzel ausziehen (§. 74. Arithm.).

Anmerkung.

160. Eben auf diese Art kann man durch die Aufgabe (§. 151.) die Regel Detri in Linien verrichten.

Lehrsatz.

X. 142. 160a) **Wenn man in einem Dreyeck ABC mit einer Seite BC eine Parallellinie DE u. s. w. zieht, so verhält sich der Inhalt des △ ADE zum Inhalt des △ ABC wie das Quadrat von AE zum Quadrat von AC.**

Beweis.

1. Man ziehe AH senkrecht auf BC, so ist auch Aa senkrecht auf DE.
2. Es ist also der Inhalt des Dreyecks

$$ADE = \frac{Aa \times DE}{2},$$

und der Inhalt des Dreyecks

$$ABC = \frac{AH \times BC.}{2}$$

3. Demnach verhält sich

$$\triangle ADE : \triangle ABC = Aa \times DE : AH \times BC.$$

4. Nun ist aber

$$Aa : AH = AE : AC \text{ und } DE : BC = AE : AC,$$

also

$$Aa \times DE : AH \times BC = AE \times AE : AC \times AC$$

5. Demnach wegen no. 3.

$$\triangle ADE : \triangle ABC = \text{Quadrat von } AE : \text{Quadrat von } AC.$$

Aufgabe.

160b) **Ein jedes Drey- und Viereck durch Parallellinien in eine verlangte Anzahl Theile von irgend einer gegebenen Verhältniß zu theilen.** (L.)

Auflösung.

I. Für Dreyecke.

Es sey z. B. das Dreyeck ABC durch Theilungslinien, welche mit BC parallel laufen in 6 Theile zu theilen, die eine gegebene Verhältniß unter einander haben, z. B. sich wie die Zahlen 1, 3, 4, 5, 6, 8 verhalten. Wenn DE die erste Theilungslinie vorstellt, FG die zwote u. s. w. und nun der Inhalt eines jeden Stücks besonders berechnet ist, welches ich aus der Arithmetik voraussetze, so daß a, b, c, d, e, f, den Inhalt dieser Stücke bedeuten, so ist (§. 160a). X. 143.

1. Die Quadratwurzel aus $\triangle ABC : \sqrt{a} = AB : AD$

2. $\sqrt{\triangle ABC} : \sqrt{(a+b)} = AB : AF$

3. $\sqrt{\triangle ABC} : \sqrt{(a+b+c)} = AB : AH$

u. s. w.

Daß sich also durch diese Proportionen alle Theilungspunkte D, F, H, I, K, mittelst Ausziehung der Quadratwurzel ergeben.

II. Für Vierecke.

X. 144.

Man soll z. B. das Viereck DEBC in 4 Theile von gegebener Verhältniß theilen, so daß die Theilungslinien mit BC parallel laufen.

1. Man berechne den Inhalt des Dreyecks ADE, das sich durch Verlängerung der beyden Seiten BD und CE ergiebt.

2. Nun betrachte man die Aufgabe so, als hätte man das Dreyeck ABC in 5 Theile von bekannter Verhältniß zu theilen, deren erster Theil durch die Linie DE schon abgeschnitten ist, und verfahre also mit den übrigen Theilen wie vorhin.

Aufgabe.

161. Aus der gegebenen Sehne eines Bogens AB und dessen Höhe DF, den Diameter ED, und folgends den Mittelpunkt des Circuls C zu finden. VI. 109.

Auflösung und Beweis.

1. Suchet zu FD und FB die dritte Proportionallinie (§. 85. Arithm.); so habet ihr EF (§. 158.)
2. Addiret zu EF die Höhe des Bogens DF; so habet ihr den Diameter ED.
3. Theilet denselben in 2 gleiche Theile; so habet ihr den Radium EC, und folgends den Mittelpunkt C.

Z. E. Es sey DF 8′ 3″ FB 1° 6′ 6″

83 = 166 : 166 : FE

166

996	xx	
996	xxx	
166	xxxxx	332″ EF
	xxxx	83 DF
27556	xx	

415″ ED

2)

2075‴ EC.

Anmerkung.

162. Diese Aufgabe hat ihren Nutzen in der Baukunst, wenn man die Eröffnung der Thüren und Fenster mit Bögen schließen soll.

Aufgabe.

VI. 109. **163. Aus der gegebenen Sehne eines Bogens AB und seiner Höhe DF den Inhalt des Abschnittes ADBFA zu finden.**

Auflösung.

1. Suchet zuerst den Diameter des Circuls DE (§. 161.) und
2. Beschreibet damit einen Circul, und traget die Sehne AB darein.
3. Messet den Winkel ACB mit dem Transporteur (§. 43.).

4. Su-

4. Suchet alsdenn den Ausschnitt ACBDA (§. 137.).
5. Aus der gegebenen Sehne AB und dem Unterscheide FC zwischen der Höhe des Bogens DF und dem Radio DC, suchet den Inhalt des Triangels ACB (§. 122.).
6. Endlich ziehet den Triangel ACB von dem Ausschnitte ACBDA ab; so bleibet der Abschnitt ADBFA übrig.

Z. E. Es sey AB 600‴ DF 80‴; so ist DE 1205‴, der Bogen AB 60°, und daher der Ausschnitt ACBDA 189630‴. Da nun FC 522‴, AF 300‴; so ist △ACB 156600‴, folgends der Abschnitt AFBDA 33030‴, wenn man in der ganzen Rechnung die Brüche weglässet.

Aufgabe.

164. **Einen verjüngten Maaßstab zu verfertigen.** V. 94.

Auflösung.

1. Ziehet eine Linie AE, und traget darauf 10 gleiche Theile von beliebter Grösse aus A in B, und denn ferner den Raum AB, so vielmahl euch beliebet.
2. Richtet in A von gefälliger Länge eine Perpendicularlinie AC auf (§. 70.), und theilet sie in 10 gleiche Theile.
3. Durch jeden Theilungspunkt ziehet mit AE eine Parallellinie (§. 67.), und
4. traget auf die obere CD eben die Theile, welche sich auf AB befinden.
5. Ziehet oben 10 und unten 9, oben 9 und unten 8, oben 8 und unten 7, oben 7 und unten 6, u. s. w. mit geraden Linien zusammen.

Ich

Ich sage, wenn AB eine Ruthe ist, so sind die Theile B 1; 1. 2; 2. 3.; u. s. w. Schuhe: hingegen 9. 9 ein Zoll, 8. 8 zwey Zolle, 7. 7 drey Zoll, 6. 6 vier Zoll u. s. w.

Beweis.

Weil 10 Schuhe eine Ruthe machen (§. 9.): so ist klar, daß die Theile auf der Linie AB Schuhe sind. Daß aber 9. 9 ein Zoll, 8. 8 zwey Zoll, 7. 7 drey Zoll sind u. s. w. erweiset man also. Dieweil 9. 9 mit C9 parallel ist, so verhält sich A9 zu AC, wie 9. 9 zu C9 (§. 149.). Nun ist A9 = $\frac{1}{10}$ AC. Derowegen ist auch 9. 9 = $\frac{1}{10}$ C9, folgends ein Zoll (§. 9.), u. s. w. W. Z. E.

Zusatz.

165. Wenn man nun den Zirkel auf die dritte oder siebende Linie setzet, und ihn bis zu der Linie aufthut, die unten aus dem 5ten Schuhe gezogen ist; so hat man über 5 Schuhe noch 3 oder 7 Zoll, u. s. w.

Aufgabe.

V. 95. 166. **Die Weite zweyer Oerter A und B zu finden, zu denen beyden man aus einem angenommenen Stande kommen kann.**

Auflösung.

1. Setzet das Meßtischlein in D, und erwählet auf demselben einen Punkt C.
2. Von demselben visiret durch die Dioptern in A, und ziehe die Linie Ca.
3. Gleichergestalt visiret in B, und ziehet die Linie Cb.
4. Messet mit der Meßruthe die Linien CA und CB, und
5. traget dieselben von dem verjüngten Maaßstabe (§. 164) aus C in a und b. Endlich

6. mes-

6. messet die Linie a b auf dem verjüngten Maaßstabe; so habet ihr die Grösse der verlangten Weite AB.

Beweis.

Denn weil der Winkel C beyden Triangeln a C b und ACB gemein ist, und die Seiten, so ihn einschliessen, proportional sind; so kann ich auch sagen, wie C a zu C A, so verhält sich a b zu A B (§. 152.). Nun hält C a so viel auf dem verjüngten Maaßstabe, als C A auf dem grossen: derowegen muß auch a b so viel auf dem verjüngten Maaßstabe halten als A B auf dem grossen. W. Z. E.

Eine andere Auflösung.

1. Setzet das Instrument in D und messet den Winkel ACB (§. 43.).
2. Messet ferner die Linien C A und C B (§. 44.).
3. Construiret durch Hülfe des Transporteurs und verjüngten Maaßstabes einen Triangel a C b (§. 58.).
4. Messet die Linie a b auf dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.); so wisset ihr, wie viel Ruthen Schuhe und Zolle die Linie A B hält.

Beweis.

Der Beweis ist eben so, wie in der ersten Auflösung.

Auflösung.

167. **Die Weite zweyer Oerter A und B zu messen, zu deren einem A man nur kommen kann.**

Auflösung.

1. Setzet das Meßtischlein in einem nach Belieben V. erwählten Stand C, und visiret aus dem Punkte 96. c nach beyden Oertern A und B.

2. Mes-

2. Messet die Weite eures Standes C von dem Orte A, zu welchem ihr kommen könnet, und
3. traget sie von dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.) aus c in a.
4. Gehet mit eurem Tischlein bis in A, und setzet es dergestalt nieder, daß der Punkt a in A stehet, und ihr durch die Dioptern nach der Linie a c den in C eingesteckten Stab sehen könnet.
5. Visiret hierauf durch dieselben aus a in B, und ziehet die Linie a b.
6. Endlich messet die Linie a b auf dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.); so erkennet ihr die Grösse der verlangten Weite A B.

Beweis.

Weil der Winkel c = C und a = A; so verhält sich a c zu A C, wie a b zu A B (§. 48.). Nun hat a c so viel Theile von dem kleinen Maaßstabe, als A C von dem großen; derowegen muß auch a b so viel Theile von dem kleinen, als A B von dem grossen haben. W. Z. E.

Eine andere Auflösung.

1. Messet mit dem Instrumente die Winkel C und A (§. 43.), und mit der Ruthe die Linie A C (§. 44.)
2. Construiret daraus durch Hülfe des Transporteurs und verjüngten Maaßstabes einen Triangel a c b (§. 60.).
3. Messet auf dem verjüngten Maaßstabe die Linie a b; so wisset ihr die verlangte Weite A B.

Beweis.

Der Beweis ist wie vorhin.

Aufgabe.

V. 97. **168. Die Weite zweyer Oerter A B, zu deren keinen man kommen kann, zu messen.**

Auf-

Auflösung.

1. Erwählet zwey Stände in C und D. In dem einen C setzet das Tischlein, in dem andern D stecket einen Stab.
2. Aus dem Punkte c visiret durch die Dioptern nach dem Stabe D, ingleichen nach B und A, und ziehet dahinzu auf dem Tischlein Linien.
3. Messet die Weite der beyden Stände CD (§. 24.), und traget sie nach dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.) auf das Tischlein aus c in d.
4. Stecket in C einen Stab, und setzet das Tischlein dergestalt in D, daß der Punkt d in D kommet, und wenn ihr nach der Linie cd durch die Dioptern visiret, ihr den Stab in C erblicket.
5. Visiret ferner aus d gegen A und B, und ziehet, auf dem Tischlein die Linien da und db.
6. Endlich messet (§. 164.), auf dem verjüngten Maaßstabe ab; so habet ihr die Länge der Weite AB.

Beweis.

Weil der Winkel d beyden Triangeln dcb und DCB gemein, über dieses auch der Winkel c dem Winkel C gleich ist; so verhält sich cd zu CD, wie bc zu BC, (§. 148.) Wiederum weil aus gleichmäßiger Ursache der Triangel acd dem Triangel ACD ähnlich ist; so verhält sich cd zu CD, wie ac zu AC (§. 148.), folgends ist auch bc zu BC, wie ac zu AC (§. 57. Arithm.). Da nun über dieses der Winkel acb dem Winkel ACB gleich ist; so verhält sich ab zu AB, wie ac zu AC (§. 152.), oder cd zu CD (§. 57. Arithm.) Da nun dc so viele Theile auf dem verjüngten Maaßstabe, als DC im grossen hat, so muß auch ab so viel Theile auf dem verjüngten Maasstabe, als AB im grossen, haben. W. Z. E.

Eine

Eine andere Auflösung.

VI. 98. 1. Messet aus dem ersten Stande C die Winkel x und y, und aus dem Stande D die Winkel z und w (§. 43.); so geben ihre Summen die Winkel ACD und BDC.

2. Messet ferner die Standlinie CD (§. 44.)

3. Traget diese nach dem verjüngten Maaßstabe auf das Papier, und construiret mit Hülfe der Winkel x und z + w den Triangel BCD, und mit Hülfe der Winkel z und x + y den Triangel ACD (§. 60.).

4. Endlich messet auf dem verjüngten Maaßstabe die Linie AB; so wisset ihr die verlangte Weite.

Beweis.

Der Beweis ist einerley mit dem vorigen.

Anmerkung.

169. Auf gleiche Art kann man die Weite gar vieler Oerter auf einmal messen, wenn man nemlich aus zweyen Ständen gegen jeden visiret.

Aufgabe.

V. 99. 170. **Die Höhe eines Ortes AB zu messen, zu den man kommen kann.**

Auflösung.

1. Erwählet euch einen Stand in D, und richtet das Tischlein vertical, doch so, daß seine untere Seite horizontal sey: welches vermittelst einer Bleywage gar leicht geschehen kann.

2. Die Regel mit den Dioptern leget an dasselbe horizontal, visiret nach dem Orte, dessen Höhe ihr messen wollet, und ziehet die Linie cE.

3. Kehret an dem Punkte c die Regel mit den Dioptern in die Höhe, bis ihr die Spitze A erblicket, und ziehet auf dem Tischlein die Linie cb.

4. Messet die Standlinie cC (§. 44.), und

5. tra-

5. traget sie von dem verjüngten Maaßstabe auf das Tischlein aus e in E (§. 164.).
6. Richtet in E ein Perpendicul Eb auf (§. 70.), und
7. messet die Länge auf dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.); so wisset ihr die Höhe CA.
8. Dazu addiret die Höhe BC; so kommet die verlangte Höhe AB heraus.

Beweis.

Der Winkel c ist beyden Triangeln Ecb und CcA gemein; bey E und C sind rechte Winkel; also verhält sich Ec zu cC, wie bE zu AC, (§. 148.) Nun hält Ec so viel auf dem verjüngten Maaßstabe, wie cC auf dem großen. Derowegen muß auch Eb so viel auf dem verjüngten Maaßstabe, wie AC auf dem großen halten. W. Z. E.

Eine andere Auflösung.

1. Messet den Winkel E (§. 43.) und die Standlinie AD oder CE (§. 44.). VI. 100.
2. Construiret daraus einen rechtwinklichten Triangel cbe (§. 60.).
3. Messet die Höhe bc auf dem verjüngten Maaßstabe; so habet ihr die Höhe BC.
4. Dazu addiret die Höhe des Stativs, so kommet die Höhe AB heraus.

Beweis.

Der Beweis ist wie der vorige.

Anmerkung.

171. Man setzet voraus, daß die Linie AD horizontal sey: denn wenn das Instrument an einem erhabenern, oder auch niedrigern Orte stünde, als die Höhe BA gelegen: so ist es rathsamer, daß man auch den Winkel CEA misset, und den Triangel CEA im kleinen construiret.

Aufgabe.

VI. 101. 172. **Eine Höhe AE zu messen, zu der man nicht kommen kann.**

Auflösung.

1. Erwählet zwey Stände in D und E, und visiret wie in der vorhergehenden Aufgabe, nach der Spitze A und dem Punkte C, in dem ersten Stande D.
2. Messet die Standlinie ED, und traget sie aus f, so über dem Punkte D stehen muß, in e von dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.).
3. Traget das Tischlein in E dergestalt, das der Punkt e über E kommt, und visiret wie vorhin nach dem Stabe in D und der Spitze A.
4. Wo die Linie ea die Linie fa durchschneidet, lasset ein Perpendicul ac auf fc herunter fallen (§. 69.)
5. Diesen messet auf den verjüngten Maaßstabe (§. 164.); so habet ihr die Höhe AC.
6. Addiret dazu die Höhe BC; so habet ihr die verlangte Höhe AB.

Beweis.

Der Beweis ist eben so, wie in der vorigen Aufgabe.

Eine andere Auflösung.

VI. 101. 1. Messet in dem ersten Stande D den Winkel f, und in dem andern E den Winkel e (§. 43.) und die Standlinie ED (§. 44.).

VI. 102. 2. Diese traget auf das Papier nach dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.), und

3. construiret darauf durch Hülfe der Winkel e und f einen Triangel fea (§. 60.).
4. Verlängert seine Grundlinie fe in c und lasset von a ein Perpendicul ac herunter fallen (§. 69.).

5. End-

5. Endlich messet ac auf dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.), und addiret dazu die Höhe des Instruments, damit ihr die Winkel gemessen, oder nehmet in Acht, was (§. 171.) erinnert worden: so kommet die verlangte Höhe AB heraus.

Beweis.

Der Beweis ist wie in der vorhergehenden Aufgabe.

Aufgabe.

173. **Eine jede geradlinichte Figur ABCDE, VI. in die man kommen kann, in Grund zu legen.** 103

Auflösung.

Messet den ganzen Umfang der Figur AB, BC, CD, DE, EA; imgleichen die Diagonallinien AC und AD; so könnet ihr nach dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.) die Figur auf dem Papiere aufzeichnen (§. 111.).

Beweis.

Wenn man eine Figur in Grund leget; so muß man eine kleine Figur zeichnen, in der alle Winkel so groß sind, als in der großen, und die Seiten sich eben so gegen einander verhalten, wie in der grossen (§. 57.). Wenn man nur für jede Seite der Triangel ABC, ACD, ADE, auf dem verjüngten Maaßstabe so viel annimmt, als sie im Großen ausmachet; so verhalten sich die Seiten in der verjüngten Figur eben so gegen einander, wie die Seiten der grossen. Denn wenn z. E. AB im Grossen 6 ist, so ist sie im Kleinen auch 6; wenn im Grossen BC 7 ist, so ist sie im Kleinen auch 7. Und also verhält sich AB zu BC beyderseits wie 6 zu 7. Derowegen sind auch die Winkel der kleinen Figur so groß, wie die Winkel in der großen (§. 148.). Da nun die Winkel der Figur mit den Winkeln der Triangel übereinkommen; so müssen auch alle Winkel in der verjüngten Figur so groß seyn, wie in der grossen. W. Z. E.

Anders.

VI. 104. 1. Erwählet euch innerhalb der Figur einen Punkt F, und setzet dahin das Meßtischlein.

2. Aus F visiret gegen die Stäbe, welche man in die Ecken der Figur A, B, C, D, E, gestecket, und ziehet die Linien Fa, Fb, Fc, Fd, Fe.

3. Messet die Linien FA, FB, FC, FD, FE, (§. 44.), und

4. eben so groß machet nach dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.) die Linien Fa, Fb, Fc, Fd, Fe.

5. Endlich ziehet die Linien ab, bc, cd, de und ea; so schliesset sich die verlangte Figur.

Beweis.

In dem Triangel aFb verhält sich Fa zu Fb, wie FA zu FB im Triangel AFB, und der Winkel F ist beyden Triangeln gemein: derowegen verhält sich auch Fb zu FB, wie ba zu BA (§. 152.). Eben so wird erwiesen, es verhalte sich Fb zu FB, wie bc zu BC, folgends auch ba zu bc, wie BA zu BC (§. 57. Arithm.). Es ist aber auch der Winkel ABC so groß, wie der Winkel abc (§. 152.) Da nun auf gleiche Weise von allen übrigen Winkeln c, d, e, a, erwiesen werden kann, daß sie den Winkeln C, D, E, A, gleich sind, und auch von den übrigen Seiten, daß sie sich gegen einander verhalten, wie die Seiten CD, DE, EA; so ist klar, daß die große Figur in Grund geleget worden. W. Z. E.

Anders.

1. Messet aus F alle Winkel AFB, BFC, CFD, DFE, EFA (§. 43.), imgleichen die Linien FA, FB, FC, FD und FE (§. 48.).

2. Traget die Winkel auf das Papier (§. 48.) imgleichen die Linien nach dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.)

3. Zie-

3. Ziehet die Linien ab, bc, cd, de und ea; so wird die verlangte Figur geschlossen.

Beweis.

Der Beweis ist eben wie der vorige.

Aufgabe.

174. Eine Figur ABCDE in Grund zu legen, die man aus zweyen Oertern A und B ganz übersehen kann. VI. 105.

Auflösung.

1. Setzet euer Tischlein in A, und visiret nach allen Ecken der Figur B, C, D, und E, und ziehet gegen dieselbe Linien aus dem Punkte A.
2. Messet die Standlinie AB (§. 44.), und traget sie nach dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.) auf das Tischlein aus A in b.
3. Traget das Tischlein aus A in B, und richtet es dergestalt, daß der Punkt b in B kommet, und ihr durch die Dioptern des an die Linie bA angelegten Lineals den in A eingesteckten Stab sehen könnet.
4. Visiret nach allen übrigen Ecken der Figur, und ziehet gegen dieselbe aus B Linien, welche die vorigen in e, d, c, durchschneiden.
5. Endlich ziehet die Linien ed, dc,; so habet ihr die verlangte Figur in Grund geleget.

Beweis.

Der Beweis ist fast eben wie in der Aufgabe (§. 168.)

Anders.

1. Messet aus A die Winkel CAB, DAC, EAD, (§. 43.), imgleichen die Linie AB, (§. 44.), wie nicht weniger aus B die Winkel EBA, EBD, DBC (§. 43.).

2. Ziehet auf dem Papier eine Linie ab, und traget von dem verjüngten Maaßstabe die Grösse der Linie AB darauf (§. 164.).
3. Traget in bac, cad, dae die Winkel BAC, CAD DAE; hingegen in abe, ebd, dbc, die Winkel ABE, EBD; DBC (§. 48.)
4. Endlich ziehet die Punkte a, e, d, c, b, mit geraden Linien zusammen; so habet ihr die verlangte Figur in Grund geleget.

Beweis.

Der Beweis ist abermals wie in der Aufgabe (§. 168.).

Aufgabe.

175. Eine Figur ABCDE in Grund zu legen, die man ganz umgehen kann.

Auflösung.

VI. 105.

1. Setzet das Tischlein in A und visiret nach den Stäben in B und E, damit ihr den Winkel BAE darauf bekommet.
2. Messet die Linien AB und AE (§. 44.) und traget sie nach dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.) auf das Tischlein aus a in b und e.
3. Gehet mit dem Tischlein in B und setzet den Punkt b in B, visiret wieder zurücke in A, imgleichen von dem neuen Punkte B in C, damit ihr den Winkel CBA auf das Tischlein bekommet.
4. Messet die Linie BC (§. 44.) und traget sie auf das Tischlein aus b in c (§. 164.)
5. Wenn ihr die ganze Figur dergestalt umgehet; so werdet ihr sie in Grund geleget haben.

Beweis.

Denn alle eure Winkel in der kleinen Figur sind den Winkeln in der grossen gleich; und die Linien verhalten

halten sich in der kleinen Figur eben so wie in der grossen: derowegen ist die kleine Figur der grossen ähnlich (§. 147.) W. Z. E.

Anders.

Messet alle Seiten der Figur (§. 44.) und drey Winkel weniger als Seiten sind (§. 43.); so könnet ihr die Figur in Grund legen (§. 112.).

Aufgabe.

176. **Ein jedes Feld oder einen jeden andern Platz auszurechnen.**

Auflösung.

1. Leget es zuerst in Grund nach den **vorhergehenden Aufgaben.** Darnach
2. rechnet die Figur aus, nach der **Aufgabe** (§. 123.).

Erklärung.

177. **Wenn ein halber Circul X sich um seinen Diameter A B herum beweget, beschreibet er eine Kugel.** VI. 110.

Zusatz.

178. Also sind alle Punkte in der Kugelfläche von dem Mittelpunkte gleich weit entfernet. (§. 13.)

Erklärung.

179. **Wenn eine geradlinichte Figur ABC sich an einer geraden Linie AD dergestalt herumrer beweget, daß sie sich immer parallel bleibet, das ist, durch die Bewegung einer jeden Seite derselben ein Parallelogramm erzeuget wird: so beschreibet sie ein Prisma. Beweget sich aber ein Circul X an einer geraden Linie F G, und also mit einerley Richtung parallel herunter, oder ein** Rectangulum ABCD **und ein Qua-** VI. 111. VI. 112. VI. 113.

drat um seine Höhe BC; so wird ein Cylinder, oder eine Walze beschrieben.

Zusatz.

180. Ein jedes Prisma hat zwey gleiche Grundflächen, und ist um und um von so vielen Vielecken eingeschlossen, als die Grundfläche Seiten hat.

Zusatz.

181. In dem Prismate und Cylinder sind alle Durchschnitte, die mit ihren Grundflächen parallel geschehen, einander gleich.

Erklärung.

VII. 114. 182. Wenn sich ein Rectangulum ABCD an einer Linie AE auf gleiche Art und rechtwinklicht herunter beweget, bekommt man ein Parallelepipedum. Ein Quadrat O, welches sich gleichergestalt an einer geraden Linie HI, die VII. 115. seiner Seite HL gleich ist, herunter beweget, zeiget einen Cubum oder Würfel.

Zusatz.

183. Das Parallelepipedum ist in 6 Rectangula eingeschlossen, deren zwey einander überstehende gleich sind. Und alle Durchschnitte, die mit der Grundfläche parallel geschehen, sind einander gleich.

Zusatz.

184. Ein Würfel ist in sechs gleiche Quadrate eingeschlossen.

Erklärung.

VII. 116. 185. Wenn sich ein rechtwinklichter Triangel ABC um seine Seite AB herum beweget, beschreibet er einen Conum oder Kegel.

Zusatz.

Zusatz.

186. Alle Durchschnitte, die im Kegel mit der Grundfläche DCB parallel geschehen, sind Circul, aber immer kleiner, je näher sie der Spitze A kommen.

Erklärung.

187. Wenn eine Linie AD sich in einem festen Punkte verschieben lässet, und um die ganze Peripherie einer geradlinichten Figur ABC mit dem andern Ende A beweget, entstehet eine Pyramide. Ist die Figur ABC ein Circul, so bekommet man einen Kegel. VII. 117. VII. 116.

Zusatz.

188. Eine Pyramide hat zur Grundfläche eine geradlinichte Figur, und ist um und um in so viel Triangel, als die Grundfläche Seiten hat, eingeschlossen, welche oben in einem Punkte D mit ihren Spitzen zusammenstossen.

Erklärung.

189. Wenn ein Körper in lauter gleiche reguläre Figuren von einerley Art eingeschlossen ist, daß daher alle Winkel desselben gleich sind, nennet man ihn regulär, oder ordentlich; die übrigen werden irreguläre oder unordentliche genennet.

Erklärung.

190. Ausser dem Würfel (§. 182.) sind noch vier andere reguläre Körper, als das Tetraedrum, welches aus vier gleichseitigen Triangeln zusammengesetzet wird; das Octaedrum, so aus achten zusammengesetzet: das Icosaedrum, welches zwanzig einschliessen: und das Dodecaedrum, welches von zwölf regulären Fünf-Ecken eingeschlossen wird. VII. 118. 119. 120. 121.

Aufgabe.

191. Den körperlichen Inhalt eines Cubi, oder Würfels, und seine Fläche zu finden.

Auflösung.

Der Maaßstab des körperlichen Inhalts ist eine Cubikruthe, das ist, ein Würfel der eine Ruthe dick, und eine Ruthe lang und breit ist. Diese wird eingetheilet in Cubikschuhe, in Cubikzolle ꝛc. Jenes sind Würfel, die zur Seite einen Schuh; diese aber Würfel die zur Seite einen Zoll haben.

Wenn ihr nun den körperlichen Inhalt eines Würfels wissen wollet; so messet

1. die Seite des Würfels und multipliciret sie mit sich selbst, so habet ihr seine Grundfläche (§. 114. 184.)
2. Diese multipliciret weiter durch seine Seite; so kommet der Inhalt des Würfels heraus.
3. Hingegen wenn ihr die Grundfläche mit 6 multipliciret; so bekommet ihr die Fläche des ganzen Würfels (§. 184.)

Exempel.

Seite	34′	Grundfläche	1156′
	34	Seite	34
	136□′		4624
	102		3468
Grundfläche	1156□′	Inhalt des 6′ Würfels	39304◻′

Fläche des Würfels 6936□′

Beweis.

VII. 122. Man bilde sich ein, es sey die Seite des Würfels in etliche gleiche Theile eingetheilet. So ist klar, daß so viel Schichten kleiner Würfel herauskommen, als die Höhe

Höhe Theile hat, und in jeder Schicht so viel kleine Würfel als Quadrate in der Grundfläche sind. Derowegen, wenn man die Höhe durch die Grundfläche multipliciret; so kommet die Zahl der kleinen Würfel heraus, die der grosse in sich hält. W. Z. E.

Zusatz.

192. Wenn die Seite des Würfels 10 ist; so ist der körperliche Inhalt 1000. Derowegen, wenn die Seite eine Ruthe, oder 10 Schuhe hält; so sind 1000 schuhige Würfel in dem grossen enthalten. Und demnach hat die Cubikruthe 1000 Cubikschuhe, der Cubikschuh 1000 Cubikzolle, der Cubikzoll 1000 Cubiklinien.

Lehrsatz.

193. **Alle Parallelepipeda, Prismata und Cylinder, welche gleiche Grundflächen und Höhen haben, sind einander gleich.**

Beweis.

Wenn man ein Parallelepipedum, Prisma und einen Cylinder in lauter Scheiben zerschneidet, so subtil, als man will; so sind nicht allein alle Scheiben einander gleich (§. 181. 183.); sondern wenn zwey Körper auch gleiche Höhe haben, so können aus einem nicht mehr als aus dem andern geschnitten werden. Und also fasset ein Körper so viel Raum in sich, als der andere. W. Z. E.

Aufgabe.

194. **Den Inhalt eines Parallelepipedi und seine Fläche zu finden.** VII. 123.

Auflösung.

1. Multipliciret die Länge AB durch die Breite BC, so habet ihr die Grundfläche ABCD (§. 117. 183.).

2. Die-

2. Diese multipliciret ferner durch die Höhe BF; so kommet der verlangte Inhalt heraus.

Z. E. Es sey AB 36′ BC 15′ BF 12′

Länge	AB 36	Grundfl. ABCD	540
Breite	BC 15	Höhe	BF	12
	180		1080
	36		540

Grundfläche ABCD 540□′ Cörperl. Inhalt 6480⊡′.

Für die Fläche.

1. Multipliciret AB in BC, imgleichen AB in BF, und BF in BC; so habet ihr die Vierecke BD, EB und BG (§. 117. 183.).
2. Addiret die drey Vierecke zusammen und multipliciret die Summe durch 2; so bekommet ihr die Fläche des Parallelepipedi heraus (§. 117. 138.)

Z. E.	AB 36′	AB 36′	BC 15′
	BC 15	BF 12	BF 12
	180	72	30
	36	36	15
□ LB	540′	□BG 432′	□BE 180′
□ BG	432		
□ BE	180		

1152□′
2

2304□′ Fläche des Parallelepipedi.

Beweis.

Der Beweis ist eben wie in der vorhergehenden Aufgabe (§. 191.)

Lehrsatz.

VII. 123. 195. Ein jedes Parallelepipedum wird durch die Diagonalfläche DFBH in zwey gleiche Prismata getheilet.

Beweis.

Beweis.

Die Diagonallinie DB theilet das Parallelogramm ABCD in zwey gleiche Triangel (§. 102.) Da nun die beyden Prismata ADBFGH und DBCEFH auſſer diesen gleichen Grundflächen auch einerley Höhe DH haben; müſſen sie einander gleich seyn (§. 193.) W. Z. E.

Aufgabe.

196. **Den Inhalt eines jeden Prismatis und seine Fläche zu finden.** VII. 124.

Auflösung.

1. Suchet die Grundfläche des Prismatis (§. 117. 121. 122. 123. 124.).

2. Multipliciret selbige durch die Höhe; so kommet der verlangte Inhalt heraus.

3. Hingegen multipliciret den Umfang der ganzen Grundfläche durch dieselbige Höhe; so kommet die Fläche auſſer den beyden Grundflächen heraus.

4. Wenn ihr nun diese dazu addiret; so habet ihr die ganze Fläche (§. 180.).

Z. E. Es sey

AB 8′ CD 6′ AE 15′

AB 8	ABC 24
$\frac{1}{2}$CD 3	AE 15
ABC 24□′	120
	24
Inhalt des Prismatis	360□′

BC	91″
BA	80
AC	62
Peripherie	233″
AE	150
	11650
	233
Seitenfläche	34950
BAC	2400
HEI	2400
Ganze Fläche	39750□″.

Beweis.

Das dreyeckichte Prisma ist die Hälfte eines Parallelepipedi, welches mit ihm einerley Höhe, aber eine doppelte Grundfläche hat (§. 195.) Wenn man die ganze Grundfläche des Parallelepipedi, mit der Höhe multipliciret; so bekommet man seinen Inhalt (§. 194.) Derowegen, wenn man die Hälfte von der Grundfläche des Parallelepipedi, das ist, die Grundfläche des dreyeckichten Prismatis, durch die Höhe multipliciret, so muß die Hälfte des Parallelepipedi, das ist, der Inhalt des Prismatis herauskommen. Alle übrige Prismata lassen sich in dreyeckichte zertheilen, und also gilt auch von ihnen, was von den dreyeckichten erwiesen worden.

Aufgabe.

197. **Aus der gegebenen Höhe eines Cylinders und dem Diameter desselben, seinen Inhalt und seine Fläche zu finden.**

Auflösung.

1. Suchet die Grundfläche des Cylinders (§. 134.).
2. Multipliciret selbige durch seine Höhe; so habet ihr den verlangten Inhalt.

3. Hin-

3. Hingegen die Peripherie multipliciret durch eben dieselbe Höhe; so kommet die Fläche ohne die beyden Grundflächen heraus.
4. Wenn ihr die beyden Grundflächen dazu addiret; so ist die Summe die verlangte Fläche des Cylinders.

Z. E. Es sey der Diameter 2 AB 560″, die Höhe VI. BC 892″; so ist 113.

die Grundfläche	246176□″	Periph.	17584‴
die Höhe BC	892″	BC	8920
	492352		351680
	2215584		158256
	1969408		140672
Inhalt	21988992⊙″		156849280
des Cylinders			24617600
			24617600
Fläche			206084480□‴

Beweis.

Weil der Circul ein reguläres Vieleck ist, so unzählig viel Seiten hat, so kann man den Cylinder als ein Prisma ansehen, welches unzählig viel Seiten hat. Und dannenhero wird sein Inhalt gefunden, wenn seine Grundfläche durch die Höhe; die Fläche aber, wenn die Peripherie der Grundfläche in eben diese Höhe multipliciret wird (§. 196.) W. Z. E.

Lehrsatz.

§. * **Wenn eine Pyramide** ABCD **dergestalt durchschnitten wird, daß der Durchschnitt** abc **der Grundfläche** ABC **parallel ist: so ist auch die Figur** abc **der andern** ABC **ähnlich.** IX. 1.

Beweis.

Weil ab mit AB parallel; so ist Da: DA = ab: AB (§. 149. Geom. und §. 83. Arithm.) Eben deswegen

wegen ist Da : DA = ac : AC, folgends ab : AB = ac : AC (§. 57. Arithm.), und daher ab : ac = AB : AC (§. 83. Arithm.) Da man nun auf gleiche Weise erweiset, daß ac : bc = AC : BC, so sind die △△ abc und ABC ähnlich (§. 148.), folgends in andern Fällen die Figuren, die aus ihnen zusammengesetzet werden (§. 33.). W. Z. E.

Lehrsatz.

198. **Pyramiden und Kegel, die gleiche Grundfläche und Höhe haben, sind einander gleich.**

Beweis.

IX. 2. Es sey ABC eine Seitenfläche von einer Pyramide, und DEF von einer andern, BC und EF in einer Linie BF, BC = EF, die Spitzen A und D mit BF in einer Fläche, und AM auf BC, DO auf EF perpendicular; so ist AM = DO. Nun ziehe man GK mit BF und AD parallel, so ist auch AL = DN (§. 22.) und AG : AB = GH : BC = AL : AM (§. 149. Geom. §. 57. Arithm.) Eben so wird erwiesen, daß DN : DO = IK : EF. Da nun GH : BC = IK : EF (§. 57. Arithm.), und BC = EF; so ist GH = IK (§. 53. Arithm.). Weil eben dergleichen in allen übrigen Flächen, welche die Pyramide einschließen, erwiesen werden kann, und wegen der Aehnlichkeit der Durchschnitte mit ihren Grundflächen (§. *), die gleichnamigen Winkel einander gleich sind (§. 147.); so müssen die Durchschnitte in beyden Pyramiden von gleicher Grösse seyn, wenn sie in gleicher Höhe geschehen (§. 31.) Da aber die ganzen Höhen der Pyramiden von gleicher Grösse sind, kann man in einer nicht mehr Durchschnitte haben, als in der andern. Und demnach sind die Pyramiden einander gleich: **welches das erste war.**

Weil

Weil man die Triangel ABC und DEF für die Durchschnitte zweyer Kegel annimmt, dadurch sie von der Spitze bis durch die Grundfläche in zwey gleiche Theile getheilet werden: so sind GH und IK die Diameter der Circul, welche aus den mit den Grundflächen parallel geschehenen Durchschnitten entstehen (§. 186.), und also ist abermal klar, daß diese Circul und folgends die ganzen Kegel einander gleich seyn müssen: welches das andere war.

Lehrsatz.

199. **Eine jede Pyramide ist der dritte Theil von einem Prismate, so mit ihr gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.**

Beweis.

Die Pyramiden ADEF und ACBE haben einerley Höhe BE und gleiche Grundflächen DEF und ABC (§. 180.), derowegen sind sie einander gleich (§. 198.). IX. 3.
Wiederum die Pyramiden ACBE und CEFA haben gleiche Grundflächen BCE und CEF (§. 102.), und einerley Höhe, indem sie beyde in A zusammenstoßen. Derowegen sind sie auch einander gleich (§. 22. Arithm.). W. Z. E.

Zusatz.

200. Da nun ein Kegel für eine Pyramide zu halten ist, welche unzählig viel Ecken hat; so wird auch derselbe der dritte Theil eines Cylinders seyn, so gleiche Grundfläche und gleiche Höhe mit ihr hat.

Aufgabe.

201. **Den Inhalt einer Pyramide, imgleichen eines Kegels zu finden.**

Auflösung.

1. Suchet den Inhalt eines Prismatis und Cylinders, so gleiche Grundflächen und Höhen mit der Pyramide und dem Kegel haben (§. 196. 197.).

2. Diesen dividiret durch 3; so kommet der Inhalt der Pyramide und des Kegels heraus (§. 199. 200.).

Oder:

Multipliciret die Grundfläche beyderseits mit dem dritten Theil der Höhe.

Z. E. der Inhalt des Prismatis ist (§. 196.) 360 c'. Also ist der Inhalt der Pyramide 120 c'. Der Inhalt des Cylinders ist (§. 197.) 2196° 588 c' 992 c''. Also kommen für den Kegel 731963$30\frac{2}{3}$ c''.

Aufgabe.

VII. 125. **202. Den Inhalt eines abgekürzten Kegels ABCD zu finden.**

Auflösung.

1. Wenn man inferiret, wie der Unterschied AH der halben Diametrorum AG und CF zu der Höhe des abgekürzten Kegels CH, so der halbe grosse Diameter AG zu der Höhe des ganzen Kegels EG (§. 149.); so kann man durch die Regel Detri die Höhe des ganzen Kegels EG finden (§. 85. Arithm.)

2. Aus dieser und dem Diametro AB suchet den Inhalt des ganzen Kegels AEB (§. 201.).

3. Ziehet die Höhe des abgekürzten Kegels FG von der Höhe des ganzen EG ab, so bleibet die Höhe des abgeschnittenen Kegels EF übrig.

4. Suchet aus dieser und dem Diametro CD den Inhalt des Kegels ECD (§. 201.).

5. Endlich ziehet den kleinen Kegel ECD ab; so bleibet der Inhalt des abgekürzten ACDB übrig.

Z. E. Es sey AB 36', CD 20', FG = CH 12'; so ist AG 18', CF 10' und AH 8'; demnach

AH:

AH : CH = AG : GE
8 : 12 = 18 :
4) 2 3 9 (§. 96. Arithm.)
2) 1 3

27′ = GE
12 = GF

15 = EF.

100 : 314 = 18
18

2512
314

56′5″2‴
1 800 AG

45201 6
5652

101736□″ grosse Grundfläche.
90″ = $\frac{1}{3}$EG

9°156′240″ der Kegel AEB
100 : 314 = 10′ :
10

314″ halbe kleine Peripherie
100 FC

31400″ kleine Grundfläche
50″ = $\frac{1}{3}$FE

1570000c″ Inhalt des Kegels CED
9156240 Inhalt des Kegels AEB

7586240c″ Inhalt des abgekürzten Kegels ACDB.

202a) Der Inhalt eines abgekürzten Kegels läßt sich sehr leicht durch eine allgemeine Formel ausdrucken, und hiernach durch eine einfache Regel berechnen.

Es sey nämlich

$CD = d$, $AB = D$, $GE = H$, $FE = h$, $HC = a$,

des ganzen Kegels Inhalt $= K$, des untern Kegelstücks oder des abgekürzten Kegels Inhalt $= k$, so hat man

$$k = \tfrac{1}{3} H \cdot 0{,}785 \cdot D^2 - \tfrac{1}{3} h \cdot 0{,}785 \cdot d^2$$

Es ist aber

$$H = \frac{D}{D-d} \cdot a \text{ und } h = \frac{d}{D-d} \cdot a;$$

also

$$k = \tfrac{1}{3} a \cdot 0{,}785 \cdot D^2 \cdot \frac{D}{D-d} - \tfrac{1}{3} a \cdot 0{,}785 \cdot d^2 \cdot \frac{d}{D-d}$$

$$= \tfrac{1}{3} a \cdot 0{,}785 \cdot \frac{D^3 - d^3}{D-d}$$

Dividirt man wirklich

$$D^3 - d^3 \text{ mit } D - d,$$

so giebt sich

$$k = \tfrac{1}{3} a \cdot 0{,}785 \cdot (D^2 + d^2 + D\,d)$$

Es ist aber $D\,d$ die mittlere Proportionalfläche zwischen d^2 und D^2; Demnach ist der abgekürzte Kegel von gegebener Höhe einem Cylinder von eben der Höhe gleich, dessen Grundfläche das arithmetische Mittel zwischen der großen, der kleinen und der dazwischen liegenden Proportionalfläche wäre.

Lehrsatz.

203. Die Kugel ist $\frac{2}{3}$ von einem Cylinder, der gleiche Grundfläche und Höhe mit ihr hat.

Beweis.

IX. 4. Es sey ABCD der perpendiculaire Durchschnitt eines Cylinders, dessen Diameter AD. Es sey EFG der Durchschnitt einer halben Kugel, deren Diameter $EG = AD$. Die Höhe des Cylinders AB sey dem Radio der Kugel FH gleich, und AD sowohl als EG befinden

finden sich in einer geraden Linie AG. In dem Cylinder sey ein Kegel dergestalt ausgehöhlt, daß dessen Grundfläche so groß sey, als die obere Grundfläche des Cylinders, die Spitze desselben aber befinde sich in dem Mittelpunkte der untern Grundfläche L. Und BLC sey der Durchschnitt dieses Kegels.

Man setze, daß sowohl der Cylinder als die Kugel und der Kegel, durch die mit AG parallele Fläche RK durchschnitten werde: so ist der Radius dieser Fläche im Cylinder MS, im Kegel MO, und in der Kugel IK, wenn man nemlich aus den Mittelpunkten L und H die Perpendicularlinien LT und HF aufrichtet, welche die Fläche RK in M und I durchschneiden. Man ziehe ferner von H bis K die gerade Linie HK; so ist HIK ein rechtwinklichter Triangel, und wenn man das Quadrat von IH von dem Quadrate von HK wegnimmt, so bleibt das Quadrat von IK übrig (§. 144.). Und weil sich die Circulflächen gegen einander verhalten, wie die Quadrate der Diametrorum (§. 131.); so wird der mit IK beschriebene Cirkul übrig bleiben, wenn man von dem mit HK beschriebenen Circul den abziehet, der mit IH beschrieben wird. Nun ist aber HK der Radius der Kugel (§. 13.), der dem Radio des Cylinders AL = MS gleich ist. Und weil IH = ML (§. 20.) und ML = MO (§. 149.); so ist IH = MO (§. 57. Arithm.), das ist, es ist der Radius des Ausschnittes vom Kegel. IK aber ist der Radius der Kugel. Folglich bleibt der Durchschnitt der Kugel übrig, wenn man von dem Durchschnitte des Cylinders, den Durchschnitt des Kegels abziehet. Da nun der Kegel $\frac{1}{3}$ vom Cylinder ist (§. 200), so muß der Durchschnitt der halben Kugel EFG, $\frac{2}{3}$ von dem Durchschnitte des Cylinders ABCD seyn. Da nun dieses von allen Durchschnitten gilt, so muß der Inhalt der Kugel $\frac{2}{3}$ vom Inhalt des Cylinders seyn. W. Z. E.

Lehrsatz.

204. Der Cubus Diametri **verhält sich zu der Kugel beynahe wie** 300 **zu** 157.

Beweis.

Wenn der Diameter der Kugel 100 ist; so hält der Cubus desselben 1000000 (§. 191.) und der Cylinder, der mit der Kugel Eine Grundfläche und Höhe hat, 785000 (§. 197.) Und demnach ist der Inhalt der Kugel $523333\frac{1}{3}$ (§. 203.). Solchergestalt verhält sich der Cubus zur Kugel, wie 1000000 zu $523333\frac{1}{3}$, das ist, wenn man beyderseits mit 3 multipliciret, wie 3000000 zu 1570000 (§. 58. Arithm.), oder wenn man ferner durch 10000 dividiret, wie 300 zu 157 (§. 59. Arithm.) W. Z. E.

Anmerkung.

205. Ich sage, der Cubus Diametri verhalte sich zur Kugel beynahe wie 300 zu 157, weil man voraussetzt, der Diameter im Circul verhalte sich zu seiner Peripherie wie 100 zu 314; welches nur beynahe zutrift (§. 129.).

Lehrsatz.

§. ** **Die Kugel ist einer Pyramide gleich, deren Grundfläche der ganzen Kugelfläche, die Höhe aber der Hälfte ihres Diameters gleicht.**

Beweis.

Man stelle sich vor, als wenn die Fläche der Kugel in so kleine Vierecke zertheilet sey, daß jedes von ihnen von einer ebenen Fläche nicht mehr merklich unterschieden. Man setze hinzu, daß aus dem Mittelpunkte der Kugel an ihre Ecken gerade Linien gezogen seyn. Alsdenn ist klar, daß die Kugel aus unzählig viel viereckten Pyramiden bestehe, die im Mittelpunkte der Kugel mit ihren Spitzen zusammenstoßen, und deren Grundflächen zusammen der Kugelfläche gleich sind, die Höhen aber von dem halben Diameter der Kugel nicht merklich unter-

terschieden. Derowegen wird die ganze Kugel mit Recht für eine Pyramide gehalten, deren Grnndfläche der Kugelfläche, die Höhe aber der Hälfte ihres Diameters gleichet. W. Z. E.

Lehrsatz.

206. **Die Kugelfläche verhält sich zu dem größten Circul der Kugel wie 4 zu 1.**

Beweis.

Weil der Inhalt der Kugel dem Inhalte einer Pyramide gleich ist, deren Grundfläche der Kugelfläche, die Höhe aber ihrem halben Diameter gleichet (§. **): so kömmt die Kugelfläche heraus, wenn man den körperlichen Inhalt der Kugel durch den dritten Theil des halben Diameters, oder den sechsten des ganzen dividiret (§. 201.). Wenn nun der Diameter 100 ist, so ist der Inhalt des größten Circuls 7850 (§. 134.), der Inhalt aber der Kugel $\frac{1570000}{3}$ (§. 204.). Derowegen, wenn ihr diesen durch den sechsten Theil des Diameters $\frac{100}{6}$ dividiret, so kommt für die Kugelfläche 31400 (§. 71. Arithm.) Demnach verhält sich die Kugelfläche zu dem größten Circul der Kugel, wie 31400 zu 7850, das ist, wenn man beyderseits mit 7850 dividiret, wie 4 zu 1 (§. 59. Arithm.) W. Z. E.

Zusatz.

207. Also kommet die Kugelfläche heraus, wenn man die Peripherie durch den Diameter multipliciret (§. 134.).

Aufgabe.

208. **Aus dem gegebenen Diameter einer Kugel sowohl den Inhalt ihrer Fläche, als ihren körperlichen Inhalt zu finden.**

Auflösung.

1. Suchet die Peripherie des größten Circuls (§. 132.).
2. Multipliciret sie durch den gegebenen Diameter; so habet ihr die Kugelfläche (§. 207.).
3. So ihr nun ferner dieselbe durch den sechsten Theil des Diameters multipliciret, oder durch den ganzen Diameter, und das Produkt durch 6 dividiret; kommet der körperliche Inhalt der Kugel heraus.

Z. E. Es ist der Diameter 5600‴; so ist die Peripherie des größten Circuls 17584‴.

17584‴
Diameter 5600

10550400
87920

Kugelfläche 98470⁴ □″
Diameter 560

59082240
4923520

55143424⁰ ⊡″,

xs 4
ssx4s4z4ø | 9190570$6\frac{2}{3}$ ⊡″ Inhalt der Kugel.
øøøøøøøø

Aufgabe.

209. Aus dem gegebenen Diameter einer Kugel ihren körperlichen Inhalt noch auf eine andere Art zu finden.

Auflösung.

1. Suchet den Cubum des Diameters (§. 191.) oder in den Tabellen über die Cubikzahlen.
2. Suchet zu 300; 157 und dem gefundenen Cubo die vierte Proportionalzahl (§. 95. Arithm.), die-

se

se ist der körperliche Inhalt der Kugel (§. 204.).

Z. E. Es sey der Diameter einer Kugel 64″; so ist dessen Cubus 262144c″ folgends

300 — 157 — 262144c″

157

1835008
1310720
262144

41156608

xx xxx
4xxx66608 | 137188$\frac{208}{300}$c″ Inhalt der Kugel.
333x3300

Lehrsatz.

210. Alle Prismata, imgleichen Parallelepipeda, Cylinder, Pyramiden und Kegel, wenn sie gleiche Höhe haben, verhalten sich wie ihre Grundflächen: haben sie aber gleiche Grundflächen: so verhalten sie sich wie ihre Höhen.

Beweis.

Prismata, Parallelepipeda und Cylinder verhalten sich, wie die Produkte aus ihren Höhen in ihre Grundflächen (§. 194. 196. 197.): Pyramiden aber und Kegel, wie die Produkte aus dem dritten Theile ihrer Höhen in ihre Grundflächen (§. 201.): und also alle insgesammt, wenn ihre Höhen gleich sind, wie die Grundflächen, wenn aber die Grundflächen gleich sind, wie die Höhen (§. 58. Arithm.). W. Z. E.

Zusatz.

211. Weil die Cylinder Circul zu ihren Grundflächen haben (§. 179.), die Circul aber sich wie die Quadrate ihrer Diameter verhalten (§. 1131.); so müssen auch die Cylinder von gleicher Höhe sich wie die Qua-

drate ihrer Diameter, oder der Diameter ihrer Grundflächen verhalten.

Lehrsatz.

212. Die Kugeln verhalten sich gegen einander wie die Cubi ihrer Diameter.

Beweis.

Wie die eine Kugel zu dem Cubo ihres Diameters, so verhält sich auch die andere zu dem Cubo ihres Diameters (§. 204.). Derowegen verhält sich auch die eine Kugel zu der andern, wie der Cubus des Diameters der einen, zu dem Cubo des Diameters der andern (§. 83. Arithm.). W. Z. E.

Aufgabe.

213. Einen Visirstab zu verfertigen, durch den man leicht finden kann, wie viel Kannen von einer flüßigen Materie, als Bier, Wein, Brandtewein u. s. w. in einem cylindrischen Gefässe enthalten sind, oder Raum haben.

Auflösung.

VII. 126. 1. Nehmet den Diameter von einem cylindrischen Gefässe, dergleichen man zu einem Kannenmaasse brauchet, und traget ihn aus A in B.

2. Richtet in A eine lange Perpendicularlinie auf, und traget aus A in 1 den Diameter des Kannengefässes; so ist die Linie B 1 der Diameter von einem zweykannigen Gefässe, welches mit dem einkannigen einerley Höhe hat.

3. Traget B 1 aus A in 2, so ist B 2 der Diameter eines dreykannigen Gefässes, welches mit dem einkannigen einerley Höhe hat.

4. Wenn ihr nun auf gleiche Art die Punkte 3. 4. 5. 6. u. s. w. gefunden; so traget dieselben auf die

eine Seite des Visirstabes, auf die andere aber die Höhe der Kanne so vielmal, als angehet. So ist geschehen, was man verlanget.

Beweis.

Denn wenn zwey cylindrische Gefässe einerley Höhe, und zwar die Höhe einer Kanne haben, verhalten sie sich, wie die Quadrate ihrer Diameter (§. 211.). Daher ist das Quadrat des Diameters eines zweykannigen Gefässes zwey; eines dreykannigen drey; eines vierkannigen viermal so groß, als eines einkannigen u. s. w. Nun ist das Quadrat B 1 oder A 2 zweymal, das Quadrat B 2 oder A 3 dreymal, das Quadrat B 3 oder A 4 viermal so groß, als das Quadrat AB oder A 1 (§. 144.) u. s. w. Da nun AB oder A 1 der Diameter eines einkannigen Gefässes ist, so ist A 2 der Diameter eines zweykannigen, A 3 der Diameter eines dreykannigen, A 4 der Diameter eines vierkannigen u. s. w. Derowegen, wenn ihr mit der Seite des Maaßstabes, da diese Eintheilungen aufgezeichnet sind, den Diameter eines cylindrischen Gefässes ausmesset; so wisset ihr, wie viel Kannen auf dem Boden stehen können. Messet ihr nun ferner mit der andern Seite des Visirstabes die Länge desselben; so wisset ihr, wie viel Kannen über einander stehen können. Derowegen, wenn ihr den Diameter durch die Höhe multiplicieret; so kommt die Anzahl der Kannen heraus, die das ganze Gefässe fassen kann. Und solchergestalt könnet ihr durch den verfertigten Visirstab den Inhalt eines cylindrischen Gefässes und die Kannenmaasse finden. W. Z. E.

Anmerkung.

214. Es sey z. E. der Diameter eines cylindrischen Gefässes 8, die Höhe 12; so haben 96 Kannen darinnen Raum.

Auf-

Aufgabe.

215. Ein gegebenes Faß zu visiren, das ist, zu finden, wie viel Kannen in demselben Raum haben.

Auflösung.

VII. 127. 1. Messet mit der gehörigen Seite des Visirstabes den Diameter des Bodens AB, imgleichen den Diameter des Bauches durch das Spundloch CD: dabey mit der andern Seite des Visirstabes die Länge des Fasses EF.

2. Weil das Faß mitten bey dem Spundloche einen Bauch hat, gegen den Boden aber beyderseits niedergedruckt ist; so nimmt man an, (weil es vermöge der Erfahrung zutrift, ob es sich gleich nicht geometrisch erweisen lässet,) daß das Faß einem Cylinder gleich sey, dessen Grundfläche der mittlere arithmetische Proportionalcircul zwischen dem kleinen Circul des Bodens und dem großen des Bauches ist. Addiret demnach den großen Diameter CD und den kleinen AB.

3. Die halbe Summe multipliciret durch die Länge des Fasses FE; so kommt vermöge des Beweises der vorhergehenden Ausgabe (§. 213.) die Zahl der Kannen heraus, welche in dem Fasse Raum haben.

Z. E. Es sey AB = 8
CD = 12
so ist die Summe = 20
die halbe Summe = 10
FE = 15
Inhalt des Fasses = 150 Kannen.

Auf-

Aufgabe.

215 a) Den Inhalt eines gegebenen Fasses zu berechnen.

Auflösung.

Da die Dauben eines Fasses nicht nach einem geometrischen Gesetz gekrümmet werden, so ist auch keine völlig genaue Auflösung dieser Aufgabe zu erwarten, sondern man muß sich begnügen, der Wahrheit nur nahe genug zu kommen, und daher einen geometrischen Körper anzugeben, der dem Faß am nächsten kommt. Man ist daher auf ganz verschiedene Methoden verfallen, wovon immer eine der Wahrheit näher kommt als die andere.

Ite **Methode.** Einige betrachten das Faß als einen geometrischen Körper, der aus zwey gleich großen abgekürzten Kegeln an ihren Grundflächen zusammengesetzt wäre. Die Abweichung des aus dieser Berechnung sich ergebenden Resultats von dem wirklichen Befund, beträgt beyläufig auf zwölf Kannen schon Eine, welche die Berechnung zu wenig giebt. Man müßte also bey Anwendung dieser Methode das Resultat etwa um $\frac{1}{12}$ vergrößern.

IIte **Methode.** Wolf und Andere betrachten das Faß als einen Cylinder von der Länge des Fasses, dessen Grundfläche das Mittel zwischen dem Boden des Fasses und dem Durchschnitt beym Spunden wäre. Die Abweichung von der Wahrheit ist hierbey ohngefähr wie no. I.

IIIte **Methode.** Weit näher kommt man der Wahrheit, wenn man von der Bodenfläche des Fasses Ein Drittheil, und von der Durchschnittsfläche beym Spunden zwey Drittheile nimmt, und diese Summe mit des Fasses Länge multiplicirt. Man fehlt hierbey selten über $\frac{1}{120}$ des Ganzen.

IVte **Methode.** Man addirt Ein Drittheil vom Durchmesser der Bodenfläche zu zwey Drittheilen vom Durchmesser der Spundentiefe, und sieht nun die Summe als den Durchmesser eines Cylinders an, der bey der Länge des Fasses mit demselben einerley Inhalt hat.

Der Fehler bey dieser Methode ist nicht größer, als bey der vorigen (no. III.) Aber beyde Fehler sind einander entgegengesetzt, so daß die eine Methode beyläufig zu viel giebt,

was

was die andere zu wenig giebt. Daraus ergiebt sich eine mittlere, welche noch genauer als diese beyden ist. Nämlich:

Vte Methode. Man berechnet sowohl die mittlere Cylinderfläche no. III. als die no. IV., und multiplicirt die Hälfte von der Summe dieser beyden Flächen mit des Fasses Länge.

Die drey letztern Methoden giebt Hr. Lambert in seinen Beyträgen zum Gebrauch der Mathematik 1. Th. S. 325 u. f.

VIte Methode, Hrn. Klinkenbergs. Man addirt zwey Drittheile der Spundentiefe zum Durchmesser des Bodens, multiplicirt diese Summe mit der Differenz der beyden genannten Durchmesser, und addirt zu diesem Produkt noch $1\frac{1}{4}$ mal das Quadrat vom Durchmesser des Bodens. Diese letztere Summe multiplicirt man endlich mit $\frac{71}{113}$ von der Länge des Fasses.

VIIte Methode, Hrn. Lulofs. Man addirt den Bodendurchmesser zu $\frac{3}{7}$ der Differenz zwischen der Spundentiefe und dem Bodendurchmesser; die herauskommende Zahl sieht man als den Durchmesser des Cylinders an, der mit dem Faß bey gleicher Länge einerley Inhalt hat.

VIIIte Methode, Hrn. Tiedemanns. Einen Theil von der Länge der Dauben, aus der Mitte nach beyden Böden hin, sieht man als Kreisbögen an, welche aus dem Mittelpunkt des Fasses beschrieben wären, den übrigen Theil ihrer Länge aber bis an die Faßböden als grade Linien; der Punkt, wie weit der Bogen geht, und wo also die grade Linie anfängt, wird dadurch bestimmt, daß man aus der Mitte des Fasses bis zum Umfang des Bodens an irgend einen Punkt eine grade Linie zieht, und über solcher einen halben Kreis beschreibt, der dann die Krümmung der Dauben, durch welche der Bogen durchgeht, in dem gesuchten Scheidungspunkt trift.

IXte Methode, Hrn. Camus. Man theilt die Länge des Fasses in 4 gleiche Theile, und nimmt die beyden mittlern für parabolische Bögen (s. unten höhere Geom. §. 23.), die äuseren aber für derselben gradlinichte Verlängerung an.

Xte Methode, Hrn. Müllers. Das Faß wird etwas mühsam, unter der Voraussetzung, daß es ein conhoidisches

disches Sphäroid sey (s. unten höh. Geom. §. 27.) berechnet. Nämlich:

1) Man subtrahirt $\frac{3}{10}$ des Unterschieds der Spundentiefe und des Bodendurchmessers von $\frac{2}{3}$ der Spundentiefe.

2) Vom Quadrat des erwähnten Unterschiedes zwischen dem größten und kleinsten Durchmesser des Fasses nimmt man $\frac{3}{28}$, und dividirt solches durch die Spundentiefe.

3) Aus der Spundentiefe mit dem halben Unterschied des größten und kleinsten Faßdurchmessers multiplicirt, ziehe man die Quadratwurzel, und multiplicire solche wieder mit dem erwähnten halben Unterschied beyder Durchmesser.

4) Die no. 1 und 2 gefundenen Zahlen addire man zusammen, und multiplicire die Summe mit der no. 3. gefundenen Zahl.

5) Das Quadrat vom halben Bodendurchmesser multiplicire man mit dem vierten Theil von der Länge des Fasses.

6) Das no. 4. gefundene Produkt addire man zu der no. 5. gefundenen Zahl, und multiplicire diese Summe mit 12,56 so hat man den Inhalt des Fasses.

XIte **Methode.** Man betrachtet die Krümmung der Faßdauben als eine **Parabel**; unter dieser Voraussetzung multiplicirt man $\frac{2}{3}$ von dem Unterschied des größten und kleinsten Halbmessers mit der Länge des Fasses, und die so herauskommende Fläche noch mit dem mittlern Umfang des Fasses. So ergiebt sich des Fasses **Bauch**, wozu man noch den **Cylinder** zwischen beyden Faßböden addirt.

XIIte **Methode.** **Hr. Lambert** hat die Krümmung der Dauben als einen Kreisbogen angesehen, und darauf seine Berechnung gegründet, welche mit der Vten Methode übereinkommt. Diese Voraussetzung stimmt mit der, daß die Krümmung eine Meschellinie sey, sehr genau zusammen, wie ich in den **Bemerk. der Kurpf. phys. ökon. Gesellsch.** 1777 gewiesen habe. Ebendaselbst hat die Voraussetzung der paraboliſchen Gestalt (XI.) den Inhalt der Fässer noch genauer gegeben, als die Voraussetzung der kreisförmigen.

Ohnstreitig ist die Xte Methode die genauste, wie die von Hrn. Müller selbst angestellten Vergleichungen beweisen.

Aber

Aber für die Ausübung bleibt die IIIte Methode genau genug, daher ich solche als die leichteste zum Gebrauch vorzüglich empfehle. *)

Erst im Jahr 1794 hat die königl. dänische Akad. d. W. zu Kopenhagen die Berechnung sowohl ganz- als nicht ganz angefüllter Fässer als Gegenstand einer Preisaufgabe gewählt, deren Beantwortung aber noch nicht erschienen, mir wenigstens noch nicht bekannt geworden ist. Man hat auch über eben diesen Gegenstand eine Schrift vom Hrn. Prof. Späth in Altdorf.

Aufgabe.

215b) Den Inhalt des Fluidums in einem Faß, dessen Mittellinie genau wagrecht liegt, zu bestimmen, wenn das Faß nur zum Theil damit angefüllt ist.

Auflösung.

1. Man berechne zuerst den Inhalt des benetzten Bodenstücks nach (§. 163.), und multiplicire solchen mit des Fasses Länge, so hat man den Inhalt des zwischen beyden benetzten Stücken der Faßböden liegenden cylindrischen Stücks.

2. Man berechne den Inhalt des ganzen Fasses, und ziehe den Inhalt des ganzen zwischen den beyden Faßböden liegenden Cylinders davon ab, so hat man den Inhalt von dem eigentlichen **Bauch** des Fasses, d. i. von der um jenen Cylinder ringsherum liegenden Wölbung.

3. Von diesem Inhalt der ganzen Wölbung nehme man den sovielten Theil, als das benetzte Stück der Bodenfläche von der ganzen Bodenfläche beträgt, so hat man den Inhalt von dem angefüllten Theil des ganzen Bauchs.

4. Das no. 3. berechnete Bauchstück zu dem no. 1. berechneten cylindrischen Stück addirt, giebt den gesuchten vollständigen Inhalt.

Anmer-

*) Bey allen diesen Methoden habe ich nur von einer Bodenfläche gesprochen; ich merke daher noch an, daß man, wo nicht beyde Bodenflächen gleich groß sind, allemal die Hälfte von beyder Summe gebrauchen müsse.

Anmerkung.

216. Bey vorstehender Aufgabe wird vorausgesetzt, daß allemal ein Stück der Bodenflächen benetzt sey; reicht die Oberfläche des Fluidums nicht bis zu den Bodenflächen, so läßt sich über seinen kubischen Inhalt keine sichere Berechnung anstellen.

Aufgabe.

217. **Eines jeden irregulären Körpers Inhalt zu finden.** VII. 128.

Auflösung.

1. Leget den Körper in ein ausgehöhltes Parallelepipedum und übergiesset ihn mit Wasser, oder überschüttet ihn mit Sande. Merket dabey die Höhe des Wassers, oder des wohlgeebneten Sandes AB.

2. Nehmet den Körper heraus, und merket abermal die Höhe des Wassers oder des Sandes, nachdem er wieder geebnet worden, AC; so wisset ihr BC.

3. Weil nun der Inhalt des Körpers dem Parallelepipedo DFCGE gleich ist; so messet desselben Länge FC und Breite CG, und suchet den Inhalt desselben (§. 194.)

Z. E. Es sey AB 8′, AC 5′; so ist BC 3′. Es sey ferner FC 12′ CG 4′; so wird endlich der Inhalt des Körpers 144′ gefunden.

Anmerkung.

218. Wenn man den Körper in dergleichen Gefässe nicht wohl legen kann, als wenn man zum Exempel eine feststehende Statue ausmessen sollte: so darf man nur entweder ein Parallelepipedum, oder ein viereckichtes Prisma um denselben aufrichten, den leeren Raum mit Sand ausfüllen, und im übrigen wie vorhin verfahren.

Aufgabe.

219. **Netze zu zeichnen, daraus man die geometrischen Körper zusammen legen kann.**

Auflösung.

VIII. 129. 1. Beschreibet einen gleichseitigen Triangel ABC (§. 53.) theilet die Seiten in zwey gleiche Theile in DE und F, und ziehet die Linien DE, EF und FD, so ist das Netz des Tetraëdri fertig (§. 190.)

VIII. 130. 2. Wenn man die Seite AC in G, BC in H und ED in L verlängert, bis CG = DC, CH = FC, DI = IL = ED; so lassen sich die Linien GL, CI und IH ziehen, und ist das Netz des Octaëdri fertig (§. 190.).

VIII. 131. 3. Traget auf die Linie AB die Seite eines Würfels AI viermal, so daß AI = IL = LN = NB, und construiret das Rectangulum ACDB dergestalt, daß AC = AI (§. 99.). Ziehet die Linien IK, LM, NO mit AC parallel (§. 67.), und verlängert IK und LM beyderseits in E und F, G und H, bis EI = IK = KF und GL = LM = MH: so giebet sich das Netz des Hexaëdri oder des Würfels (§. 182.).

VIII. 132. 4. Beschreibet ein reguläres Fünfeck ABCDE (§. 107.), leget das Linial an D und B, und ziehet die Linie BL; leget es gleichfalls an D und A und ziehet die Linie AG: machet AG = AB = BL, und mit der Weite AB aus G und L einen Durchschnitt in Q; so giebet sich das Fünfeck ABLQG. Auf gleiche Art hänget die übrigen Fünfecke BNROC, CHGFD, DKSME, ETVIA, imgleichen die übrigen sechs a, b, c, d, e, f, daran; so ist das Netz des Dodecaëdri fertig (§. 190.).

VIII. 133. 5. Beschreibet einen gleichseitigen Triangel ACB (§. 53.); verlängert die Linie AB in D, und traget sie noch viermal darauf, ziehet CE mit AD parallel (§. 67.), und machet CI = IK = KL = LM = ME = AB; verlängert AC in N bis CN = AC; leget das Lineal an B und I, F und K, G und L, H und

H und M, D und E, und ziehet die Linien YO, SP, TQ, VR, und XE; leget dasselbe ferner auf D und M, H und L, G und K, F und I, B und C, und ziehet die Linien DQ, XP, VO, TN, SC; endlich machet MR = ME und BY = BA, und ziehet die Linien RE und AY. Die beschriebene Figur ist das Netz des Icosaëdri (§. 190.)

6. Auf die Linie BD traget aus B in H die Breite, aus H in I die Länge, aus I in K die Breite, und aus K in D die Länge eines Parallelepipedi; in B richtet seine Höhe BA perpendicular auf, und beschreibet das Rectangulum BACD (§. 99.) Ziehet EH, FI, GK mit AB parallel (§. 67.) und verlängert EH beyderseits in L und N, imgleichen FI in M und O, bis LE, MF, IO und NH der Breite des Parallelepipedi BH gleich werden; so giebet sich das Netz des Parallelepipedi (§. 182.) VIII. 134.

7. Traget auf CF die Seiten der Grundfläche eines Prismatis CG, GH und HF, beschreibet das Rectangulum CAEF, dessen Höhe CA der Höhe des Prismatis gleich ist (§. 90.). Auf BD und GH construiret mit AB und DE, CG und HF die ΔΔ BKD und GIH (§. 55.); so ist das Netz des Prismatis fertig (§. 179.) Wenn die Grundfläche ein Fünf Sechs-Siebeneck ꝛc. ist; so wird auf BD und GH ein Fünf-Sechs-Siebeneck ꝛc. beschrieben. VIII. 135.

8. Beschreibet aus A mit der Seite einer Pyramide AE einen Bogen EB; traget darein die Linien des Umfanges von der Grundfläche ED, DC, CB und ziehet die Linien AE, AD, AC, AB. Endlich beschreibet auf DC die Grundfläche der Pyramide; so ist das Netz fertig (§. 187.). VIII. 136.

9. Für das Netz des Cylinders beschreibet ein Rectangulum (§. 99.), dessen Höhe BC der Höhe des VIII. 137.

Cylinders, die Länge CF dem Umfange gleich ist (§. 132.): verlängert BC in A und D, bis BA und CD dem Diameter gleich werden, und beschreibet die Circul der Grundflächen des Cylinders. So ist geschehen, was man verlangte (§. 179.).

Anmerkung.

220. Damit man nun die Körper aus den Netzen zusammen leimen kann; so lässet man einige Ränder, indem man sie ausschneidet, wie durch die punctirten Linien Fig. 129. angedeutet worden. Diese Arbeit dienet den Anfängern, die geometrischen Körper deutlich zu begreifen.

Ende der Geometrie.

Anfangs-Gründe der Trigonometrie.*)

Erklärung.

1.

Die Trigonometrie ist eine Wissenschaft, aus drey gegebenen Theilen eines Triangels, nemlich entweder aus zwey Seiten und einem Winkel, oder aus zweyen Winkeln und einer Seite, oder auch aus allen drey Seiten, die übrigen drey Theile zu finden. I. 1. I. 1.

Erklärung.

2. Die halbe Sehne AD eines Bogens AM heisset der Sinus des Bogens AE, imgleichen des Bogens AI, welche die Hälften der Bogen AEM und AIM sind. I. 2. 2.

*) Ausser den schon oben zur Geometrie angeführten Schriften, nenne ich von den vielen hierher gehörigen nur noch folgende:

Hrn. v. Oppels analysis triangulorum.
— Klügels analytische Trigonometrie.
— Kästners astronomische Abhandlungen.
Desselben geometrische Abhandlungen.
— Lamberts Beyträge zum Gebrauch der Mathem. I. und II. Th.
— Tempelhofs vollständige Anleitung zur Algebra.
— Biörnsen introductio in tetragonometriam.

Zusatz.

1. 2. 3. Derowegen stehet der Sinus eines Bogens AD auf dem Radio des Circuls EC perpendicular (§. 95. Geom.): und also sind die Sinus verschiedener Bogen mit einander parallel. (§. 75. Geom.).

Zusatz.

1. 2. 4. Weil der Bogen AE das Maaß des Winkels ACE, und der Bogen AI das Maaß des Winkels ACI ist (§. 16. Geom.); so ist auch AD der Sinus derselben Winkel.

Zusatz.

1. 2. 5. Und also haben zwey Winkel, die neben einander auf einer Linie EI stehen, einerley Sinum.

Erklärung.

1. 2. 6. Die Linie EF, welche auf dem Ende des Radii EC perpendicular aufgerichtet wird, heisset des Bogens AE, und folgends des Winkels ECA Tangens; FC aber desselben Bogens und Winkels Secans.

Erklärung.

1. 2. 7. Hingegen ED wird sein Sinus Versus und AG (= DC) der Sinus des Bogens AH, welcher mit EA 90 Grad machet, der Sinus Complementi, oder auch Cosinus genennet: der Tangens davon HL Tangens Complementi, oder auch Cotangens, imgleichen der Secans CL Secans Complementi oder Cosecans.

Anmerkung.

7a) Ich muß hier erinnern, daß sich der ältere Sprachgebrauch in etwas abgeändert hat; man gebraucht jetzt die Benennungen: Tangente, Sekante, Quersinus, Kosinus, Kotangente, Kosekante statt Tangens, Secans, Sinusversus, Sinus complementi, Tangens complementi, Secans complementi.

Erklä-

Erklärung.

8. Endlich der Radius EC heisset der Sinus totus. I. 2.

Zusatz.

9. Weil der Radius EC der Sinus des Quadranten EH ist; so ist der Sinus totus der Sinus eines rechten Winkels (§. 37. Geom.).

Lehrsatz.

10. Die Sinus ähnlicher Bogen BC und EF haben gegen ihre Radios AB und ED einerley Verhältniß. I. 3.

Beweis.

Wenn die Bogen BG und EH einander ähnlich sind; so hat jeder gleich viel Grade, und also sind die Winkel A und D einander gleich (§. 35. Geom.) Nun sind bey C und F rechte Winkel (§. 3.) Derowegen ist, wie der Radius AB zum Sinu BC, so der Radius ED zum Sinu DF (§. 148. Geom.) W. Z. E.

Anmerkung.

11. Daher hat man dem Sinui toti in einem jeden Circul insgemein 10000000 Theile zugeeignet, und durch Hülfe der Geometrie ausgerechnet, wie viel derselben der Sinus und Tangens von jedem Grade, in einer jeden Minute, durch den ganzen Quadranten bekommet. Und solchergestalt sind die Tabulae Sinuum und Tangentium entstanden, welche man in der Trigonometrie nöthig hat: wie in den Anfangsgründen umständlicher gezeiget wird.

11a) S. H. H. Kästners Geom. Abh. 2te Samml. S. 354 u. f. f. (*).

Anmerkung.

12. Weil die Sinus und Tangenten große Zahlen sind, welche das Multipliciren und Dividiren in der Trigonometrie

*) Ich sehe mich hier durchaus genöthigt, die Wolfischen Anmerkungen §. 15 — 18 etwas abzuändern, und mehrere unentbehrliche Sätze einzuschalten.

sehr beschwerlich machen, so ist man auf die Berechnung solcher Tafeln verfallen, woraus man die Produkte und Quotienten durch bloße Anwendung der Addition und Subtraktion anderer Zahlen, welche Logarithmen genennt werden, finden kann.

Erklärung.

13. Wenn eine Reihe Zahlen in geometrischer Proportion, und eine andere in arithmetischer fortgehen, so heisen die in der leztern, die Logarithmen der erstern.

Anmerkung.

14. Es seyen die beyden Reihen Zahlen

1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.
0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.

wo die der ersten Reihe in einer geometrischen, und die der andern in einer arithmetischen fortgehen, so ist 0 der Logarithme von 1; 1 der Logarithme von 2; 2 der Logarithme von 4; 7 der Logarithme von 128 u. s. w.

Anmerkung.

15. Wenn der Logarithme von 1 die 0 ist, so ist der Logarithme des Produkts verschiedener Zahlen aus der geometrischen Reihe gleich der Summe der zugehörigen Zahlen aus der arithmetischen Reihe, weil jedes Glied der geometrischen Reihe durch eben so vielmal wiederholte Multiplication der Zahl mit der dabey zum Grund liegenden geometrischen Verhältniß, d. i. dem Exponenten entsteht, so vielmal in der arithmetischen Reihe die Addition der dabey angenommenen arithmetischen Verhältniß, d. i. der Differenz zu der 0 wiederholt werden muß, wenn man das eben so vielte Glied in der arithmetischen Verhältniß haben will. Z. B. wenn man die beyden Reihen (§. 14.) hat, so entsteht jedes Glied der dortigen geometrischen Reihe, wenn man das nächstvorhergehende mit 2 multiplicirt, und jedes Glied der arithmetischen Reihe, wenn man zu dem nächstvorhergehenden allemal 1 addirt. Nimmt man nun z. B. die 5te Zahl aus der geometrischen Reihe, oder die 4te nach der 1., so entsteht solche, wenn man die Multiplication der 1 mit 2 viermal wiederholt, wie neben stehende Rechnung zeigt.

Ver-

Verlangt man nun aus der zugehörigen arithmetischen Reihe das eben so vielte, also gleichfalls das vierte Glied nach der 0, so erhält man solches, indem man die Addition der 1 zu 0 viermal wiederholt, wie wieder aus neben stehender Rechnung zu ersehen ist.

Multiplicirt man also mehrere Zahlen aus der geometrischen Reihe, z. B. das dritte und fünfte nach der 1, so erhält man dasjenige Glied der geom. Reihe, welches aus der 3fachen und 5fachen d. i. aus der 8fachen Multiplication der angenommenen geometrischen Verhältnißzahl mit der 1 entstanden ist, d. i. nach der 1 das 8te Glied der geom. Reihe; addirt man hingegen die zugehörigen Glieder der arithmetischen Reihe, nämlich das 3te und 5te nach der 0, so erhält man dasjenige Glied der arithm. Reihe, welches aus der 3fachen und 5fachen, d. i. der 8fachen Addition der arithmetischen Verhältnißzahl entstanden ist, oder nach der 0 gleichfalls das 8te Glied der arithmet. Reihe.

Hieraus erhellet also, daß das Produkt mehrerer Zahlen aus der geometrischen Reihe allemal das ebensovielte Glied in der geomet. Reihe giebt, das sovielte in der arithmetischen herauskommt, wenn man die unter den mit einander multiplicirten Zahlen stehenden Glieder der arithmet. Reihe zusammen addirt. (L.)

	1
	2
I.	2
	2
II.	4
	2
III.	8
	2
IV.	16
	0,
	1
I.	1
	1
II.	2
	1
III.	3
	1
IV.	4

Anmerkung.

15 a) Was hier gesagt worden ist, gilt von jeder geom. Reihe, die sich mit 1, und arithmetischen, die sich mit 0 anfängt. Man nehme z. B. die beyden Reihen

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729.
0. 2. 4. 6. 8. 10. 12.

so gelten von beyden Reihen alle die vorhin erwähnten Sätze.

I. Ex. Wenn man in den vorigen Reihen aus der geometrischen die Zahlen 8 und 64 mit einander multiplicirt, so ist das Produkt 512; die unter 8 und 64 stehenden Logarithmen sind 3 und 6, deren Summe 9 als Logarithme unter der Zahl 512 steht.

II. Ex. In den beyden letzten Reihen ist $9 \times 81 = 729$, und die Summe der unter 9 und 81 stehenden Logarithmen $4 + 8 = 12$ steht als Logarithme unter 729.

Anmerkung.

15b) Ein **logarithmisches System** heist eine solche Berechnung von Zahlen und ihren Logarithmen, oder eine solche Verbindung einer geometrischen und arithmetischen Reihe, worinn bestimmt ist, in welcher geometrischen Verhältniß die Zahlen der geom. Reihe auf einander folgen, welche zu den unter einer gegebenen arithm. Verhältniß auf einander folgenden Zahlen der arithmetischen Reihe gehören.

Anmerkung.

15c) Die einfachste Art, ein logarithmisches System zu bestimmen, ist diese, daß man angiebt, welche Zahl in der geometrischen Reihe zu der Zahl 1 in der arithmetischen gehört, d. i. daß man die Zahl in dem System angiebt, deren Logarithme 1 ist. So ist z. B. in dem logarithmischen System (§. 14.) 2 die Zahl, deren Logarithme 1 ist. In dem logar. System (§. 15a) ist der Logarithme 1 die arithmetische Proportionalzahl zwischen 0 und 2, also die zugehörige Zahl der geometrischen Reihe, deren Logarithme 1 ist, die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen 1 und 3, d. i. $\frac{1732}{1000}$. Aus diesen beyden Zahlen 2 und 1,732 ergiebt sich die Verschiedenheit der beyden logarithmischen Systemen. Daher heist auch die Zahl, deren Logarithme 1 ist, die **logarithmische Basis.**

Anmerkung.

16. Es ist also in jedem logarithmischen System, wo der Logarithme von 1 die 0 ist, der Logarithme eines Produkts gleich der Summe der Logarithmen der in einander multiplicirten Zahlen, folglich auch der Logarithme eines Quotienten gleich der Differenz der Logarithmen der in einander dividirten Zahlen.

Auch ist daher der Logarithme des Quadrats dem doppelten Logarithmen der Wurzel, und der Logarithme einer Kubikzahl dem 3fachen Logarithmen der Wurzel gleich. Umgekehrt ist der Logarithme der Quadratwurzel die Hälfte vom Logarithmen des Quadrats, und der Logarithme der Kubikwurzel der 3te Theil, vom Logarithmen der Kubikzahl.

Anmerkung.

17. Hieraus erhellet, wie die Logarithmen das Multipliciren in Addiren, das Dividiren in Subtrahiren, die Ausziehung der Quadratwurzel in Halbiren, und die Ausziehung der Kubikwurzel in Dividiren durch 3 verwandeln. Wenn man nämlich ein berechnetes Logarithmensystem in Tafeln vor sich hat, und nun z. B. die beyden Zahlen 1735 und 5943 mit einander multiplicirt werden sollen, so darf man in solchen Tafeln nur die Logarithmen dieser beyden Zahlen aufsuchen, solche addiren, und nun unter den Logarithmen denjenigen aufsuchen, der dieser gefundenen Summe gleich ist; die in den Tafeln neben diesem Logarithmen stehende geometrische Reihenzahl ist nun das Produkt der in einander multiplicirten Zahlen.

Anmerkung.

17a) Wenn man ein gewisses logarithmisches System festgesetzt hat, z. B. das §. 15a), so lassen sich nachher darinn die Logarithmen der zwischen die Hauptglieder der geometr. Reihe fallenden Zahlen gleichfalls finden, wenn man die dazwischen fallende Logarithmen eben so in arithmetischer Reihe auf einander folgen läßt, wie die zwischen die Hauptglieder der geom. Reihe fallenden Zahlen in geom. Verhältniß auf einander folgen, wozu nur mühsame Rechnungen nöthig sind. Man kann sich daher dergleichen berechnete Tafeln gedenken, worinn nach einem willkührlich angenommenen System die Logarithmen von einer gewissen Anzahl der in natürlicher Ordnung auf einander folgenden ganzen Zahlen, ingleichem die Logarithmen der Zahlen, wodurch die trigonometrische Linien ausgedruckt werden, berechnet sind. Die Gründe zu diesen Berechnungen findet man in den oben angeführten Schriften.

Anmerkung.

17b) Die ersten Logarithmentafeln hat **Neper** berechnet. S. Hrn. H. **Kästners** astronom. Abhandl. 2te Samml. S. 62. u. f. f. Auch Hrn. **Scheibels** mathematische Bücherkenntniß S. 57 u. f. f. Nachher hat **Brigge** ein anderes System, dessen Basis 10 ist, das also folgende Gestalt hat:

1.	10.	100.	1000.	10000.
0.	1.	2.	3.	4.

zum

zum Grund gelegt, und hiernach logarithmische Tafeln für alle ganze Zahlen von 1 bis 20000 und von 90000 bis 100000 berechnet, die nachher Vlacq durch Einschaltung aller zwischen 20000 und 90000 fallenden ganzen Zahlen in seiner 1628 herausgekommenen Arithmetica logarithmica ergänzt hat. Die kleinern Ausgaben dieser Vlacqschen Tafeln, z. B. von **Joh. Jak. Hentschen**, enthalten, ausser den trigonometrischen Linien selbsten, die Logarithmen dieser Linien, nebst den Logarithmen der natürlichen Zahlen von 1 bis 10000.

Anmerkung.

17c) Zum genauern Verständniß dieser Tafeln muß ich noch einiges beyfügen. Man sieht nämlich aus dem angeführten System, daß nur die Logarithmen von

1. 10. 100. 1000. u. s. w. blos ganze Zahlen sind,

nämlich 0. 1. 2. 3.

u. s. w. Von jeder Zahl also, die kleiner ist als 10, und größer als 1, ist der Logarithme 0 mit einem angehängten Bruch; von jeder Zahl über 10, die kleiner ist, als 100 ist der Logarithme 1 mit einem Bruch; von jeder Zahl über 100 die kleiner ist als 1000 ist der Logarithme 2 mit einem Bruch; von jeder über 1000, die kleiner ist, als 10000 ist der Logarithme 3 mit einem Bruch u. s. w. Daher heist die ganze Zahl, welche jeder Logarithme enthält, die **Charakteristik** des Logarithmen.

Die der Charakteristik angehängten Brüche sind als Decimalbrüche ausgedruckt, und entweder durch einen Punkt oder durch ein Komma von ihr abgesondert.

Bey den in den Tafeln befindlichen Logarithmen der trigonometrischen Linien ist der Halbmesser nicht in 10 Million Theile, sondern in 10000 Million Theile getheilt zum Grund gelegt worden, daher man sich an Zahlen, welche in den Tafeln die Sinus, Tangenten und Sekanten andeuten, eigentlich noch drey Zifern angehängt vorstellen muß, wenn man begreifen will, warum die Charakteristik bey den Logarithmen der trigonometrischen Linien in den Tafeln durchaus um 3 höher angesetzt ist, als es der in den Tafeln angesetzten Größe der trigonometrischen Linien nach dem Briggischen Logarithmensystem gemäß ist.

Anmer-

Anmerkung.

18. Das **Briggische System** hat man nun wegen seiner besondern Bequemlichkeit überall beybehalten. In den kleinen Ausgaben von Vlacqs Tafeln sind sowohl die trigonometrischen als die Logarithmen von ihnen und von allen ganzen Zahlen von 1 bis 10000 in 7 Decimalstellen angegeben. Sherwins Mathematical Tables con trivd after a most comprehensive method &c. by William Gardiner, enthält die Logarithmen des Briggischen Systems für alle ganze Zahlen von 1 bis 101000 nebst den Logarithmen der trigonometrischen Linien in 7 Decimalstellen; auch sind darin zum bequemen Gebrauch die Differenzen eines jeden Logarithmen vom nächstfolgenden mitgetheilt. **Gellibrands** Tafeln enthalten die trigonometrischen Linien für den Halbmesser = 10000000000000 nebst ihren Logarithmen für alle 100 Theile eines Grades. (L.)

18 a) Diejenigen Logarithmen, die zu einem System gehören, dessen Basis 2,718281 ist, heisen die **natürliche** oder auch **hyperbolische** Logarithmen, deren Berechnung in der Analysis des Unendlichen vorkommt. Sie lassen sich, als **Hülfszahlen** betrachtet, wie alle andere Logarithmen gebrauchen; da sie aber in der höheren Mathematik sehr oft als absolute Größen vorkommen, wofür man die **Briggische** Logarithmen nicht substituiren kann, so hat man in neueren Zeiten gleichfalls eigene Tafeln für sie berechnet.

18 b) Zu den neuesten und wichtigsten trigonometrischen und logarithmischen Tafeln gehören nach Hrn. **Prof. Schulzes Sammlung von Logarithm. Trigonom. und andern nützlichen mathem. Tafeln** 2 Bände 1778. Wer diese Schulzische Tafeln hat, kann alle übrige entbehren. Auser einer Menge anderer für die ganze praktische Mathematik äußerst wichtiger Tafeln, enthalten sie auch die **Briggischen Logarithmen** aller Zahlen von 1 bis 101000 nebst ihren Differenzen und Proportionaltheilen; ingleichem die **natürlichen** oder **hyperbolischen Logarithmen** für alle Zahlen von 1 bis 2200, sodann für alle zwischen 2200 und 10000 fallende Prim- oder sonst schwer zu zerlegenden Zahlen; ferner vollständige **Tafeln** der **Sinussen, Tangenten, Sekanten,** und deren zugehörigen Briggischen und natürlichen **Logarithmen,** für die 4 ersten und letzten Grade von 10 zu 10 Sekunden, für den übrigen Theil des Quadranten aber von Minute zu Minute, nebst dem 6ten Theil der Differenzen; ferner eine

Tafel

Tafel für die Logarithmen der Sinussen und Tangenten kleiner Bögen von 0 Grad bis 2 Grad von Sekunde zu Sekunde.

Die neueste hierhin gehörige Sammlung haben wir von Hrn. Gr. Vega unter dem Titel: Logarithmische, trigonometrische und andere zum Gebrauch der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln, Wien 1783, in Oktav, die sich durch ihre kompendiöse und doch sehr vollständige Einrichtung, und durch eine Korrektheit vom höchsten Grade vorzüglich empfiehlt. Von diesem Verf. ist auch eine neue Ausgabe solcher Tafeln in Folio angekündigt worden. S. H. H. Kästners schon erwähnte astronom. Abh. und desselben geom. Abh. 1ste Samml. S. 475. u. f. f.

18 c) Der Vortrag der Hauptkunstgriffe, dergleichen trigonometrische und logarithmische Tafeln zu berechnen, ist ein Gegenstand der Analysis des Unendlichen, und erfordert eigene Schriften, s. unten die Anal. des Unendlichen §. 5 bis 11. (L.)

Lehrsatz.

I. 4. 19. **In einem jeden Triangel ABC verhalten sich die Seiten, wie die Sinus der ihnen entgegenstehenden Winkel.**

Beweis.

Man gedenke sich, es sey der Triangel ABC in einem Circul beschrieben, welches jederzeit geschehen kann (§. 97. Geom.) So ist der halbe Bogen AB das Maaß des Winkels C (§. 84. Geom.) und also ist die halbe Seite AB desselben Sinus (§. 2.). Eben so ist der halbe Bogen AC das Maaß des Winkels B, und daher die halbe Seite AC der Sinus des Winkels B. Derowegen verhält sich, die Seite AB zu dem Sinu des ihr entgegengesetzten Winkels C, wie die Seite AC zu dem Sinu des ihr entgegen stehenden Winkels B (§. 59. Arithm.). W. Z. E.

Aufgabe.

I. 4. 20. **Aus der gegebenen Seite AB und zweyen Winkeln A und C die Seite BC zu finden.**

Auflö-

Auflösung.

Sprechet (§. 19.):

Wie der Sinus des Winkels C
zu der ihm entgegen gesetzten Seite AB.
So der Sinus des Winkels A
zu der ihm entgegenstehenden Seite BC.

Z. E. Es sey C = 48° 55′, A = 57° 79′ AB = 74′; so verfahret mit den Logarithmis folgendergestalt:

log. Sin. C = 9,8750142
log. AB = 1,8692317
lon. Sin. A = 9,9259487
Summe = 11,7918504

log. BC = 1,9201662, zu welchem in den Tafeln der Logarithmus von 83′ am nächsten kommt.

Anmerkung.

21. Wollet ihr mit 83 Schuhen nicht zufrieden seyn, sondern noch Zolle dazu haben, so suchet diesen Logarithmum unter der Characteristica 2 hinter 830 auf. Alsdenn werdet ihr finden, daß der Logarithmus von 832 ihm am allernächsten kommet, und also über 3 Schuhe noch 2 Zoll sind. Ja wollet ihr gar Linien haben, so suchet euren Logarithmum noch einmal unter der Characteristica 3 hinter 8320 auf: so findet ihr, daß der Logarithmus von 8321 ihm am nächsten kommt, und also die Seite BC 8° 3′ 2″ 1‴ sey. Und solchergestalt müsset ihr allezeit verfahren, wenn der Logarithmus einer Seite unter seiner Characteristica nicht vollkommen zu finden.

Anmerkung.

22. Weil die Auflösung der Aufgabe durch die Regel Detri geschiehet (§. 85. Arithm.), und daher der Sinus A mit der Seite AB multipliciret; das Produkt aber durch den Sinum des Winkels C dividiret werden sollte; so ist klar, daß man den Logarithmum von AB zu dem Logarithmo des Sinus A addiren, und von der Summe den Logarithmum des Sinus C abziehen muß (§. 15. 16.)

Auf-

Aufgabe.

23. Aus zwey gegebenen Seiten AB und BC, und einem Winkel C, der einer von ihnen entgegen stehet, die übrigen Winkel zu finden.

Auflösung.

I. Sprechet (§. 19.):

4. Wie die Seite AB

zu dem Sinu des entgegen stehenden Winkels C;

So die Seite BC

zu dem Sinu des entgegen stehenden Winkels A.

Z. E. Es sey AB = 82′, BC = 75′, C = 64° 33′. Verfahret also:

log. AB	=	1,91381138
log. Sin. C	=	9,95566688
log. AC	=	1,87506613
Summe	=	11,83073301

log. Sin. A = 9,91169163, zu welchem in den Tafeln der Logarithmus von 55° 40′ am nächsten kommet.

Anmerkung.

24. Seyd ihr mit 55° 40′ nicht zufrieden; so könnet ihr noch Secunden dazu suchen. Ziehet nemlich von eurem

Logarithmo	9,91169163	
den nächst kleineren	9,91168593	ab und
merket die erste Differenz		57°

Imgleichen:

von dem nächst grösseren	9,91169455	
den nächst kleineren	9,91168593	ab und merket die
andere Differenz		862

Spre-

Sprechet: 862 geben 60″ wie viel geben 570

60

862)34200(39″ 34200
2586

8340
7758

582

So bekommet ihr noch 39″; und also ist der Winkel A 55° 40′ 39″.

Anmerkung.

25. Wenn ihr zwey Winkel A und C habet, könnet ihr den dritten durch die Geometrie finden (§. 77. Geom.): wie aus beygefügten Exempel zu ersehen.

C =	64°	33′	0″
A =	55	40	39
A + C =	120	13	39
A + C + B =	189	59	60
B	59	46	21

Aufgabe.

26. Aus zweyen Seiten AB und BC, die in einem rechtwinklichten Triangel den rechten Winkel B einschliessen, die Winkel zu finden. I. 5.

Auflösung.

Nehmet BC für den Sinum totum an; so ist AB der Tangens des Winkels C (§. 6.). Sprechet demnach:

Wie die Seite BC
Zu der Seite AB
So verhält sich der Sinus totus
zu der Tangente des Winkels C.

Z. E. Es sey BC 79′; AB 54′; so geschiehet die Rechnung also:

log. BC = 1,8976271
log. AB = 1,7323938
log. Sin. tot. = 10,0000000

log. Tang. C. = 9,8347667, welchem in den Tafeln am nächsten kommt der Logarithmus tangens von 34°21′. Demnach ist der Winkel C = 34°21′; der Winkel A aber 55°39′ (§. 75. Geom.).

Lehrsatz.

27. **Wenn man zu der halben Summe zweyer Zahlen oder Grössen die halbe Differenz addiret, so kommt die grössere von ihnen heraus: subtrahiret man aber dieselbe von ihr, so bleibet die kleinere übrig.**

Beweis.

Die grössere Zahl bestehet aus der kleinern und ihrer Differenz von der grössern; und also die Summe beyder aus der Differenz und der kleinern zweymal genommen. Da nun die halbe Summe aus der kleinern und der halben Differenz bestehet, so kommt die grössere heraus, wenn man die halbe Differenz dazu addiret: hingegen bleibet die kleinere übrig, wenn man sie subtrahiret. W. Z. E.

Aufgabe.

I. 6. 28. **Aus zwey gegebenen Seiten eines Triangels AC und CB nebst dem Winkel C, den sie einschliessen, die übrigen Winkel zu finden.**

Auflösung.

1. Sprechet:
Wie die Summe der beyden Seiten AC und CB zu ihrer Differenz:
So der Tangens der halben Summe der beyden gesuchten Winkel A und B
zu dem Tangente der halben Differenz derselben.

2. Addiret diese halbe Differenz zu der halben Summe; so habt ihr den Winkel B, welcher der größten von den gegebener: Seiten entgegen gesetzet ist. Subtrahiret sie von derselben; so bleibet der Winkel A übrig (§. 27.).

Z. E. Es sey AC 75′, BC 58′, C 108° 24′; so geschiehet die Rechnung folgendermaassen:

AC = 75′	AC = 75′	A + B + C =	179° 60′
BC = 58	BC = 53	C =	108° 24′
AC + BC 133′	AC − BC 17′	A + B	71° 36′
		$\frac{1}{2}$(A + B)	35° 48′

log. AC + BC = 2,1238516
log. AC — BC = 1,2304489
log. Tang. $\frac{1}{2}$A + B = 9,8580694
Summe 11,0885184
log. Tang. $\frac{1}{2}$(A — B) = 8,9646667

dem in den Tafeln der Logarithmus tangens von 5° 17′ am nächsten kommt.

$\frac{1}{2}$(A + B)	35° 48′	$\frac{1}{2}$(A + B)	35° 48′
$\frac{1}{2}$(A — B)	5 17	$\frac{1}{2}$(A — B)	5 17′
B =	41° 5′	A =	30° 31′

Beweis.

Verlängert die Seite AC in D bis CD = BC, und machet CE = CB; so ist DA die Summe, EA die Differenz der beyden Seiten CB und CA, und DBE ein rechter Winkel (§. 86. Geom.). Man ziehe AG mit EB parallel; so ist bey G auch ein rechter Winkel und GAD = BED (§. 37. 72. Geom.), imgleichen GB der Tangens des Winkels GAB und GD der Tangens des Winkels GAD (§. 6.) Nun ist DCB = CBA + CAB = CBE + CEB = 2 CEB (§. 47. 79. Geom.), und also CEB, imgleichen CAG die halbe Summe der gesuchten Winkel CBA und CAB, folgends BAG die halbe Differenz (§. 27.). Derowe-

gen verhält sich DA die Summe der beyden Seiten zu EA ihrer Differenz, wie DG der Tangens der halben Summe der gesuchten Winkel zu BG dem Tangente der halben Differenz (§. 149. Geom.) W. Z. E.

Aufgabe.

I. 7. 29. Aus drey gegebenen Seiten eines Triangels die Winkel zu finden.

Auflösung.

1. Beschreibet aus der Spitze des Triangels A mit der kleinen Seite AB einen Circul; so ist CD (weil AB = AD (§. 27. Geom.)) die Summe zweyer Seiten; FC ihre Differenz.
2. Sprechet wie die Grundlinie des Triangels BC zu der Summe der beyden Seiten AB + AC;
   So ihre Differenz FC
   zu dem Stücke der Grundlinie GC.
3. Ziehet GC von der Grundlinie BC ab; so bleibet BG übrig.
4. Lasset aus A ein Perpendicul AE auf BG fallen; so ist BE = EG = $\frac{1}{2}$BG (§. 95. Geom.), und ihr könnet aus den beyden Seiten AB und BE in dem rechtwinklichten Triangel ABE die Winkel B und A; und in dem andern AEC aus den beyden Seiten AC und EC die Winkel C und A (§. 23.) finden.

Z. E. Es sey AB = 36′, AC = 45′, BC = 40′ die Rechnung geschiehet folgendermaaßen:

AB 36′	AC 45′
AC 45	AB 36
AB + AC 81	FC = 9
log. BC =	1,6020600
log. AB + AC =	1,9084850
log. FC =	0,9542425
Summe =	2,8627275
log. CG =	1,2606675,

welchem

welchem in den Tafeln der Logarithmus von 18 am nächsten kommet. Wenn man aber weiter nachsuchet (§. 21.); findet man endlich GC 1822‴

BC	4000‴	EG	1089‴
GC	1822	GC	1822
BG	2178‴	EC	2911‴

BE 1089‴

log. AB = 3,5563025
log. Sin. tot. = 10,0000000
log. EB = 3,0370279
log. Sin. A = 9,4807254,

welchem in den Tafeln der Logarithmus von 17° 36′ am nächsten kommet. Und also ist B = 72° 24′.

log. AC = 3,6532125
log. Sin. tot. = 10,0000000
log. EC = 3,4640422
log. Sin. A = 9,8108297

welchem in den Tafeln der Logarithmus von 40° 19′ am nächsten kommet. Und also ist der Winkel C = 49° 41′.

Solchergestalt sind in dem Triangel ABC der Winkel A 57° 55′, B 72° 24′ und C 49° 41.

Beweis.

Es ist weiter nichts zu erweisen, als daß sich BC zu CD wie CF zu CG verhält, welches auf folgende Weise geschiehet. I. 7.

Da y oder CBD zu seinem Maasse den halben Bogen GFD, und x zu seinem den halben GBD hat (§. 84. Geom.); so ist x + y = 180 Gr. Nun ist auch x + o = 180 Gr, (§. 38. Geom.). Derowegen ist o = y (§. 25. Arithm.) Da ferner der Winkel C den beyden Triangeln CGF und CBD gemein ist; so ist CB : CD = CF : CG (§. 148. Geom.) W. Z. E.

Anmerkung.

30. Weil BE und CE in Linien gegeben sind: so muß man auch in der Rechnung anstatt 36′ für AB 3600‴, und anstatt 45′ für AC 4500‴ annehmen.

Anmerkung.

31. Wir wollen noch mit wenigem den Nutzen der Trigonometrie in Auflösung einiger geometrischen Aufgaben zeigen.

Anhang.

Aufgabe.

I. 8. 32. **Eine Höhe AB (z. E. eines Thurms) zu messen, zu der man aus einem angenommenen Stande E kommen kann.**

Auflösung.

1. Messet den Winkel ADC (§. 43. Geom.) und die Linie BE oder DC (§. 44. Geom.).
2. So wisset ihr auch den Winkel A, weil bey C ein rechter Winkel ist (§. 75. Geom.).
3. Suchet alsdenn die Linie AC (§. 20.), und
4. addiret dazu die Höhe des Instruments DE (=BC, weil die Linien CD und BE parallel, und CB und ED auf BE perpendicular sind); so kommt die Höhe AB heraus. Wäre aber BE nicht horizontal; so müßte man das Stücke BC besonders messen (§. 171. Geom.).

Aufgabe.

I. 9. 33. **Eine Höhe AB zu messen, zu der man nicht kommen kann.**

Auflösung.

1. Erwählet euch zwey Stände in E und G, um so viel weiter von einander, je höher der Berg oder der Thurm ist, den ihr messen wollet, und messet

aus

aus denselben die Winkel ADC und AFC (§. 43. Geom.), über dieses die Standlinie GE oder DF (§. 44. Geom.)

2. Ziehet von dem Winkel ADC den Winkel AFC ab; so bleibet der Winkel FAD übrig (§. 74. Geom).
3. Suchet aus den nunmehro bekannten Winkeln und der Seite FD in dem Triangel AFD die Seite AF, und
4. aus dem Winkel F und der Seite AF in dem rechtwinklichten Triangel die Seite AC (§. 20.)
5. Endlich addiret zu der Höhe AC die Höhe des Instruments DE, oder, wenn BC der Höhe des Instruments nicht gleich ist, so suchet ferner FC und endlich BC im Triangel FBC (§. 20.); so habt ihr die verlangte Höhe AB.

Aufgabe.

34. Aus zwey Fenstern E und F in verschiedenen Stockwerken eines Gebäudes eine Höhe zu messen, deren Spitze A man aus beyden Fenstern sehen kann. I. 10.

Auflösung.

1. Messet durch einen Bleywurf die Höhe des andern Fensters über dem ersten EF, und des ersten über der Erde FG, und aus den Fenstern die Winkel AEC und AFD (§. 43. Geom.).
2. Addiret den Winkel AEC zu 90°, so habt ihr den Winkel AEF; subtrahiret von 90 Gr. den Winkel AFD, so bleibet der Winkel AFE übrig.
3. Addiret die beyden Winkel AEF und AFE, und ziehet die Summe von 180 Gr. ab; so bleibet der Winkel EAF übrig (§. 77. Geom.).
4. Suchet in dem Triangel AEF die Seite AF, und ferner
5. in dem Triangel AFD die Seite AD (§. 20.)

6. Endlich addiret dazu die Höhe des Fensters FG von der Erde; oder, wenn GB nicht horizontal ist, suchet ferner DF, und hernach vermittelst des Winkels DEB, den ihr gemessen (§. 43. Geom.), DB besonders (§. 20.); so kommt die Höhe AB heraus.

Aufgabe.

I. 35. Die Weite zweyer Oerter, zu deren
II. beyden man aus einem angenommenen Stande kommen kann, zu messen.

Auflösung.

1. Messet den Winkel C (§. 43. Geom.) und die Linie AC und CB (§. 44. Geom.): so könnet ihr
2. den Winkel A (§. 28.) und endlich die verlangte Weite AB (§. 20.) finden.

Aufgabe.

I. 36. Die Weite zweyer Oerter AB, zu de-
II. ren einem B man aus einem angenommenen Stande C nur kommen kann (z. E. die Breite eines Flusses) zu messen.

Auflösung.

1. Messet die beyden Winkel B und C (§. 43. Geom.) und die Standlinie BC (§. 44. Geom.); so könnet ihr
2. die verlangte Weite AB (§. 20.) finden.

Aufgabe.

I. 37. Die Weite zweyer Oerter AB zu deren
II. keinem man kommen kann, zu finden.

Auflösung.

1. Erwählet drey Stände, D, C und E in einer Linie, und messet die Winkel ADC, ACD, BCE und BEC (§. 43. Geom.), nebst den beyden Standlinien DC und CE (§. 44. Geom.).

2. Sub-

2. Subtrahiret die beyden Winkel ADC und ACD, wiederum ACD und BCE, und abermal BCE und BEC von 180 Gr.; so bleibet im ersten Falle der Winkel DAC, im andern der Winkel ACB, und im dritten der Winkel CBE übrig (§. 77. 38. Geom.). Alsdenn könnet ihr

3. die Seiten AC und BC (§. 20.), und so ferner

4. den Winkel CAB (§. 28.) und endlich die Seite AB (§. 20.) finden.

Allgemeine trigonometrische Formeln.

38. Beym Gebrauch allgemeiner trigonometrischer Formeln hat man zu bemerken, daß alle trigonometrische Linien unter der Voraussetzung ausgedruckt werden, daß der Halbmesser, oder Sinus totus = 1 sey. Auch muß bey diesen Formeln überall auf die gehörige Zeichen + und — Rücksicht genommen werden, welche die trigonometrischen Linien verschiedener Winkel charakterisiren. (1.)

39. Es ist natürlich die trigonomet. Linien aller Winkel des ersten Quadranten ECH als bejaht auszudrucken. So wird z. B. tang ECF nach der Erinnerung (§. 38.) durch den bejahten Bruch $\frac{EF}{EC}$ ausgedruckt. I. 2.

Es ist aber EF : EC = AD : DC, also hat man auch

$$\text{tang. ECF} = \frac{AD}{DC} = \frac{\text{sin ECF}}{\text{Cof ECF}}.$$

Eben so

$$\text{Cot. ECF} = \frac{\text{Cof ECF}}{\text{sin ECF}}$$

Man hat ferner nach (§. 38.)

$$\text{Sec ECF} = \frac{CF}{EC} = \frac{AC}{DC} =$$

$$\frac{1}{\left(\frac{DC}{AC}\right)} = \frac{1}{\text{Cof ECF}}. \qquad (\S.)$$

40. Sobald aber die Winkel über den ersten Quadrant ECH hinausgehen, läßt sich das bejahte Zeichen in den Werthen der trigon. Linien nicht mehr schlechthin beybehalten. Von jedem Winkel, der in den 2ten Quadranten eingreift, wie ECa bleibt der Sinus wie ad bejaht, aber der Kosinus CD hat eine den Kosinussen im 1sten Quadranten entgegengesetzte Lage, und muß also, wenn man ACE = aCI nimmt, durch — Cos. ACE oder durch $-\frac{CD}{CE}$ ausgedruckt werden. Gedenkt man sich die Tangente FE abwärts nach B unendlich verlängert, so muß, sobald der Winkel ECF über 90 Gr. steigt oder in den 2ten Quadrant eingreift, die Sekante FC unterhalb die verlängerte FE schneiden, und eben hierdurch wird die Tangente für solche Winkel im 2ten Quadrant als verneint bestimmt. Z. B. Von ECa ist die Tangente nicht die fI, sondern die BE; wenn nun ECF genommen wird, so ist, ohne Rücksicht auf das Zeichen, EB = EF, aber EB hat eine der EF ganz entgegengesetzte Lage, also muß man EB oder tang. ECa = — EF = — tang. ECF setzen; d. h. Winkel, die einander zu 180 Gr. ergänzen, haben gleiche aber entgegengesetzte Tangenten, so daß die Tangente des stumpfen Winkels verneint genommen werden muß. Man könnte zweifeln, ob nicht mit gleichem Recht If als die Tangente von ECA angesehen werden könnte? Da aber tang. ECa allgemein durch

$$\frac{\text{sin ECa}}{\text{Cos ECa}}$$

(§. 39.)

(§. 39.) ausgedruckt wird, und Cos E C a verneint ist, also auch der Quotient $\frac{\sin E C a}{\text{Cos } E C a}$ verneint seyn muß, so wird hiedurch die Frage völlig entschieden. (L.)

41. Eben so erhellet, daß nun sin (180 Gr. + x), wo x nicht über 90 Gr. hinaus geht, verneint ist, wie d m, nämlich = — sin x, und Cos (180° + x) = — Cos x, hingegen tang (180° + x) = tang x, weil der Durchschnittspunkt jetzt wieder in E F fällt, und überdas tang (180° + x) =

$$\frac{\sin (180° + x)}{\text{Cos}(180° + x)} = \frac{-\sin x}{-\text{Cos } x}$$

also bejaht ist. (L.)

42. So ist ferner, x wie vorhin verstanden, sin (360° — x) verneint wie D M, nämlich = — sin x; Cos (360° — x) wie C D wieder bejaht = Cos x; tang (360° — x) fällt wieder unterhalb und ist verneint = — tang x, nämlich

$$= \frac{\sin (360° - x)}{\text{Cos}(360° - x)} = \frac{-\sin x}{\text{Cos } x}$$

also verneint. (L.)

43. Die Werthe von Sec und Cotang ergeben sich aus (§. 39.), weil $\text{Sec} = \frac{1}{\text{Cos}}$ und $\text{Cot} = \frac{\text{Cos}}{\sin}$ ist. (L.)

Lehrsatz.

44. Es ist

I. $\sin (\alpha + \beta) = \text{Cos} . \alpha . \sin \beta + \sin \alpha . \text{Cos } \beta$ I. 14.

II. $\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha . \text{Cos } \beta - \sin \beta . \text{Cos } \alpha$

III. $\text{Cos } (\alpha + \beta) = \text{Cos } \alpha . \text{Cos } \beta - \sin \alpha . \sin \beta$

IV. $\text{Cos } (\alpha - \beta) = \text{Cos } \alpha . \text{Cos } \beta + \sin \alpha . \sin \beta$

Beweis.

I. Es sey ef der sin α, ab der sin β, ad der sin $(\alpha + \beta)$, bn auf ad, und bm auf ef senkrecht, so ist

$$ce : ef = bc : bm = bc : nd$$
$$ce : cf = c\tau : cd = a\tau : ab = ab : an$$

also:

$$nd = \frac{ef \cdot cb}{ce} \text{ oder } \frac{nd}{ce} = \frac{ef}{ce} \cdot \frac{cb}{ce}$$

und, r statt ce gesetzt.

$$an = \frac{cf \cdot ab}{r}, \text{ oder } \frac{an}{r} = \frac{cf}{r} \cdot \frac{ab}{r}.$$

Demnach

$$\frac{an}{r} + \frac{nd}{r} = \frac{ad}{r} = \frac{cf}{r} \cdot \frac{ab}{r} + \frac{ef}{r} \cdot \frac{cb}{r},$$

Oder

$$\sin(\alpha + \beta) = \text{Cos}\,\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \text{Cos}\,\beta.$$

II. Weil $\sin\alpha = \sin ecD$, $\sin(\alpha + \beta) = \sin acD = \sin(ecD - \beta)$, $\text{Cos}\,\alpha = -\text{Cos}\,ecD$ (§. 40.), so verwandelt sich die Formel no. I. in diese

$$\sin(ecD - \beta) = -\text{Cos}\,ecD \cdot \sin\beta + \sin ecD \cdot \text{Cos}\,\beta$$

Setzt man also den unbestimmten Winkel ecD allgemein $= \alpha$, so hat man die allgemeine Formel no. II.

III. Es ist $ce : cf = cb : cm$
$ce : cf = c\tau : d\tau = a\tau : b\tau = ab : bn = ab : md$

$$\text{also } cm = \frac{cf \cdot cb}{ce} \text{ oder } \frac{cm}{r} = \frac{cf}{r} \cdot \frac{cb}{r}$$

und

$$md =$$

$$md = \frac{ef \cdot ab}{ce} \text{ oder } \frac{md}{r} = \frac{ef}{r} \cdot \frac{ab}{r}$$

Demnach

$$\frac{cm - md}{r} = \frac{cd}{r} = \frac{cf}{r} \cdot \frac{cb}{r} - \frac{ef}{r} \cdot \frac{ab}{r}$$

Oder:

$$\text{Cof}(\alpha + \beta) = \text{Cof}\,\alpha \,.\, \text{Cof}\,\beta - \text{fin}\,\alpha \,.\, \text{fin}\,\beta$$

IV. Man hat (wie no. II.) $\text{Cof}\,\alpha = -\text{Cof}\,ecD$,
$\text{Cof}(\alpha + \beta) = -\text{Cof}\,aeD = -\text{Cof}(ecD - \beta)$
und $\text{fin}\,\alpha = \text{fin}\,ecD$, alſo

$$-\text{Cof}(ecD - \beta) = -\text{Cof}\,ecD \,.\, \text{Cof}\,\beta - \text{fin}\,ecD \,.\, \text{fin}\,\beta$$

oder, allgemein einen Buchſtaben α ſtatt ecD geſetzt,

$$\text{Cof}(\alpha - \beta) = \text{Cof}\,\alpha \,.\, \text{Cof}\,\beta + \text{fin}\,\alpha \,.\, \text{fin}\,\beta \quad (\text{L.})$$

Lehrſatz.

45. Wenn die den drey Winkeln ABC ge- I.
genüber liegende Seiten abc heiſen, ſo iſt 6.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \,.\, \text{Cof}\,C$$

Beweis.

$BF = g$ ſey auf AC ſenkrecht, und $CF = f$, ſo iſt $c^2 = g^2 + (b - f)^2 = (a \,.\, \text{fin}\,C)^2 + (b - a \,.\, \text{Cof}\,C)^2 = a^2 \,.\, \text{fin}\,C^2 + b^2 - 2ab \,.\, \text{Cof}\,C + a^2 \,.\, \text{Cof}\,C^2$. Aber $\text{fin}\,C^2 + \text{Cof}\,C^2 = 1$, alſo I. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \,.\, \text{Cof}\,C$. (L.)

Zuſatz.

46. Daraus giebt ſich

II. $$\text{Cof}\,C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

Es iſt aber

$$\sin C = \sqrt{(1 - \mathrm{Cof}\, C^2)} = \sqrt{\left(1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab}\right)^2\right)} =$$

$$\frac{\sqrt{(4\,a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2)}}{2\,ab}$$

und die Größe unter dem Wurzelzeichen:

$$= (2ab + a^2 + b^2 - c^2) \cdot (2\,ab - (a^2 + b^2 - c^2))$$
$$= (c^2 - (a + b)^2) \cdot ((a - b)^2 - c^2)$$
$$= (c + (a + b)) \cdot (c - (a + b)) \cdot ((a - b) + c) \cdot (a - b - c)$$

Demnach

III. $\sin C =$

$$\frac{\sqrt{(a + b + c) \cdot (a + b - c) \cdot (b + c - a) \cdot (a + c - b)}}{2\,ac}$$

Ein für die Berechnung mit Logarithmen sehr bequemer Ausdruck. Weil nun

$$\text{IV. } b = \frac{c \cdot \sin B}{\sin C},$$

und $a = Ck - Bk = b \cdot \mathrm{Cof}\, C + c \cdot \mathrm{Cof}\, B,$

$$= \frac{c \cdot \sin B}{\sin C} \cdot \mathrm{Cof}\, C + c \cdot \mathrm{Cof}\, B,$$

so hat man

$$\text{V. } a = c \cdot (\mathrm{Cof}\, B + \sin B \cdot \mathrm{Cot}\, C),$$

und nun auch

$$\text{VI. } \mathrm{Cot}\, C = \frac{\frac{a}{c} - \mathrm{Cof}\, B}{\sin B} = \frac{a}{c \cdot \sin B} - \mathrm{Cot}\, B \cdot$$

(2.)

Ende der Trigonometrie.

Anfangs-

Anfangs-Gründe der höhern Geometrie.

Erklärung.

1.

Die höhere Geometrie beschäftigt sich mit den krummen Linien und Flächen überhaupt, in so ferne ihre Eigenschaften durch die Art ihrer Construction gegeben sind, oder daraus hergeleitet werden können.

Anmerkung.

In so ferne krumme Flächen einen körperlichen Raum begränzen, gehören auch diese Räume in die höhere Geometrie. Doch werden von Kegel, Kugel und Cylinder schon mehrere Eigenschaften auch in der gemeinen Geometrie vorgetragen. Wir können uns aber hier nur auf einige Beyspiele krummer Linien beschränken.

Erklärung.

2. **Eine krumme Linie construiren, heist einen jeden Punkt derselben auf eine bestimmte Weise angeben, so daß das Gesetz vor Augen liegt, wie diese krumme Linie entstanden ist, und sich von jeder andern unterscheidet. Im folgenden ist nur von solchen krummen Linien die Rede, deren Punkte alle in einer einzigen Ebene liegen.**

Vorbereitung.

3. Es sey LMN (Fig. 1. h. Geom.) eine beliebige krumme Linie, und M ein Punkt in ihr, AR eine gegebene 1.

bene gerade Linie, und MP ein Perpendikel auf AR, so ist klar, daß der Punkt M der krummen Linie vollkommen bestimmt, d. h. seiner Lage nach gegeben ist, wenn man seinen Abstand MP von der geraden Linie AR weiß, und wie weit dieses Perpendikel von einem gegebenen Punkte der geraden Linie absteht, d. h. vom AP und PM gegeben sind. So wäre auf eine ähnliche Art der Punkt N durch AQ und QN bestimmt. Jedem andern Punkte der krummen Linie gehören solchergestalt andere Abstände, wie QN und AQ zu. Wäre nun z. E. das Gesetz gegeben, nach welchem allemahl das Perpendikel QN (was auch N für ein Punkt der krummen Linie seyn mag) aus seinem Abstande von A, d. h. aus AQ bestimmt würde, so könnte man für jedes angenommene AQ, das Zugehörige QN finden, und folglich jeden Punkt N der krummen Linie bestimmen, und also die krumme Linie construiren. Dies würde geschehen können, wenn z. E. eine Gleichung zwischen AQ und QN gegeben wäre. Weil aber jedem andern Punkte der krummen Linie andere Werthe von AQ und QN zugehören, so sind also AQ und QN veränderliche Grössen, d. h. wenn z. E. AQ sich in AP verwandelt, so verwandelt sich QN in PM u. s. w.

Erklärung.

4. **Wenn eine veränderliche Grösse y durch eine andere veränderliche x, und durch Grössen die ungeändert bleiben, vermittelst einer Gleichung bestimmt wird, so heist y eine Function von x, so wie umgekehrt x eine Function von y.**

Anmerkung.

5. Es sey z. E. die Gleichung zwischen y und x folgende; $y^2 = 2x + 3$, so sind für

$x = 0; \quad 1; \quad 2; \quad 3; \quad 4;$ &c.

die Werthe von $y = \sqrt{3}; \sqrt{5}; \sqrt{7}; 3; \sqrt{11}$ &c.

welche Wurzeln auch negativ genommen werden können, so daß

also

also jedem x eigentlich zwey gleiche entgegengesetzte Werthe von y zugehören.

Drückte nun diese Gleichung zwischen x und y das Verhalten zwischen jedem Paare von Linien wie AP, PM; AQ, QN; (§. 3.) aus, so sieht man leicht, daß vermittelst dieser Gleichung jeder Punkt der krummen Linie, und folglich die ganze krumme Linie construirt werden könnte. Gesetzt, man nähme nach einem gewissen Maaßstabe den Werth von x oder AP = 1, und das Perpendikel PM oder $y = \sqrt{5} = 2{,}407$, so wäre dadurch der Punkt M bestimmt. Nähme man $x =$ AQ = 2 und $QN = \sqrt{7} = 2{,}645$, so wäre N bestimmt, und so vermittelst jener Gleichung zwischen den zwo veränderlichen Grössen x = AP und y = PM, jeder anderer Punkt der krummen Linie. Da die Werthe von y auch negativ genommen, d. h. aus P in m, oder aus Q in n unterhalb AR getragen werden können; so sind also auch m, n u. s. w. Punkte, welche zur krummen Linie gehören.

Erklärung.

6. **Die Werthe von x oder AP, welche man längst einer geraden Linie AR der Abscissenlinie nennet, heissen Abscissen, und die zugehörigen Werthe von y, oder die Perpendikel PM, Ordinaten. Der Punkt A, von dem man die Abscissen anrechnen will, heißt der Anfangspunkt der Abscissen, und die Gleichung zwischen den beyden veränderlichen Grössen x und y, die Gleichung für die krumme Linie.** Je nachdem die Abscissen **rechter oder linker Hand** A, und die Ordinaten **über** oder **unterhalb** der Abscissenlinie getragen werden, nennt man sie **bejaht** oder **verneint.**

Zusatz.

7. **Wenn Ordinaten unmöglich werden,** so entsprechen den Abscissen, denen sie zugehören, keine Punkte der krummen Linie. Z. E. in obiger Gleichung wäre für $x = -6$ der Werth von $y = \sqrt{-9}$ unmöglich; (§. 34 a II. Algebr.) Also zu $x = -6$ gäbe es keinen

Punkt der krummen Linie, und so überhaupt zu keiner negativen Abscisse, welche grösser als $-1\frac{1}{2}$ wäre.

Zusatz.

8. Da vermittelst der Gleichung zwischen x und y jeder Punkt der krummen Linie gegeben ist, so müssen also auch alle Eigenschaften der krummen Linie sich aus jener Gleichung herleiten lassen, d. h. die ganze Natur derselben muß durch die Gleichung bestimmt seyn. Umgekehrt, wenn die Eigenschaften einer krummen Linie bekannt sind, so muß sich daraus ihre Gleichung herleiten lassen.

Erklärung.

9. **Eine Linie heißt von der ersten, zweyten, dritten Ordnung, wenn die Gleichung, wodurch sie bestimmt wird, vom ersten, zweyten, dritten Grade ist,** d. h. wenn die höchste Potenz von x oder y von jenen Graden ist, oder doch die Exponenten von x und y in irgend einem Gliede der Gleichung zusammen addirt, jenen Grad erreichen. So wäre also z. E. die Gleichung $xy + x = 3$ dennoch vom zweyten Grade, wenn gleich weder von x noch von y allein die zweyte Potenz vorkömmt, weil die Exponenten von x und y in dem Gliede xy zusammenaddirt 2 geben.

Anmerkung.

10. In (§. 5. u. 6.) wurden die Ordinaten auf den Abscissen senkrecht angenommen. Man sieht aber leicht, daß sie auch unter einem beliebigen Winkel gegen die Abscissenlinie parallel mit einander genommen werden können. Bey der Construction einer krummen Linie aus ihrer Gleichung muß allemahl zugleich erwähnt werden, nach welchem Winkel die Ordinaten aufgetragen werden sollen. Stehen die Ordinaten auf den Abscissen senkrecht, so heißt die Gleichung zwischen x und y die Gleichung zwischen **rechtwinklichten Coordinaten.**

Auf-

Aufgabe.

11. Es sey NLM (Fig. 2.) eine beliebige gerade Linie, welche die Abscissenlinie QR in L unter dem Winkel MLR = λ durchschneidet. A sey der Anfangspunkt der Abscissen. M ein beliebiger Punkt der geraden Linie; AP = x und PM = y seyen die dem Punkte M zugehörigen rechtwinklichten Coordinaten. Die Gleichung für die gerade Linie NLM zu finden. 2.

Auflösung.

Weil der Durchschnittspunkt L der geraden Linie mit der Abscissenlinie gegeben seyn muß, so sey LA = a, so hat man in dem rechtwinklichten Dreyecke LPM, für den Sin. tot = 1

$$LP : PM = \text{Sin. tot} : \text{tang } PLM$$

das ist

$$a + x : y = 1 : \text{tang } \lambda$$

demnach

$$y = a \text{ tang } \lambda + x \text{ tang } \lambda. \quad (\S.\ 81 \text{ a Arithm.})$$

Da nun diese Gleichung zwischen x und y vom ersten Grad ist, so ist die gerade Linie eine Linie der ersten Ordnung.

Zusatz.

12. Die allgemeine Form einer Gleichung vom ersten Grade, ist $y = n + mx$. Denn wenn y auch einen Coefficienten hätte, so läßt sich dieser doch durch die Division wegschaffen. Jede solche Gleichung muß einer geraden Linie zugehören. Denn man kann sie allemahl mit der (§. 11.) gefundenen vergleichen, und die Grösen a und λ, welche zur Zeichnung der geraden Linie erforderlich sind, durch m und n bestimmen. Man setze nemlich $a \text{ tang } \lambda = n$ und $m = \text{tang } \lambda$, so wird $a = \frac{n}{m}$.

Nimmt man demnach AL $= \frac{n}{m}$ und setzt an L einen Winkel MLR nach R zu, dessen Tangente $= m$, so wird ML die gerade Linie seyn, der die Gleichung $y = n + mx$ entspricht.

Anmerkung.

13. In (§. 12.) war der Punkt L linker Hand des Anfangspunktes der Abscissen angenommen, und AL $=$ a positiv gesetzt worden. Fiele L rechter Hand A, so würde nur a negativ gesetzt werden dürfen, und so würde denn L auch rechter Hand A fallen, wenn in (§. 12.) der Werth von a $= \frac{n}{m}$ positiv wäre.

Anmerkung.

14. Gesetzt, man wolle die gerade Linie construiren, wozu die Gleichung $y = 1 + 3x$ gehörte, so wäre $n = 1$; $m = 3$, also $\alpha = \frac{1}{3}$, und tang $\lambda = 3$, also $\lambda = 71° 34'$ beynahe. Drückte man nun die Abscissen durch Zolle aus, so würde man AL $= \frac{1}{3}$ Zoll nehmen, und an L einen Winkel von $71° 34'$ setzen, so würde LM die gesuchte gerade Linie seyn.

Für $x = o$ würde dann die durch A gehende Ordinate $y =$ AT $= 1$ Zoll, und für eine negative Abscisse AQ, welche grösser als $\frac{1}{3}$ Zoll wäre, würde die Ordinate QN negativ. Z. E. für $x = -1$ Zoll, würde y oder QN $= -2$ Zoll.

Zusatz.

15. Für m oder tang $\lambda = o$, würde $y = n$ also die Ordinate von beständiger Grösse, d. h. die gerade Linie ML der Abscissenlinie parallel. Dann würde AL oder $a = \frac{n}{m} = \frac{n}{o}$ unendlich, (§. 63. Allg.) oder der Durchschnitt L fiele unendlich weit hinaus, wie auch aus der Lehre von den Parallellinien klar ist.

Zusatz.

16. Wenn für zween Punkte M und O der geraden Linie LO, die Abscissen AP und AV und Ordinaten MP,

MP, VO gegeben sind, so ist die ganze gerade Linie ihrer Lage nach gegen die Abscissenlinie vollkommen bestimmt, denn man kann daraus die Grössen a und λ, welche zur Zeichnung der geraden Linie nöthig sind, herleiten. Soll nemlich die Gleichung $y = n + m x$ der durch M und O gehenden geraden Linie entsprechen, so muß erstlich, wenn man $x = AP$ setzt $y = PM$, und dann wenn man $x = AV$ setzt, $y = VO$ seyn. Dies giebt die beyden Gleichungen:

$$PM = n + m \,.\, AP$$
$$VO = n + m \,.\, AV$$

welche von einander abgezogen, sogleich

$$VO - PM = m \,.\, (AV - (AP)$$

also $m = \frac{VO - PM}{AV - AP}$ geben.

Multiplicirt man aber die obere Gleichung mit AV und die untere mit AP, und zieht sie von einander ab, so erhält man

$$PM \,.\, AV - VO \,.\, AP = n\,(AV - AP)$$

demnach

$$n = \frac{PM \,.\, AV - VO \,.\, AP}{AV - AP}$$

Aus diesen Grössen n und m kann man nun (§. 12.) die Werthe von a und λ finden, und folglich die gesuchte gerade Linie construiren.

Aufgabe.

17. Die Gleichung für eine krumme Linie AMBm (Fig. 3) zu finden, deren Ordinate PM allemahl die mittlere geometrische Proportionallinie ist, zwischen der Abscisse AP, und einer geraden Linie PB, welche mit der Abscisse AP zusammen eine Linie von unveränderlicher Länge AB = a ausmacht. 3.

Auflösung.

Weil $AP + PB$ d. h. $x + PB = a$, also $PB = a - x$ und $AP : PM = PM : PB$, d. h. $x : y = y : a - x$ seyn soll, so hat man, wenn die äußersten und mittelsten Glieder dieser Proportion in einander multiplicirt werden, sogleich die verlangte Gleichung

$$y^2 = ax - x^2.$$

Es kann also für jedes x die Ordinate y gefunden, und also die krumme Linie construirt werden.

Zusatz.

18. Weil $y = \pm \sqrt{(ax - x^2)}$, so gehören jeder Abscisse x zwey gleiche entgegengesetzte Ordinaten PM und Pm zu. Also theilt die gerade Linie AB, die krumme in zwey gleiche und ähnliche Hälften.

Zusatz.

19. Man halbire AB in C, so ist $AC = \frac{1}{2} a$. Man nenne $CP = u$, so ist $x = \frac{1}{2} a - u$, also $x^2 = \frac{1}{4} a^2 - au + u^2$ und $ax = \frac{1}{2} a^2 - au$. Demnach

$$y^2 = \frac{1}{4} a^2 - u^2$$

oder

$$y^2 + u^2 = \frac{1}{4} a^2$$

Aber

$$y^2 + u^2 = PM^2 + CP^2 = CM;$$

Also

$$CM^2 = \frac{1}{4} a^2 \text{ oder } CM = \frac{1}{2} a.$$

Was also auch M für ein Punkt der krummen Linie ist, so hat die krumme Linie (§. 17.) die Eigenschaft, daß alle Punkte M derselben einerley Abstand $CM = \frac{1}{2} a$ von C haben. Die krumme Linie ist also ein Kreis, dessen Mittelpunkt C, und Halbmesser $= \frac{1}{2} a$, der Durchmesser also $= a$ ist, und die Gleichung für denselben ist

$$y^2 = ax - x^2$$

wenn die Abscissen von dem Endpunkte A des Durchmessers angerechnet werden, oder

$$y^2 = \frac{1}{4} a^2 - u^2,$$

wenn

wenn man die Abscissen CP aus dem Mittelpunkte C rechnet.

Zusatz.

20. Für

$$u = \pm \tfrac{1}{2}a \text{ ist } y^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}a^2$$

also $y = o$, d. h. die Punkte A und B liegen selbst im Umfange des Kreises. Denn wo die Ordinate einer krummen Linie $= o$ wird, da durchschneidet die krumme Linie die Abscissenlinie.

Wäre $u > \frac{1}{2}a$, so würde $u^2 > \frac{1}{4}a^2$, also $\frac{1}{4}a^2 - u^2$ etwas negatives, also finden über A und so auch über B hinaus keine Ordinaten statt, weil sie unmögliche Werthe bekommen.

Aufgabe.

21. Die Gleichung für eine krumme Linie AMB (Fig. 4.) zu bestimmen, deren jeder Punkt M, von zwey andern in der geraden Linie AB vorgegebenen F und f dergestalt entfernt ist, daß die Summe der beyden Entfernungen $FM + fM$ einer beständigen Linie a gleich ist. 4.

Auflösung.

1. Es seyen beyde Punkte F, f um $Ff = 2e$ von einander entfernt, dergestalt, daß wenn man Ff in C halbiret, $CF = Cf = e$ sey.

2. Man nenne die senkrechte Ordinate $MP = y$, und die zugehörige von C angerechnete Abscisse $CP = u$, so hat man $FP = e + u$, und $Pf = e - u$, also $FM^2 = (e+u)^2 + y^2$, und $fM^2 = (e-u)^2 + y^2$.

3. Die Bedingung der krummen Linie ist also, es soll seyn $FM + fM = a$, oder $FM = a - fM$, d. h. wenn man auf beyden Seiten quadrirt.

$$FM^2 = a^2 - 2a \cdot fM + fM^2, \text{ oder (2)}$$
$$e^2 + 2eu + u^2 + y^2 = a^2 - 2a \cdot fM +$$
$$e^2 - 2eu + u^2 + y^2$$

das heißt:

$$2a \cdot fM = a^2 - 4eu$$

also $4a^2 \cdot fM^2 = a^4 - 8a^2eu + 16e^2u^2$ oder (2)

$4a^2(e^2 - 2eu + u^2 + y^2) = a^4 - 8a^2eu + 16e^2u^2$

woraus sehr leicht

$$y^2 = \frac{a^2 - 4e^2}{4} - \frac{a^2 - 4e^2}{a^2} \cdot u^2$$

folgt.

Zusätze und Erklärungen.

22. Da diese Gleichung zwischen u und y vom zweyten Grade ist, so ist die krumme Linie von der zweyten Ordnung. Man nennt sie eine Ellipse. Um ihre Eigenschaften leichter zu entdecken, so wollen wir der Kürze halber $a^2 - 4e^2 = c^2$ nennen, und man erhält

$$y^2 = \tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 u^2}{a^2}$$

I. Aus dieser Gleichung ergiebt sich sogleich, daß jeder Abscisse u zwey gleiche und entgegengesetzte Ordinaten PM, Pm entsprechen, wie in der Kreislinie (§. 18.) daß also auch die Ellipse durch die Abscissenlinie AB in zwo gleiche und ähnliche Hälften AMB und AmB getheilt wird.

II. Der Werth von y bleibt derselbe, man mag u bejaht, oder eben so groß verneint nehmen, weil u^2 sowohl das Quadrat von + u als — u ist. Also werden z. E. gleichen Abscissen CP = Cp rechter und linker Hand C, gleich große Ordinaten

$$pR = pr = PM = Pm$$

entsprechen, und ein Perpendikel Nn durch C, wird also die krumme Linie, auch in ein paar andere gleiche und ähnliche Hälften NAn und NBn eintheilen, wie solches in (I) durch AB geschah. Aus dieser Ursache heißt

man

man die beyden Linien AB und Nn auch die **Durchmesser der Ellipse**, und C ihren **Mittelpunkt**.

III. Für $u = o$, also im Mittelpunkte C selbst, ist die Ordinate $y = \sqrt{\frac{1}{4} c^2} = \frac{1}{2} c = CN = Cn$ also $Nn = c$;

IV. Für $u = \frac{1}{2} a$, wird $y = o$. Nimmt man also CB und eben so auch linker Hand C. Die Linie $CA = \frac{1}{2} a$, so befindet sich die krumme Linie bey A und B in der Abscissenlinie selbst (§. 20.).

V. Der Abstand der beyden Punkte A und B ist $= \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} a = a$.

VI. Wenn man u grösser als $\frac{1}{2} a$ nimmt, so werden die Ordinaten unmöglich, weil y^2 negativ wird. Ueber A und B hinaus finden also keine Ordinaten mehr statt, und die ganze krumme Linie ist also zwischen A und B enthalten.

VII. Jede Ordinate wie PM muß kleiner als CN seyn, weil y^2 kleiner, als $\frac{1}{4} c^2$ ist, sobald u größer ist, als o. Also ist $CN = \frac{1}{2} c$. Die **größte Ordinate**, welche die krumme Linie haben kann, wenn man die Abscissen auf AB nimmt.

VIII. $AB = a$ nennt man die **große Axe der Ellipse**, und $Nn = c$ die **kleine Axe**, oder eigentlich die **conjugirte Axe**, auch die **Zwergaxe**.

IX. Die Punkte F und f werden die **Brennpunkte** genennt, sie liegen allemahl auf der großen Axe.

X. Wenn a und c gegeben sind, so findet sich aus der Gleichung $a^2 - 4e^2 = c^2$, die Weite jedes der Brennpunkte vom Mittelpunkte oder

$$e = \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{2}$$

XI. Wenn $Nn = AB$ also $c = a$, so wird $e = o$, oder beyde Brennpunkte fallen in den Mittelpunkt C zu-

sammen. Für diesen Fall ist die Gleichung der Ellipse

$$y^2 = \tfrac{1}{4} c^2 - u^2$$

oder auch

$$y^2 = \tfrac{1}{4} a^2 - u^2$$

d. h. die Ellipse verwandelt sich in einen Kreis, dessen Durchmesser $= a$ (§. 19.).

XII. Man setze $AP = x$, so ist $u = x - \frac{1}{2}a$, und die Gleichung der Ellipse

$$y^2 = \tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c^2}{a^2} u^2$$

verwandelt sich in

$$y^2 = \tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c^2}{a^2} (x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2)$$

oder in

$$y^2 = \frac{c^2}{a} x - \frac{c^2}{a^2} x^2 .$$

welches demnach eine Gleichung für die Ellipse ist, wenn man die Abscissen vom Punkte A anrechnet.

XIII. Man pflegt die Grösse $\frac{c^2}{a}$ welche eine gewisse Linie $= b$ geben wird, den **Parameter der Ellipse** zu nennen. Dieser Parameter b ist wegen $c^2 = ab$, oder wegen $a : c = c : b$ die dritte Proportionallinie zur großen und kleinen Axe.

XIV. Wenn man statt der kleinen Axe diesen Parameter in die Gleichung der Ellipse (XI) hineinbringen will, so wird wegen

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{b}{a}; \quad y^2 = bx - \frac{b}{a} x^2 .$$

XV. Für $u = e = \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{2}$

wird in (XII.)

$y^2 =$

$$y^2 = \tfrac{1}{4} c^2 - \frac{c^2}{a^2} \frac{(a^2 - c^2)}{4} \text{ oder}$$

$$y^2 = \frac{c^4}{4a^2}; \text{ also } y = \frac{c^2}{2a} = \tfrac{1}{2} b \text{ (XIII.)}$$

Die Ordinate der Ellipse im Brennpunkte ist demnach dem halben Parameter gleich.

XVI. Die Ellipse aus den gegebenen Brennpunkten F und f mechanisch zu beschreiben, nehme man einen Faden FMf, dessen Länge der großen Axe a gleich ist, befestige ihn mit beyden Enden in F und f, und dehne ihn mit einem Stifte in die Richtungen FMf aus, so beschreibt der Stift M die Ellipse AMB, wenn man ihn herumführt, und den Faden beständig in ausgespannter Richtung erhält. Andere Arten Ellipsen zu beschreiben, lehrt eine Schrift, welche den Titel hat: **Beschreibung eines Ellipsographs** ꝛc. Gotha 1794.

Aufgabe.

23. **Eine krumme Linie zu construiren, oder die Gleichung für sie zu finden, wenn die Ordinate y auf der Abscissenlinie senkrecht, und die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen der Abscisse x und einer Linie a von beständiger Grösse seyn soll.**

Auflösung.

Wegen $x : y = y : a$ ist die Gleichung diese $y^2 = ax$, wo demnach für jedes x die Ordinate y gefunden, und die krumme Linie construirt werden kann. Sie ist von der zweyten Ordnung, und wird eine **Parabel** genannt.

Zusätze.

24. I. Es sey (Fig. 5.) AR die Abscissenlinie, und A der Anfangspunkt der Abscissen; Um die Ordinate PM, welche der Abscisse AP zugehört, durch Zeich- 5.

nung

nung zu finden, nehme man AD = a, und beschreibe über DP einen Halbkreis, so ist das Perpendikel AE, welches man demnächst auf ein durch P errichtetes Perpendikel aus P in M trägt, die gesuchte Länge der Ordinate (§. 158. Geom.) die Linie AD = a heißt der **Parameter** der Parabel.

II. Aus der Gleichung (§. 23.) für die Parabel ergiebt sich, daß jeder Abscisse x, wegen $y = \pm\sqrt{ax}$ zwey gleiche entgegengesetzte Ordinaten zugehören. Wenn man also Pm = PM nimmt, so ist m auch ein Punkt der krummen Linie, und die ganze krumme Linie, muß solchergestalt, durch die Abscissenlinie, in zwey gleiche und ähnliche Hälften zerfallen.

III. Je grösser man x nimmt, desto größer wird auch y, und wenn x unendlich groß ist, ist auch y unendlich groß, d. h. die krumme Linie hat zwey ins unendliche fortlaufende Schenkel, AM, Am.

IV. Für negative x werden die Ordinaten unmöglich, folglich giebt es linker Hand A keine Ordinaten, also keine Punkte der krummen Linie, die ganze Parabel liegt also auf der einen Seite eines durch A gesetzten Perpendikels, und zwar hier rechter Hand desselben, weil die bejahten Abscissen rechter Hand A genommen worden sind.

V. Für $x = o$ ist auch $y = o$, also schneidet die Parabel bey A selbst in die Abscissenlinie. Dieser Punkt A heist der **Scheitelpunkt der Parabel.**

VI. Der **Brennpunkt** F heist derjenige Punkt der Abscissenlinie AR, oder der **Axe**, für welchen die Ordinate FN dem halben Parameter $\frac{1}{2}a$ gleich ist. Setzt man also $y = \frac{1}{2}a$, so hat man $\frac{1}{4}a^2 = a \cdot x$ (§. 23.) Demnach x oder die Abscisse AF, welche dem Brennpunkte F zugehört $= \frac{1}{4}a$.

VII. $FM = \sqrt{(FP^2 + PM^2)} = \sqrt{((x - \frac{1}{4}a)^2 + y^2)}$

d. h. wegen

$y^2 =$

$y^2 = ax$ und $(x - \frac{1}{4}a)^2 = x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2$

$FM = \sqrt{(x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2)} = x + \frac{1}{4}a$.

Um also den der Abscisse $AP = x$ zugehörigen Punkt M oder auch m der Parabel zu finden, nehme man auf der Abscissenlinie $Af = AF = \frac{1}{4}a$, und durchschneide ein durch P gesetztes Perpendikel, aus F mit der Weite FM oder $Fm = fP = x + \frac{1}{4}a$. So können alle andere Punkte der Parabel gefunden werden.

Aufgabe.

25. Eine krumme Linie zu construiren, deren Gleichung zwischen rechtwinklichten Coordinaten folgende ist:

$$y^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2$$

u bedeutet die Abscisse, und c, a sollen beständige Linien oder Grössen vorstellen.

Auflösung.

I. Diese Gleichung ist der oben für die Ellipse (§. 22.) gefundenen zwar in Ansehung der Glieder, aber nicht in Ansehung der Zeichen ähnlich. Was dies für einen Unterschied in der Gestalt der krummen Linie bewürkt, wird aus folgenden Betrachtungen erhellen.

II. Es sey (Fig. 6.) TR die Abscissenlinie und C der Anfangspunkt der Abscissen, so ist erstlich klar, daß für $u = 0$; $y^2 = -\frac{1}{4}c^2$ also y unmöglich ist. Es giebt also keine Ordinate für den Anfangspunkt der Abscissen. 6.

III. Für $u = CA = CB = \pm\frac{1}{2}a$ wird

$$y^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{4}c^2 = 0.$$

Also befindet sich die krumme Linie bey A und B in der Abscissenlinie selbst, wenn man $CA = CB = \frac{1}{2}a$ genommen hat.

III. So

III. So lange u kleiner als $\frac{1}{2}a$ ist, werden die Ordinate unmöglich seyn. Denn man setze z. E.

$$u = \frac{1}{m} a,$$

so wird man finden, daß

$$y^2 = \frac{c^2}{m^2} - \frac{1}{4} c^2$$

so lange negativ seyn wird, so lange m größer, als 2, also u kleiner als $\frac{1}{2}a$ ist. Demnach hat die krumme Linie keine Ordinaten zu bejahten Abscissen, welche kleiner sind, als $CA = \frac{1}{2}a$. Und eben so auch nicht für verneinte Abscissen, welche kleiner sind, als $CB = \frac{1}{2}a$. Wenn man also durch A und B ein paar Perpendikel setzt, so befindet sich innerhalb des ganzen Raumes zwischen diesen Perpendikeln nichts von der krummen Linie.

IV. Sobald aber u größer ist, als $\frac{1}{2}a$, so werden die Ordinaten möglich, und wachsen immer mehr und mehr, je größer man die Abscissen nimmt. Eben dies gilt für negative u, weil u^2 einerley bleibt, man mag u bejaht oder verneint nehmen. Und weil nun zugleich jedem $\pm u$ zwey gleiche entgegengesetzte Ordinaten, nemlich $y = \pm \sqrt{\left(\frac{c^2 u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2\right)}$

zugehören, so geht die krumme Linie mit vier unendlichen Schenkeln AM, Am, BN, Bn fort, und wird durch die Abscissenlinie TR in gleiche und ähnliche Hälften getheilt. Auch werden alle vier Schenkel einander ähnlich seyn, oder die krumme Linie wird linker Hand B eben die Gestalt haben, wie rechter Hand A. Man nennt sie die **Hyperbel**, und C ihren **Mittelpunkt.** Die Abscissenlinie wird auch wohl die Axe genannt.

V. Die Linien a und c erhalten auch wie bey der Ellipse den Nahmen der **großen** und **kleinen Axe.** Aber freylich kann die kleine Axe so etwas nicht seyn, wie

bey

bey der Ellipse die Linie N n durch den Mittelpunkt C (Fig. 4.) weil die Hyperbel im Mittelpunkte keine Ordinaten, wie die Ellipse hat.

VI. Die dritte geometrische Proportionallinie zu a und c heist auch bey der Hyperbel der **Parameter** (§. 22. XIII.) und die Brennpunkte F, f sind diejenigen Punkte der Axe, wo die Ordinaten = den halben Parameter, also = $\frac{c^2}{2a}$ sind. Setzt man in die Gleichung

(§. 25.) $y = \frac{c^2}{2a}$, so findet sich

$$u = \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{2}$$

für die Weiten $CF = Cf$ der Brennpunkte vom Mittelpunkte. Diese Weite heisse e, so ist

$$e^2 = \frac{a^2 + c^2}{4} \text{ also } c^2 = 4e^2 - a^2$$

und folglich auch (§. 25.)

$$y^2 = \frac{4e^2 - a^2}{a^2} \cdot u^2 - e^2 + \tfrac{1}{4}a^2$$

VII. Wenn M ein beliebiger Punkt der Hyperbel ist, so hat man

$$FM^2 = FP^2 + PM^2 = (u - e)^2 + y^2$$

$$= u^2 - 2ue + e^2 + \frac{4e^2u^2}{a^2} - u^2 - e^2 + \tfrac{1}{4}a^2 \text{ (VI.)}$$

$$= \frac{4e^2u^2}{a^2} - 2ue + \tfrac{1}{4}a^2$$

$$= \left(\frac{2ue}{a} - \tfrac{1}{2}a\right)^2$$

Also

$$FM = \frac{2ue}{a} - \tfrac{1}{2}a;$$

eben so findet man

$$fM = \frac{2ue}{a} + \tfrac{1}{2}a$$

Also den Unterschied $fM - FM = a$, wie bey der Ellipse die Summe $fM + FM = a$ war (§. 21.)

Anmerkung.

Man hätte zwar FM auch $= \frac{1}{2}a - \frac{2ue}{a}$ setzen können, aber dann würden für sehr große u der Werth von FM negativ, und man erlangt doch in allen Fällen allemahl FM positiv.

7. VIII. Man setze (Fig. 7.) durch den Scheitel A der Hyperbel ein Perpendikel $AE = \frac{1}{2}c$, und ziehe durch E aus dem Mittelpunkte C eine gerade Linie CE. Für einen beliebigen Punkt Q derselben sey die Abscisse $CP = u$, die Ordinate $PQ = z$, so hat man

$$CA : AE = CP : PQ \text{ oder } \tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{2}c = u : Bz;$$

also die Gleichung für diese gerade Linie

$$z = \frac{cu}{a}.$$

Also $$z^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2}$$

aber für eine eben so große Abscisse ist in der Hyperbel

$$y^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2} - \tfrac{1}{4}c^2 \text{ (§. 25.) also } z^2 - y^2 = \tfrac{1}{4}c^2$$

oder wegen

$$z^2 - y^2 = (z - y) \cdot (z + y) \text{ wird}$$

$$z - y = \frac{c^2}{4(z + y)}.$$

Es ist also erstlich allemahl die Ordinate PQ der geraden Linie größer, als die Ordinate PM der Hyperbel, aber der Unterschied QM = z — y wird immer kleiner, je größer z und y selbst werden, weil der Nenner des Bruchs $\frac{c^2}{4(z+y)}$ immer größer und größer wird; Aber nie kann z = y werden, d. h. die gerade Linie CQ nähert sich der Hyperbel immer mehr und mehr, je weiter sie hinausgezogen wird, aber nie kann sie die Hyperbel erreichen. Diese gerade Linie heist man die **Asymptote.** So hat auch der untere Schenkel Am auf dieselbe Art eine Asymptote. Verlängert man diese geraden Linien rückwärts, so erhält man die Asymptoten, für die andern zwey Schenkel der Hyperbel.

Anmerkung.

26. Das Bisherige mag von krummen Linien der zweyten Ordnung hinreichen. Man kann beweisen, daß so eine verschiedene Form auch eine Gleichung vom zweyten Grade zwischen zwoen veränderlichen Grössen x und y, haben kann, die construirte krumme Linie doch allemahl, entweder ein **Kreis**, eine **Parabel**, eine **Ellipse**, oder **Hyperbel** seyn müsse, und daß es weiter keine andern krummen Linien der zweyten Ordnung gebe, als die nur genannten. Man nennt sie auch **Kegelschnitte**, weil man zeigen kann, daß sie durch gehörige Schnitte eines Kegels vermittelst einer ebenen Fläche zum Vorschein kommen. Aber die weitere Ausführung hievon gehört nicht für Anfangsgründe wie die gegenwärtigen. Ich will jetzt auch ein Beyspiel von einer krummen Linie der vierten Ordnung geben.

Erklärung.

27. Es sey TR (Fig. 8.) eine gerade Linie, die man sich rechts und links ohne Ende fortgezogen gedenken kann, und CA senkrecht auf TR. C sey ein gegebener Punkt in dem senkrechten Abstande CE von TR. In der Verlängerung von CE nehme man EA von beliebiger Länge, ziehe durch C lauter gerade Linien CM, CN, u. s. w. welche TR in Q, S u. s. w. schneiden. 8.

Man mache die Stücken QM, SN &c. oder auch unterhalb TR, die Stücken Qm, Sn &c. alle von gleicher Länge, und = EA. Eben diese Verzeichnung geschehe auch linker Hand CA, so erhält man Punkte V, A, M, N &c. v, a, m, n, &c. durch welche eine krumme Linie construirt wird, welche man mit dem Nahmen der **Conchoide** oder **Muschellinie** belegt hat.

Aufgabe.

28. Die Gleichung für die Muschellinie zu finden.

Auflösung.

1. Es sey $CE = b$, $AE = a = QM = SN$ u. s. w. was auch M und N für Punkte der krummen Linie seyn mögen. Man nehme CA für eine Abscissenlinie an, und fälle MP senkrecht darauf, wenn die Abscisse $EP = x$ und Ordinate $PM = y$.

II. So ist

$$CE : EQ = CP : PM \text{ oder}$$
$$b : EQ = b + x : y.$$

Aber

$$EQ = y - QL = y - \sqrt{(QM^2 - ML^2)}$$

das heißt:

$$EQ = y - \sqrt{(a^2 - x^2)}.$$

Demnach

$$b : y - \sqrt{(a^2 - x^2)} = b + x : y$$

III. Also wenn man die äußersten und mittelsten Glieder dieser Proportion in einander multiplicirt, und aufhebt, was sich aufheben läßt

$$(b + x)\sqrt{(a - x^2)} = xy.$$

IV. Endlich auf beyden Seiten quadrirt, und alles auf eine Seite geschafft:

$$x^4 + 2bx^3 + (y^2 + b^2 - a^2)x^2 - 2a^2bx - a^2b^2 = 0$$

Da

Da diese Gleichung vom vierten Grade ist, so ist die Muschellinie eine krumme Linie der vierten Ordnung.

Zusätze.

29. I. Da

$$y = \frac{(b + x)\sqrt{(a^2 - x^2)}}{x}$$

(§. 28. III.) und das Wurzelzeichen + und — genommen werden kann, so gehören zu jeder Abscisse x zwey gleiche und entgegengesetzte Ordinaten, z. E. PM, Pμ, oder die Muschellinie wird durch die Abscissenlinie in zwey gleiche und ähnliche Hälften getheilt.

II. Für $x = o$ wird $y = \pm \frac{ab}{o}$ unendlich (§. 63. Algebr.) Da nun aus der Verzeichnungsart der Muschellinie und wegen

$$ML = a \operatorname{Sin} MQL = a \operatorname{cos} ECQ$$

zugleich erhellet, daß das Perpendikel ML immer kleiner und kleiner werden muß, je größer der Winkel ist, den CM mit CA macht, oder je mehr sich dieser Winkel einem rechten nähert, so wird die krumme Linie AMN sich immer mehr und mehr der geraden ER nähern, aber sie nie als im Unendlichen erreichen, d. h. gar nicht. Also ist TR eine Asymptote der Muschellinie, wie CQ (§. 25. VIII.) für die Hyperbel.

III. Die Abscisse x darf nie größer als a genommen werden, sie sey bejaht oder verneint, sonst wird x^2 größer als a^2 mithin die Ordinate y unmöglich: Die verneinten Abscissen, von E nach C zu, geben den untern Theil vamn &c. der Muschellinie.

IV. Wenn demnach EC oder b größer wäre, als a, so kann die krumme Linie nicht durch C gehen.

V. Wenn b kleiner ist, als a, so wird sie auch durch C gehen, und die krumme Linie bekömmt in diesem Falle bey C einen sogenannten **Knoten**, ohngefähr wie (Fig. 9.) ausweiset. Ist nemlich x negativ und
9. $= -$ b, so wird $y = o$, also schneidet die krumme Linie die Abscissenlinie bey C, aber über C hinaus giebt es wieder Ordinaten, so lange die negative Abscisse kleiner bleibt, als a. (III.)

VI. Wenn a kleiner ist, als b, so giebt es keinen Knoten; wenn $a = b$, so verwandelt sich der Knoten in einen bloßen Punkt.

VII. Die verschiedenen Gestalten der Muschellinie hängen von dem Verhältnisse b : a ab.

Anmerkung.

30. Man nenne den veränderlichen Winkel ACM auf dessen Schenkel CM der Punkt M der krummen Linie liegt $= \varphi$, und die veränderliche Länge $CM = z$, so ist $CQ = b \sec \varphi$ und $CM = CQ + a$, oder wenn von dem Punkte m die Rede wäre $Cm = CQ - a$, also überhaupt CM oder Cm d. h. $z = b\sqrt{\sec. \varphi} \pm a$, wo das obere Zeichen den Punkt M, das untere aber den Punkt m der krummen Linie, für die zugehörigen Winkel φ giebt. Dies wäre also auch eine Gleichung für die Muschellinie, in so ferne man für jeden Winkel φ, die Linie CM oder Cm berechnen, auftragen, und so die Punkte M, m, der krummen Linie construiren könnte. Hier heisen die Ordinaten wie CM, Cm, CN, CV u. d. g. **Ordinaten aus einem Punkte**, (nemlich aus C.) Die veränderlichen Winkel φ könnte man umgekehrt aus z finden. Es hat oft sehr große Vortheile, und erleichtert manche Untersuchungen bey Betrachtung der krummen Linien, wenn man die Ordinaten aus einem Punkte nimmt. Will man aber wissen, von welchem Grade die krumme Linie ist, so dürfen die Ordinaten nicht aus einem Punkte genommen werden, sondern ihr Winkel mit der Abscissenlinie muß unveränderlich, d. h. die Ordinaten müssen **parallel** seyn, welches aber umständlicher auseinander zu setzen, hier nicht der Ort ist.

Ende der höhern Geometrie.

Anfangs-Gründe der Analysis des Unendlichen.

Differential-Rechnung.

Vorbereitung.

1.

Wenn y eine Function von x ist (§. 4. höhere Geom.) so ändert sich der Werth von y, für jede Aenderung des Werthes von x, oder wenn man x um eine gewisse Differenz die ich $= \Delta x$ nennen will, ändert, so wird auch der Werth von y sich um eine gewisse Differenz, die ich mit Δy bezeichnen will, ändern.

Es sey z. E. die Function zwischen y und x folgende: $y = 3x^2$, und gesetzt die veränderliche Größe x ändere sich um Δx, d. h. x verwandele sich in $x + \Delta x$, so wird y sich verwandeln in $y + \Delta y$, und man bekömmt

$$y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2$$

oder

$$y + \Delta y = 3x^2 + 6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2.$$

Weil aber

$$y = 3x^2, \text{ so ist}$$

$$\Delta y = 6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2.$$

So wäre demnach die Aenderung von y, d. h. von $3x^2$ durch Δx selbst gefunden, und das Verhältniß dieser Aenderungen wäre

$$\Delta y : \Delta x = 6x + 3\Delta x : 1$$

2. Wenn demnach eine Function von x vorgegeben ist, so läßt sich das Verhältniß der Aenderungen bestimmen, welche die ganze Function in Ansehung der in ihr vorkommenden veränderlichen Größen erleidet, d. h. wenn sich x um $\triangle x$ ändert, so kann man bestimmen, was die **ganze Function** von x (welche man nur der Kürze halber mit y bezeichnet hat) für eine Aenderung dadurch erfährt, und wie sich beyde Aenderungen gegen einander verhalten.

3. Sucht man dies Verhältniß für den Fall, wenn diese Aenderungen $\triangle y$ und $\triangle x$ **unendlich klein sind**, oder selbst **verschwinden**, so redet man von dem **Verhältnisse der Differentialen**; die endlichen Differenzen $\triangle y$, $\triangle x$ heissen nemlich die **Differentiale**; sobald sie unendlich klein, d. h. kleiner als jede angebliche Grösse werden, und man sie als **verschwindende Grössen** betrachtet.

4. Daß Grössen unter diesen Umständen doch noch ein Verhältniß haben können, wird durch folgendes erläutert. Es sey (Fig. 2. höhere Geom.) LO eine gerade Linie, und M, O, ein paar Punkte derselben, MP OV, ihre Ordinaten und LP, LV ihre Abscissen. Es heise $LP = x$, und $PM = y$, so ist y eine Function von x. Wenn sich LP in $LP + PV$ d. h. in $x + \triangle x$ verändert, so ändert sich MP in $MP + OZ$ d. h. in OV, oder in $y + \triangle y$, wenn man OZ oder die Aenderung von PM $\triangle y$ nennt. Es sind also MZ, oder PV und OZ zusammengehörige Aenderungen der Abscisse und Ordinate. Aber MZ oder $\triangle x$ wird sich zu OZ oder $\triangle y$ allemahl verhalten, wie der Sinus totus zur Tangente des Winkels OMZ oder OLV, den die gerade Linie mit der Abscissenlinie macht. Heist man diesen Winkel α, und Sin. tot. $= 1$ so ist allemahl

H. G. 2.

$$\triangle y : \triangle x = \text{tang. } \alpha : 1$$

und dies muß wahr seyn, so nahe als man auch die Ordinate OV neben MP sich gedenken mag, so klein also auch

auch OZ und MZ d. h. $\triangle y$ und $\triangle x$ seyn mögen. In dem Augenblicke selbst, daß OV mit MP zusammenfiele, also die Differenzen OZ und MZ verschwänden, würde noch ihr Verhältniß = tang α : 1 bleiben. Wäre LO keine gerade, sondern eine krumme Linie, so würden eben diese Schlüsse gelten, nur daß alsdann die Differenzen $\triangle y$, $\triangle x$, kein beständiges Verhältniß gegen einander haben würden, wie bey der geraden Linie der Fall ist, sondern dies Verhältniß veränderlich, also für jeden andern Punkt der krummen Linie anders seyn würde.

Willkührlicher Satz.

5. Man bezeichne die Differenzen $\triangle y$, $\triangle x$ in dem Augenblicke ihres Verschwindens mit dy, dx und nenne sie alsdann Differentialien und ihr Verhältniß $dy : dx$ das **Differentialverhältniß**. Man muß also bemerken, daß hier der Buchstabe d keinen Factor, sondern nur ein Zeichen bedeutet, wodurch das Verschwinden der dahinter geschriebenen veränderlichen Grössen angedeutet wird. Auch schreibt man, Verwirrung zu vermeiden, in jedem Produkte das Differential gerne zuletzt. Z. E. adx statt $dx \cdot a$.

Erklärung.

6. **Die Differential-Rechnung ist eine Wissenschaft das Differentialverhältniß $dy : dx$, (§. 5.) zu finden, was y auch für eine Function von x seyn mag.**

Anmerkung.

7. In (§. 1.) war $y = 3x^2$ und das Verhältniß der endlichen Differenzen $\triangle y : \triangle x = 6x + 3\triangle x : 1$. Dieses nähert sich immer mehr und mehr dem Verhältnisse $6x : 1$, je kleiner man sich $\triangle x$ gedenkt. In dem Zustande da $\triangle x$ verschwindet, ist $3\triangle x$ in Vergleichung der endlichen Grösse $6x$ als Null zu betrachten, und so wäre das Verhältniß der Differentialen

$$dy : dx = 6x : 1$$

für die vorgegebene Function $y = 3x^2$.

Zusatz.

8. I. Für eine **unveränderliche** Grösse C ist $\Delta C = 0$. Wäre demnach $y = x + C$, so würde Δy bloß $= \Delta x$.

II. Wäre $y = Cx$, also

$$y + \Delta y = C(x + \Delta x) = Cx + C \cdot \Delta x,$$

so wäre

$$\Delta y = C \cdot \Delta x,$$

und folglich

$$\Delta y : \Delta x = C : 1,$$

also auch

$$dy : dx = C : 1.$$

Erklärung.

9. Wenn $dy : dx = P : 1$,

so wird die daraus erfolgende Gleichung

$$dy = P \cdot dx$$

die **Differentialgleichung** genannt. Sie will begreiflich weiter nichts als jene Proportion bedeuten, und wird statt dieser als eine Abkürzung gebraucht.

Anmerkung.

10. So wäre für $y = 3x^2$; $dy : dx = 6x : 1$ also $dy = 6x \cdot dx$ und $P = 6x$.

Zusatz.

11. Wenn $y = x + u$, so daß x und u beydes veränderliche Grössen sind, deren eine um Δx, die andere um Δu sich ändere, so hat man

$$y + \Delta y = x + \Delta x + u + \Delta u$$

also wegen

$$\frac{y = x + u}{\Delta y = \Delta x + \Delta u}$$

Folglich auch die Differentialgleichung

$$dy = dx + du$$

Eben

Eben so würde, wenn

$$y = x + u + z;\ dy = dx + du + dz.$$

Zusatz.

12. Wäre $y = x - u$, also

$$y + \Delta y = (x + \Delta x) - (u + \Delta u),$$

so käme die Differentialgleichung

$$dy = dx - du$$

d. h. einer verneinten Grösse — u ihre Differenz oder Differential wird auch verneint

$$= -\Delta u \text{ oder } -du.$$

Zusatz.

13. Wenn man im (§. 1.) statt $y = 3x^2$ bloß $y = x^2$ genommen hätte, so würde man nach einer ähnlichen Rechnung wie dort, das Differentialverhältniß

$$dy : dx = 2x : 1$$

Also die Differentialgleichung

$$dy = 2x\,dx$$

gefunden haben; Es ist also $2x\,dx$ das Differential von y oder x^2, welches man auch so schreibt

$$d(x^2) = 2x\,dx$$

und eben so

$$d(u^2) = 2u\,du.$$

Aufgabe.

14. **Wenn xy ein Produkt aus zwey veränderlichen Grössen ist, das Differential desselben zu finden.**

Auflösung.

1. Man setze der Kürze halber $xy = z$, so soll man die Differentialgleichung zwischen dz, dx und dy finden. Dies geschiehet so:

2. Man setze

$$x + y = u, \text{ also } dx + dy = du,$$

ferner

$$x - y = w, \text{ also } dx - dy = dw,$$

so ist $u^2 = x^2 + 2xy + y^2$, und

$x^2 - 2xy + y^2 = w^2$, demnach

$u^2 - w^2 = 4xy = 4z$ (1).

3. Also:

$4dz = d(u^2) - d(w^2) = 2udu - 2wdw$ (§. 13.)

$= 2(x+y)(dx+dy) - 2(x-y)dx - dy$ (2.).

4. Wenn man nun diese Produkte wirklich macht und von einander abzieht, so findet sich nach geschehener Division mit 4

$dz = xdy + ydx$. Oder

$xdy + ydx$ ist das Differential von xy.

Zusatz.

15. Man setze in (§. 14.)

$y = x^2$, also $dy = 2xdx$

(§. 13.) so wird

$xy = x^3$ und

$d(xy)$ oder $d(x^3) = x \cdot 2xdx + x^2 dx$

das heißt:

$d(x^3) = 3x^2 dx$.

Zusatz.

16. Eben so findet sich, wenn man in (§. 14.) $y = x^3$ also $dy = 3x^2 dx$ (§. 15.) setzt:

$d(xy)$ oder $(dx^4) = 4x^3 dx$

Zusatz.

17. Aus den (§§. 13. 15. 16.) gefundenen Differentialen von x^2, x^3, x^4, läßt sich muthmaßen, daß

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx$$

seyn

seyn werde, weil diese Formel zutrift, für

$$n = 2;\ n = 3, \text{ und } n = 4 \text{ (§§. cit.).}$$

Findet sich, daß wenn man statt n den nächst höhern Exponenten $n + 1$ setzt,

$$d\,(x^n + 1) = (n + 1)\,x^n\,d\,x$$

wird, so ist dadurch jene Muthmaßung bestätigt, und man kann von $n = 4$ auf $n = 5$, und von da weiter auf $n = 6$ ꝛc. schließen. Um diesen Ausdruck

$$d\,(x^n) = n\,x^{n-1}\,d\,x$$

zu bestätigen, setze man in (§. 14.) $y = x^n$ so wird

$$x\,y = x^{n+1} \text{ folglich}$$

$$d\,(x\,y) \text{ oder } d\,(x^n + 1) = x\,d\,y + y\,d\,x$$

Ist demnach

$$d\,y = n\,x^{n-1}\,d\,x$$

wie angenommen worden, so ist

$$\begin{aligned} d\,(x^n + 1) &= n\,x\,.\,x^{n-1}\,dx + x^n\,d\,x \\ &= n\,x^n\,d\,x + x^n\,d\,x \\ &= n + 1)\,x^n\,dx\,. \end{aligned}$$

Wenn also $n = 4$, so ist (§. 16.) würklich

$$d\,(x^n) = n\,x^{n-1}\,d\,x = 4\,x^3\,d\,x,$$

folglich auch für $n + 1 = 5$;

$$d(x^5) = 5\,x^4\,d\,x$$

Und da also die Formel:

$$d\,(x^n) = n\,x^{n-1}\,d\,x$$

den Schluß von dem Exponenten auf den nächst höhern $n + 1$ rechtfertigt, so muß sie allgemein für jeden Werth von n gelten.

Aufgabe.

18. Das Differential eines Quotienten $\frac{x}{y}$ zu finden.

Auf-

Auflösung.

Man setze:

$$\frac{x}{y} = v \text{ also } x = v\,y, \text{ so ist}$$

$$dx = v\,dy + y\,dv \text{ (§. 14.)} = \frac{x}{y}\,dy + y\,dv$$

Also $y\,dx = x\,dy + y^2\,dv$; folglich

$$dv \text{ oder } d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}.$$

Zusätze.

1y. I. Wäre x eine beständige Grösse $= a$, so ist

$$dx = da = o \text{ (§. 8.) Demnach}$$

$$d\left(\frac{a}{y}\right) = -\frac{a\,dy}{y^2}.$$

II. Wäre ferner:

$$y = x^n \text{ mithin } dy = n\,x^{n-1}\,dx$$

(§. 17.) so hat man

$$d\left(\frac{a}{x^n}\right) = -\frac{a\,n\,x^{n-1}\,dx}{x^{2n}} = -n\,a\,x^{-n-1}\,dx$$

Aber $\frac{a}{x^n} = a\,x^{-n}$. Folglich

$$d(a\,x^{-n}) = -n\,a\,x^{-n-1}\,dx$$

Man sieht also, daß die Formel (§. 17.) auch gilt, wenn n eine verneinte Zahl ist. Es werde nemlich wenn

$$a = 1;\ d(x^{-n}) = -n\,x^{-n-1}\,dx.$$

III. Es sey

$$\sqrt[m]{x^n} = u, \text{ so ist } x^n = u^m$$

folg-

folglich

$$n x^{n-1} dx = m u^{m-1} du .$$

Aber $u = x^{\frac{n}{m}}$ (§. 33. Algebr.) Also

$$u^{m-1} = x^{\frac{n}{m}(m-1)}$$ (§. 28. Algebr.)

$$= x^{n-\frac{n}{m}}$$ folglich

$$n x^{n-1} dx = m x^{n-\frac{n}{m}} . du$$

oder auf beyden Seiten mit x^{n-1} dividirt (§. 27. Algebr.)

$$n dx = m x^{1-\frac{n}{m}} . du,$$

oder auf beyden Seiten mit

$x^{\frac{n}{m}-1}$ multiplicirt (§. 26. Algebr.)

$$n x^{\frac{n}{m}-1} = m du.$$ Demnach

$$du = d\sqrt[m]{x^n} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1} dx = d(x^{\frac{n}{m}})$$

Die Formel (§. 17.) ist also auch richtig, wenn statt n sogar ein Bruch $\frac{n}{m}$ gesetzt wird, in welchem Falle man also das **Differential einer Wurzelgröße** findet. Man kann also in der Formel (§. 17.) die Größe n jede ganze, bejahte, verneinte und gebrochene Zahl bedeuten lassen.

Anmerkung.

20. Die bisher beygebrachten **Differentialformeln**, dienen auf mannichfaltige Art zur Differentiirung zusammengesetz:

gesetzterer Ausdrücke, wovon ich nur ein paar Beyspiele geben will, um das Verfahren zu erläutern.

I. Exempel.

$(a + b\,x)\,(e + f\,x^2)$ zu differentiiren.

Man setze $a + b\,x = u$; $e + f\,x^2 = w$,

also jenes Produkt

$= u \,.\, w$ so ist $d\,uw = u\,dw + w\,du$

Aber $dw = 2\,f\,x\,dx$; $du = b\,dx$ (§§. 9. 13.)

Also $d\,(uw) = (a + b\,x)\,2\,f\,x\,dx + (e + f\,x^2)\,b\,dx$

oder $d\,(uw) = (e\,b + 2\,a\,f\,x + 3\,b\,f\,x^2)\,dx$

II. Exempel.

$\frac{a + b\,x}{e + f\,x}$ zu differentiiren.

Man setze:

$a + b\,x = u$; $e + f\,x = w$ so ist

$b\,dx = du$; $f\,dx = dw$

und das Differential des Quotienten

$$\frac{u}{w} \text{ oder } d\left(\frac{u}{w}\right) = \frac{w\,du = u\,dw}{w^2}$$

d. h. wenn man statt u und w ihre Werthe setzt.

$$d\left(\frac{u}{w} = \frac{(e + f\,x)\,b\,dx - (a + b\,x)\,f\,dx}{(e + f\,x)^2}\right.$$

$$= \frac{(b\,e - a\,f)\,dx}{(e + f\,x)^2}.$$

III. Exempel.

$\sqrt{}\,(a + b\,x)$ zu differentiiren.

Man setze

$a + b\,x = u$, also $\sqrt{}\,(a + b\,x) = \sqrt{}\,u = u^{\frac{1}{2}}$

mithin

$d\sqrt{}$

$$d\sqrt{(a+bx)} = \tfrac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du \text{ (§. 19. III.)}$$

$$= \frac{du}{2u^{\frac{1}{2}}} = \frac{b\,dx}{2\sqrt{(a+bx)}}$$

Mehrere Beyspiele können in den Vorlesungen gegeben werden.

Aufgabe.

21. **Wenn x ein veränderlicher Kreisbogen bedeutet, das Differential des Sinus desselben zu finden, oder durch das Differential des Bogens auszudrücken.**

Auflösung.

I. Man setze $\text{Sin}\, x = y$; so soll das Differentialverhältniß $dy : dx$ oder $d\,\text{Sin}\, x : dx$ gefunden werden.

II. Man lasse den Bogen x erstlich um eine endliche Differenz Δx wachsen; Wächst nun der Sinus von x oder die Grösse y alsdann um Δy, so hat man

$$y + \Delta y = \text{Sin}\,(x + \Delta x).$$

III. Wenn man aber in (§. 44. Trigon.) statt der dortigen Buchstaben α und β setzt x und Δx, so wird

$$\text{Sin}\,(x + \Delta x) = \text{Sin}\, x\, \text{cos}\, \Delta x + \text{Sin}\, \Delta x\, \text{cos}\, x\,.$$

Nun sey der Bogen Δx unendlich klein $= dx$, so ist der Cosinus desselben unendlich wenig von dem Sinus totus $= 1$ unterschieden, so daß es verstattet ist, $\text{cos}\, dx = 1$ zu setzen. Der Sinus des unendlich kleinen Bogens dx ist aber unendlich wenig von dem kleinen Bogen dx selbst unterschieden, so daß man $\text{Sin}\, dx = dx$ setzen kann, also wird für diesen Fall

$$\text{Sin}\,(x + dx) = \text{Sin}\, x + dx\, \text{cos}\, x$$

IV. Weil sich nun Δy in dy verwandelt, wenn Δx sich in dx verändert, so hat man (II.)

$$y + dy = \text{Sin}\, x + dx\, \text{cos}\, x$$

Aber $y = \text{Sin } x$ (I.)

Demnach $d\,y = dx \,.\, \text{cos } x$. oder

$d\,(\text{Sin } x) = dx \,.\, \text{cos } x$

das heißt:

$$d\,\text{Sin } x : dx = \text{cos } x : 1.$$

Zusatz.

22. So ist, wenn man statt x auch einen andern Buchstaben φ setzen will, eben so

$$d\,\text{Sin } \varphi = d\varphi \,.\, \text{cos } \varphi.$$

Zusatz.

23. Wäre in dieser Formel nunmehr

$\varphi = 90° - x$ Also

$\text{Sin } \varphi = \text{cos } x$; $\text{cos } \varphi = \text{Sin } x$

und $d\,\varphi = -dx$

(weil 90° als eine beständige Grösse keine Differential hat), so wird

$$d\,\text{cos } x = -dx\,\text{Sin } x$$

Zusatz.

24. Weil $\text{tang } x = \frac{\text{Sin } x}{\text{cos } x}$

(§. 42. Trigon.) so wird

$$d\,\text{tang } x = \frac{\text{cos } x \,.\, d\,\text{Sin } x - \text{Sin } x \,.\, d\,\text{cos } x}{\text{cos } x^2}$$

(§. 18.) oder statt

$d\,\text{Sin } x$, und $d\,\text{cos } x$

ihre Werthe aus (§. 21. und 23.) substituirt

$$d\,\text{tang } x = \frac{(\text{cos } x^2 + \text{Sin } x^2)\,dx}{\text{cos } x^2} = \frac{dx}{\text{cos } x^2}$$

weil $\text{cos } x^2 + \text{Sin } x^2 = \text{Sin tot}^2 = 1.$

Anmer=

Anmerkung.

25. Diese trigonometrischen Differentialformeln sind in der ganzen Analysis von der größten Wichtigkeit; man hat noch mehrere derselben, die sich leicht aus dem angegebenen herleiten lassen. Wir müssen uns aber mit den angeführten begnügen.

Aufgabe.

26. Das Differential einer Logarithmischen Grösse log y zu finden, wenn y um das Differential dy sich ändert.

Auflösung.

1. Wenn y sich in $y + dy$ verwandelt, so wird log y sich in $\log (y + dy)$ verwandeln, und

$$\log (y + dy) - \log y$$

wird das Differential des Logarithmen von y ausdrücken, welches man so bezeichne:

$$\log (y + dy) - \log y = d \log y.$$

2. Dieses $d \log y$ gedenke man sich von einer beständigen Größe $= n$, was auch y für eine Zahl seyn mag. Man kann sich begreiflich vorstellen, die Logarithmen giengen in gleichen Differenzen fort, wie die Zahlen einer arithmetischen Reihe, und dann berechnen, was diesen beständigen logarithmischen Differenzen, für Unterschiede der zugehörigen Zahlen entsprechen. Diese Unterschiede der Zahlen, welche gleichen Differenzen der Logarithmen entsprechen, werden aber nicht, wie diese, unveränderlich seyn, weil die Zahlen, welche den Logarithmen zugehören, als Glieder einer geometrischen Reihe zu betrachten sind. Indessen erhellt folgendes.

3. Wenn $\log (y + dy) - \log y$

das heißt; $\log \frac{y + dy}{y}$ (§. 16. Trig.) $= n =$

einer beständigen Grösse, so muß auch der Quotient

$$\frac{y + dy}{y} \text{ oder } 1 + \frac{dy}{y}$$

von einer beständigen Grösse $= m$, und folglich auch

$$\frac{dy}{y} = m - 1$$ von einer beständigen Grösse

seyn, wenn gleich y und dy veränderlich sind (2).

4. Also wird auch der Quotient

$$\frac{dy}{y\,(\log(y + dy) - \log y)} = \frac{m - 1}{n} =$$

einer beständigen Grösse seyn, die ich mit a bezeichnen will.

5. Nun ist aber

$$\log(y + dy) - \log y = d \log y$$

Also ist in jedem logarithmischen Systeme allemahl

$$\frac{dy}{y \,.\, d \log y} = a =$$

einer beständigen Grösse.

6. Folglich $d \log y = \frac{1}{a} \,.\, \frac{dy}{y}$;

oder wenn man die beständige Grösse

$\frac{1}{a} = b$ setzt

$$d \log y = b \,.\, \frac{dy}{y}.$$

d. h. das Differential der Zahl y mit der Zahl y selbst dividirt, und mit der beständigen Grösse b multiplicirt, giebt

giebt das Differential des Logarithmen dieser Zahl. Die beständige Grösse b, wird, wie die Folge zeigen wird, von der Basis des logarithmischen Systems abhängen.

Zusatz.

27. Diese Differentialgleichung will begreiflich weiter nichts sagen, als daß die beständige logarithmische Differenz d log y zu der veränderlichen Differenz der Zahl selbst, d. h. zu d y sich verhalte, wie die beständige Grösse b zu der veränderlichen y.

Aufgabe.

28. Eine Exponentialgrösse a^x, wo x veränderlich, und a beständig ist, zu differenziiren.

Auflösung.

Man setze:

$$a^x = y, \text{ so ist } x \,.\, \log a = \log y,$$

$$\text{also} \qquad dx \,.\, \log a = d \log y = b \,\frac{dy}{y}\,.$$

$$\text{folglich} \quad dy = \frac{y\,dx \,.\, \log a}{b} = \frac{a^x \log a \,.\, dx}{b}\,.$$

Zusatz.

29. Wäre auch a veränderlich $= z$, so hätte man $x \log z = \log y$; Also $x \,.\, d \log z + \log z \,.\, dx$

$$(\S.\ 14.) \quad = \frac{b\,dy}{y}, \text{ oder}$$

$$\frac{x\,b\,dz}{z} + \log z \,.\, dx = \frac{b\,dy}{y} \text{ Demnach}$$

$$dy = d(z^x) = \frac{z^x\, x\, dz}{z} + \frac{z^x\, dx \,.\, \log z}{b}$$

Anmerkung.

30. Man kann ſich ein logarithmiſches Syſtem gedenken, für welches $b = 1$ iſt. Man nennt es das **natürliche Syſtem**. Wenn demnach von dieſen natürlichen Logarithmen die Rede iſt, ſo hätte man

$$d \log y = \frac{dy}{y}$$

und §. 28.

$$d(a^x) = a^x\, dx \,.\, \log a$$

Anmerkung.

31. Man kann aus den gefundenen Differentialformeln, durch Subſtitutionen mehrere andere herleiten. Man ſetze z. E. in (§. 30.)

I. $y = 1 + x$,

ſo iſt $dy = dx$ alſo

$$d \log (1 + x) = \frac{dx}{1 + x}$$

II. Setze man

$y = a + bx$, alſo

$dy = b\, dx$, ſo wird

$$d \log (a + bx) = \frac{b\, dx}{a + bx}.$$

Für $b = -1$ und $a = 1$ wäre ſolchergeſtalt

$$-d \log (1 - x) = \frac{dx}{1 - x};$$

III. Man ſetze $y = \text{Sin } x$, alſo

$$dy = dx \cos x$$

(§. 21.) folglich

d log

$$d \log \operatorname{Sin} x = \frac{dx \cos x}{\sin x} = dx \cdot \cot x.$$

(§. 43. Trig.)

So kann man die Differentiale der Logarithmen anderer trigonometrischer Linien finden.

Ende der Differentialrechnung.

Anfangs-Gründe der Analysis des Unendlichen.

Integral-Rechnung.

Erklärung.

1.

Die Integralrechnung ist eine Wissenschaft aus dem Differential einer veränderlichen Grösse, oder einer Function der veränderlichen Grösse, die endliche Function selbst zu finden, welche dann den Nahmen des Integrals des vorgegebenen Differentials erhält. Um diese Integration einer Differentialgrösse anzudeuten, setzt man den Buchstaben $\int$ vor die Differentialgrösse.

Zusatz.

2. Also ist.

I. $\int (dx + dy) = x + y$ (§. 11. Differential-Rechnung.)

II. $\int (x\,dy + y\,dx) = x\,y$ (§. 14. ib.)

III. $\int (n + 1)\, x^n\, dx = x^{n+1}$ (§. 17. ib.)

Also auch

IV. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ferner

V. $\int \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = \frac{x}{y}$ (§. 18. ib.)

VI.

VI. $\int dx \cos x = \text{Sin } x$ (§. 21. ib.)

VII. $\int dx \text{ Sin } x = -\cos x$ (§. 23. ib.)

VIII. $\int \frac{dx}{\cos x^2} = \text{tang } x$, (§. 25. ib.)

IX. $\int \frac{dx}{x} = \frac{\log x}{b}$ (§. 26. ib.)

X. $\int a^x dx = \frac{b\, a^x}{\log a}$ (§. 28.)

XI. $\int dx \cot x = \log \text{Sin } x$. (§. 31. III.)

Zusatz.

3. Weil jede veränderliche Grösse eben das Differential behält, wenn eine beständige Größe zu ihr addirt, oder von ihr abgezogen wird, so kann man zu jedem der gefundenen Integrale noch eine solche unveränderliche Grösse, welche man mit Const. zu bezeichnen pflegt, hinzusetzen. Also ist z. E. in §. 2. II.

$$\int (x\,dy + y\,dx) = xy + \text{Const.}$$

und so in den übrigen Formeln.

Anmerkung.

4. Aus den angegebenen Integralformeln, lassen sich eine Menge anderer herleiten, womit sich die Integralrechnung beschäftigt. Ich will dies durch einige Beyspiele erläutern.

I. Beyspiel.

Die Formel $dx \sqrt{(a + bx)}$ zu integriren. Man setze

$a + bx = u$, so ist $\sqrt{(a + bx)} = u^{\frac{1}{2}}$

und $b\,dx = du$, also $dx = \frac{du}{b}$, folglich

$$dx \sqrt{(a + bx)} = \frac{du}{b} \cdot u^{\frac{1}{2}}.$$

Setzt man nun in (§. 2. IV.) das dortige

$x = u$ und $m = \frac{1}{2}$, so wird

$$\int u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\, u^{\frac{3}{2}}.$$

Also wird

$$\int dx \sqrt{(a+bx)} = \frac{2}{3b} \cdot u^{\frac{3}{2}} + \text{Const}$$

$$= \frac{2}{3b} (a+bx)^{\frac{3}{2}} + \text{Const}$$

II. Beyspiel.

$\frac{dx}{1-x^2}$ zu integriren.

Weil $1 - x^2 = (1+x)(1-x)$,

so setze man

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-x} = \frac{a(1-x)+b(1+x)}{(1+x)(1-x)}$$

$$= \frac{a+b-(a-b)x}{1-x^2}$$

Soll also dieser Bruch dem $\frac{1}{1-x^2}$ gleich seyn, so muß

$a + b = 1$ und $a - b = 0$

seyn. Dies giebt

$a = \frac{1}{2}$ und $b = \frac{1}{2}$; Also wird

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-x}$$ Demnach

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x}$$

$=$

$$= \tfrac{1}{2} \log (1 + x) - \tfrac{1}{2} \log (1 - x)$$

(§. 31. I. II.)

$$= \tfrac{1}{2} \log \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right)$$

wo man unter den Logarithmen die **natürlichen** (§. 30. I.) verstehen muß, und noch eine beständige Grösse hinzu addiren kann.

III. Beyspiel.

Aus (§. 2. VI.) ist

$$dx \operatorname{cof} x = d \operatorname{Sin} x$$

Man setze Sin x = y, so ist x = einem Bogen, dessen Sinus = y ist, welches man so bezeichne x = Bogen Sin (y) oder Arc. Sin (y) (von arcus dem Bogen). Also ist

$$dx = d \text{ Arc. Sin } (y)$$

und $\operatorname{cof} x = \sqrt{(1 - \operatorname{Sin} x^2)} = \sqrt{(1 - y^2)}$.

Demnach $dx = \frac{d \operatorname{Sin} x}{\operatorname{cof} x}$, oder

$$d \text{ Arc. Sin } (y) = \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)}} \text{ und folglich}$$

$$\text{Arc. Sin } (y) = \int \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)}}.$$

Das Integral der Formel $\frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)}}$ bezeichnet demnach einen Bogen, dessen Sinus = y ist.

IV. Beyspiel.

Auf eine ähnliche Art kann man aus der Formel

$$dx = \operatorname{cof} x^2 \,.\, d \operatorname{tang} x, \text{ wenn man}$$

$$\operatorname{tang} x = y, \text{ also } \operatorname{cof} x^2 = \frac{1}{\operatorname{Sec} x^2}$$

(§. 43. Trigon.)

$$= \frac{1}{1 + \text{tang } x^2} = \frac{1}{1 + y^2}$$

setzt, herleiten.

$$\text{Arc. tang}(y) = \int \frac{dy}{1 + y^2} .$$

V. Beyspiel.

Setzt man in diesen Formeln ferner

$$y = \frac{b}{a} u, \text{ also } dy = \frac{b}{a} du, \text{ so wird}$$

$$\frac{dy}{1 + y^2} = \frac{ab\, du}{a^2 + b^2 u^2} ; \text{ Also}$$

$$\frac{\text{Arc . tang}\left(\frac{b}{a} u\right)}{ab} = \int \frac{du}{a^2 + b^2 u^2}$$

Eben so in (III.)

$$\frac{\text{Arc. Sin}\left(\frac{b}{a} u\right)}{b} = \int \frac{du}{\sqrt{(a^2 - b^2 u^2)}}$$

welche allgemeinere Formeln sehr häufig vorkommen. Andere Beyspiele müssen wir übergehen. Nun auch einige Anwendungen der Integralrechnung.

Aufgabe.

5. Einer vorgegebenen Zahl x ihren Logarithmen zu finden.

Auflösung.

Man setze in (§. 2. IX.) $x = 1 + u$, also

$dx = du$ so wird $b \int \frac{du}{1 + u} = \log(1 + u)$.

Nun ist:

$$\frac{1}{1 + u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 \ldots$$

und

und so ohne Ende fort, wie man leicht durch die Division findet.

Demnach:

$$b \int \frac{du}{1+u} = b(\int du - \int u\,du + \int u^2\,du - \int u^3\,du \ldots)$$

d. h. wenn man die Werthe dieser einzeln Integrale nach der allgemeinen Formel (§. 2. IV.) substituirt.

$$\log(1+u) = b\,(u - \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{3}u^3 - \tfrac{1}{4}u^4 \ldots)$$

wozu noch eine Const. addiret werden kann, diese Const. wird aber allemahl für den gegenwärtigen Fall = o seyn, weil für $u = o$; $\log(1+u) = \log 1$, also auch = o werden muß, und dieses nicht geschehen würde, wenn man zu jener Integralreihe eine beliebige Const. hinzusetzte.

Zusatz.

6. Wenn u kleiner ist als 1, also die Zahl $1+u$, deren Logarithme durch jene Reihe ausgedrückt wird, kleiner ist, als 2, so wird diese Reihe sich schnell nähern, so daß man die folgenden Glieder ihrer geringen Grösse wegen, weglassen kann, weil die Potenzen von u, wenn u ein Bruch kleiner als 1 ist, sehr bald so gering werden, daß sie in keine Betrachtung kommen. Wäre z. B. $u = \frac{1}{10}$, so würde schon das Glied $\frac{1}{4}u^4 = \frac{1}{40000}$ ein sehr kleiner Bruch seyn, und die ersten 6 Glieder dieser Reihe würden den Logarithmen von $1 + \frac{1}{10}$ oder von $\frac{11}{10}$ bis auf Millionentheilchen richtig geben, und wenn man daher den Logarithmen nicht genauer verlangte, so könnte man sich in diesem Falle mit den ersten 6 oder 7 Gliedern dieser Reihe begnügen.

Je größer u ist, desto weniger nähert sich diese Reihe, d. h. desto mehr Glieder derselben muß man berechnen, um den Logarithmen genau genug zu erhalten, und wenn sogar u grösser ist als 1, so würde die Reihe

gar

gar nicht mehr brauchbar seyn, einer Zahl $1+u$ ihren Logarithmen dadurch zu finden. Also gilt jene Reihe nur zur Berechnung der Logarithmen solcher Zahlen, welche kleiner als 2 sind.

Zusatz.

7. Indessen kann man vermittelst ihrer eine andere Reihe finden, wodurch einer jeden Zahl ihr Logarithme durch eine Näherung gefunden werden kann.

Man setze u negativ, so wird

$$\log(1-u) = b\left(-u - \tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{1}{3}u^3 - \tfrac{1}{4}u^4 \ldots\right)$$

Zieht man diese Reihe von der obigen (§. 5.) ab, so wird:

$$\log(1+u) - \log(1-u) = b\left(2u + \tfrac{2}{3}u^3 + \tfrac{2}{5}u^5 + \tfrac{2}{7}u^7 \ldots\right)$$

oder

$$\log\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = b \cdot 2u\left(1 + \tfrac{1}{3}u^2 + \tfrac{1}{5}u^4 + \tfrac{1}{7}u^6 \ldots\right)$$

Soll nun $\frac{1+u}{1-u} = N =$ einer beliebigen Zahl seyn,

so wird $1+u = (1-u)N$ also $u = \frac{N-1}{N+1}$,

also allemahl ein eigentlicher Bruch, und so ist dann

$$\log N = 2b \cdot \frac{N-1}{N+1}\left(1 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^2 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^4 \ldots\right)$$

allemahl durch eine Reihe gegeben, in der die folgenden Glieder immer kleiner und kleiner werden, und die sich also nähert.

Zusatz.

8. Wenn $b = 1$ ist, so heisen die solchergestalt gefundenen Logarithmen die natürlichen. Man kann

fragen,

fragen, wie groß muß b seyn, wenn diese Reihe die Briggischen Logarithmen geben soll?

Dies findet sich so. Weil in dem Briggischen System der Logarithmus von $10 = 1$ ist, also 10 die Basis des Briggischen Systems ist, so setze man in jener Reihe $N = 10$, also $\log N = 1$, so wird

$$\frac{N-1}{N+1} = \frac{9}{11}; \text{ Demnach}$$

$$1 = b \cdot 2\left(\frac{9}{11} + \frac{9^3}{3 \cdot 11^3} + \frac{9^5}{5 \cdot 4^5} \ldots\right)$$

wo man die Reihe rechter Hand, wenn man die Potenzen von $\frac{9}{11}$ weit genug fortsetzt, so genau als man will, berechnen kann. Man nenne den Bruch, den diese Reihe in Decimaltheilen geben wird $= m$, so ist

$$1 = b \cdot 2m; \text{ Also } b = \frac{1}{2m}.$$

Hr. Euler introduct. in anal. infinit. Cap. 7. findet solchergestalt den Werth von $b = 0{,}4342944\ldots$ die noch kleinern Decimaltheile kann man im Euler nachsehen.

Zusatz.

9. Man bezeichne den natürlichen Logarithmen einer Zahl N mit log. nat. N, und den Briggischen Logarithmen mit log. brigg. N, so wird

$$\log \text{nat } N = 2\,\frac{N-1}{N+1} \cdot \left(1 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^2 \ldots\right)$$

$$\log \text{brigg } N = 2b \cdot \frac{N-1}{N+1}\left(1 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^2 \ldots\right)$$

statt b die (§. 8.) gefundene Zahl gesetzt. Also

$$\log \text{brigg. } N = 0{,}4342944 \cdot \log \text{nat } N.$$

Weiß

Weiß man also den natürlichen Logarithmen einer Zahl N, so hat man auch den Briggischen, durch die Multiplication des natürlichen mit dem Decimalbruche 0,4342 . . . diesen Bruch heist man wohl auch, den Modulus des Briggischen Systems. Daß also dieser von der Basis 10 dieses Systems abhängt, erhellet aus (§. 8.).

Zusatz.

10. Die Basis des natürlichen Systems, also die Zahl N zu finden, für welche log nat N = 1 wird, so setze man sie sey = e, so hat man aus (9) für diesen Fall:

$$\log \text{brigg } e = 0{,}4342944 \ldots$$

Man suche also in dem Briggischen Systeme eine Zahl e, deren Briggischer Logarithme = 0,434 . . . so ist diese Zahl die Basis des natürlichen Systems. Man wird, wenn man diesen Logarithmen aufschlägt, die Zahl e = 2,71828818 . . . finden. Im Euler a. a. O. steht sie bis auf 24 Decimaltheilen angegeben, ist aber daselbst aus andern Gründen hergeleitet worden, die man, so wie die weitere Ausführung des Bisherigen, nebst der Anwendung auf die Berechnung der Logarithmentafeln, daselbst mit mehrerem nachsehen kann.

Aufgabe.

11. Aus der Tangente eines Bogens, den Kreisbogen selbst zu finden.

Auflösung.

$$\text{Weil Arc. tang } (y) = \int \frac{dy}{1+y^2}$$

$$\text{und } \frac{1}{1+y^2} = 1 - y^2 + y^4 - y^5 \ldots$$

so wird, jedes Glied dieser Reihe mit d y multiplicirt und integrirt.

$$\text{Arc. tang } (y) = y - \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 - \tfrac{1}{7}y^7 \ldots$$

Exem-

Exempel.

Weil der Sinus von $30° = \frac{1}{2}$ Sehne $60°$ (§. 2. Trig.) und die Sehne von $60°$ = dem Halbmesser des Kreises (§. 108. Geom.) = 1, so ist Sin $30° = \frac{1}{2}$, also

so $\cos 30° = \sqrt{(1 - \frac{1}{4})} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; Demnach

$$\text{tang } 30° = \frac{\text{Sin}}{\cos} \text{ (§. 39. Trig.)} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

Man setze also $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$; so erhält man für die Länge $= \lambda$ eines Bogens von $30°$ in einem Kreise dessen Halbmesser = 1, den Ausdruck

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} \ldots\right)$$

wenn man diese Brüche zusammenrechnet, und durch Decimaltheile ausdrückt, sodann mit $\frac{1}{\sqrt{3}}$ d. h. mit $\frac{\sqrt{3}}{3}$ multiplicirt, so erhält man

$$\lambda = 0{,}523598 77 \ldots$$

Zusatz.

12. Wäre nicht der Halbmesser, sondern der Durchmesser eines Kreises = 1, also der Halbmesser $= \frac{1}{2}$, so müßte man den gefundenen Werth von λ, noch mit diesem Halbmesser $\frac{1}{2}$ multipliciren, so würde in einem Kreise dessen Durchmesser = 1, die Länge eines Bogens von $30°$, also der 12te Theil des Umkreises

$$= 0{,}26179938 \ldots$$

Also der ganze Umkreis

$$= 12 \cdot 0{,}26179938 \ldots = 3{,}141592 \ldots$$

Demnach das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise = 1 : 3,141592 . . . In (§. 145 d Geom.) steht diese Zahl bis auf mehrere Decimaltheile. Man s. über das Bisherige weiter Eulers intr. in analys. inf. Cap. VIII. nach.

Anmerkung.

13. Schon aus diesen Beyspielen wird erhellen, daß die Differential- und Integralrechnung keine leeren Grübeleyen sind, sondern auf einem sehr leichten Wege, die nützlichsten Wahrheiten lehren. Wer z. E. das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise nach dem Verfahren (§. 1450 Geom.) berechnen wollte, würde in unendlich weitläuftige Rechnungen verfallen, da hingegen die Integralrechnung dasselbe auf einem viel leichtern Wege giebt. Wer sich mit der weitern Anwendung der Mathematik beschäftigt, wird sehr viele Gelegenheit finden, sich von dem Nutzen der Differential- und Integralrechnung, wovon wir uns die allerersten Gründe beygebracht haben, zu überzeugen.

Ich nenne von den unzähligen analytischen Schriften nur einige, woraus man weitern Unterricht schöpfen kann.

Clairaut Anfangsgründe der Algebra aus dem Französ. Berlin 1752. Hrn. Hofr. **Kästners** öfters angeführte Analysis des Endlichen und Unendlichen. **Tempelhofs** vollständige Anleitung zur Algebra, Berl. 1773. **Desselben** Analysis d. Unendl. **L. Eulers** Algebra Petersb. 1770. Desselben introduct. in Anal. infin. Desselben Institutiones calculi differentialis. Petr. 1755. und calcul. integr. Petrop. 1768 - 70. In Eulers introduct. ist auch die **höhere Geometrie** enthalten; womit man noch **Cramers** introd. a l' analyse des lignes courbes verbinden kann. Von **Cousins de la Granges** und mehreren andern analytischen Schriften kann hier nicht geredet werden.

Ende der Analysis des Unendlichen.

Anfangs-

Anfangs-Gründe der Bewegungs-Kunst oder Mechanik. *)

Erklärung.

I.

Die Bewegungs-Kunst oder Mechanik ist eine Wissenschaft, entweder mit Vortheil der Kraft, oder der Zeit, etwas zu bewegen, das ist, eine grössere oder geschwindere Bewegung hervorzu-

*) Ich kann mich auch hier in kein starkes Verzeichniß hieher gehöriger Schriften einlassen, und nenne nur folgende: Hrn. Hofrath Karstens Lehrbegriff der gesammten Mathem. III. und IV. Th. Desselben Anfangsgründe der mathemat. Wissensch. 2ter Band. Desselben Auszug aus den Anfangsgrüuden IIter Th. Hrn. H. Kästners Anfangsgründe der angewandten Mathem. 4te Ausgabe. Desselben Anfangsgr. der höhern Mechan. 2te Ausgabe. (Zusätze und einige Erläuterungen dazu enthalten Langsdorfs mechan. und hydrod. Untersuchungen.) Hrn. Lamberts Beyträge zum Gebrauch der Mathem. 2ter Th. Hrn. Krafts Mechanik, nach Hrn. Steingrübers Uebersetzung. Hrn. Eulers Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum. Hrn. Klügels prakt. Mechanik. Hrn. Burja's Grundlehren der Statik; desselben Grundlehren der Dynamik. Hrn. Lempes Lehrbegriff des Maschinenwesens. Hrn. Büsch's Mecha-

vorzubringen, als sonst der gegebenen Kraft vor sich möglich wäre.

Anmerkung.

2. Die Bewegungskunst (Mechanica) handelt zwar eigentlich von allen Gesetzen der Bewegung, wie auch einige dieselbe in ihren mechanischen Schriften zu erklären sich bemühen. Insgemein aber redet man in der Mechanik nur von den Maschinen, dadurch die bewegende Kraft entweder vermögender gemacht wird, eine größere Last als sonst zu bewegen, oder die Bewegung geschwinder als sonst zu verrichten.

2a) Eigentlich sollten **Statik** und **Mechanik** von einander unterschieden werden, erstere handelt von den **Gesetzen des Gleichgewichts**, letztere von den **Gesetzen der Bewegung.**

Erklärung.

3. **Alles, was die Bewegung verursachet, nennen wir** eine Kraft; **was aber beweget wird, oder der Bewegung widerstehet,** eine Last.

3a) **Kraft** heist überhaupt, was Bewegung hervorzubringen strebt.

Zusatz.

4. **Daher werden sowohl die lebendigen als leblosen Creaturen unter die bewegenden Kräfte gerechnet, deren**

Mechanik, in dessen Versuch einer Mathem. zum Nutzen und Vergnügen des bürgerl. Lebens. Hrn. **Eberhards** neue Beyträge zur matheli applicata. Hrn. **Mönnichs** Anleitung zur Anordnung und Berechnung der gebräuchlichsten Maschinen. **Hrn. Brodhagens** Versuch einer Dynamik zum Gebrauche derjenigen, die keine höhere Mathem. verstehen. Hrn. **v. Cancrins** erste Gründe der Berg- und Salzwerkskunde 7ter Th. 1te und 2te Abtheil. Hrn. **Büija**, Grundlehren der Dynamik. Hrn. **Calvörs** Beschreibung des Maschinenwesens auf dem Oberharz. Hrn. **Leupolds** bekannte Theatra machinarum. Hrn. **Prony** neue Architekt. Hydraulika 1ter Th. ein vorzügliches Werk. Dagegen ist des Hrn. **de la Grange** Méchanique analytique blos spekulativ.

ren man sich, eine Bewegung hervorzubringen, bedienet, als Menschen, Vieh, Luft, Wasser, Feuer, Gewichte Federn.

Zusatz.

5. Da nun die Mechanik lehret, wie man mit einer gegebenen Kraft eine vortheilhafte Bewegung hervorbringen kann (§. 1.); so muß darinnen auch gezeiget werden, wie man sich der Menschen, der Thiere, der Luft, des Wassers, des Feuers, der Gewichte, der Federn zu vortheilhaften Bewegungen bedienen kann.

Erklärung.

6. **Wenn die Bewegung wirklich geschiehet, heisset es eine** lebendige Kraft; **wenn aber die Last nur erhalten wird, nennet man es eine** todte **oder auch** eine erhaltende Kraft.

Erklärung.

7. **Dasjenige, so die Kraft vermögend machet, eine vortheilhafte Bewegung hervorzubringen, nennet man** eine Maschine.

Erklärung.

8. Der Hebel **ist eine gerade steife Linie AB,** I.
so in einem Punkte C aufliget, an deren einem 1.
Punkte B die Kraft, an einem andern A aber die Last appliciret werden kann.

Anmerkung.

9. Es ist hier überhaupt zu merken, daß, wenn man das Vermögen des Rüstzeuges untersuchet, man Anfangs die Materie, daraus es bestehet, und die Eigenschaften der Materie, wie auch die äussere Figur, welche das Rüstzeug gewisser Umstände wegen bekommet, aus den Augen setzet, und nur dasjenige betrachtet, was ihn zu einem Rüstzeuge machet, damit man weiß, was ihm als einem Rüstzeuge zukommt. Hindert hernach die Materie, daraus es bestehet, sein wesentliches Vermögen, so ist solches insbesondere auszumachen.

Zusatz.

10. Weil ihr euch also bey einer Bewegung dre Punkte einbilden könnet, um deren einen die Bewegung geschiehet, an dem andern die Kraft, an dem dritten aber die Last appliciret ist: daselbst treffet ihr einen Hebel an.

Anmerkung.

11. Wenn ihr dieses wohl merket; so werdet ihr aus den Gesetzen des Hebels nicht allein von den meisten Instrumenten und andern Werken der Kunst, sondern auch von den wunderbaren Bewegungen in den Körpern der Thiere und der Menschen richtigen Grund zeigen, und beyderseits ihr Vermögen ausrechnen können. Auf diesem Grunde beruhet, was **Borellus** von der Bewegung der Thiere geschrieben.

Erklärung.

I. 2. 12. **Ein Rad an einer Axe** (Axis in peritrochio) **ist nichts anders, als ein an einer Welle befestigter Circul** AFDA, **welcher zugleich mit der Welle** BIKB **um ihren gemeinen Mittelpunkt C beweget werden kann. Ja es ist genug, wenn man sich einen Circul nur gedenken kann, der in der Bewegung der Welle um ihre Axe beschrieben wird.**

Zusatz.

I. 3. 13. Ihr treffet demnach ein Rad an einer Axe an, wo ihr euch gedenken könnet, daß ein grösserer Circul, als der Durchschnitt einer Welle ist, beschrieben werde, wenn sie sich um ihre Axe beweget. Z. E. im mechanischen Verstande gehören die gewöhnlichen Winden FGHI mit unter die Räder an einer Axe, weil die Stange IH, die in der Bewegung der Welle um ihre Axe FG fortgestossen wird, einen Circul beschreibet (§. 11. Geom.).

Anmerkung.

14. Wenn es zu der Ausübung kommet, müssen die Räder auf verschiedene Art verfertiget werden, nachdem entweder

die

die Kraft ist, welche an sie appliciret wird, oder nachdem sie die Bewegung einem andern Theile mittheilen sollen.

Erklärung.

15. Wenn ein Rad anderswo eingreiffen soll, wird es mit Zähnen oder Kammen besetzet, entweder oben an der Stirne, oder nur zu der Seite unweit der Peripherie. In dem ersten Fall nennet man es ein Stirn-Rad oder Stern-Rad; in dem andern aber ein Kammrad. I. 5. 5. 4.

Erklärung.

16. Dasjenige Rad, welches beweget wird, indem ein anders mit seinen Kannen in dasselbe eingreiffet, wird das Getrieb genennet.

Erklärung.

17. Wenn es aus zwey Scheiben KL und MN zusammengesetzet wird, und anstatt der Kammen cylindrische Stöcke eingeschlagen werden, pfleget man es auch einen Trilling zu nennen. I. 4.

17a) Oft kann man auch die cylindrische Stöcke, die Triebstöcke oder Spindeln in den Wellbaum selbsten einlassen, welcher zu dem Ende an der dazu bestimmten Stelle ringsum eine Vertiefung, einen Hals bekommt.

Erklärung.

18. Ein Circul, oder eine Scheibe AB, die um ihren Mittelpunkt C beweget wird, wenn die Kraft in D das Gewicht E in die Höhe ziehet, wird eine Rolle oder Scheibe des Klobens (Trochlea) genennet. I. 6.

Erklärung.

19. Eine schiefliegende Fläche AC wird genennet, welche mit der Horizontallinie BC einen schiefen Winkel ACB machet. I. 7.

Erklärung.

I. 20. Wenn dergleichen Fläche um eine
8. Welle IK im Kreise herumgeführet wird, entstehet eine Schraube; die Welle aber, darum sie geführet wird, nennet man die Spindel.

Erklärung.

I. 21. Eine Schrauben-Mutter LM wird genen-
8. net, welche ihre Gänge inwendig in der Fläche einer ausgehöleten Welle hat.

Erklärung.

I. 22. Der Punkt C um welchen sich die Ma-
1. schine bewegen kann, wird der Ruhepunkt oder auch der Bewegungspunkt genennet.

Erklärung.

I. 23. Die Directionslinie (Linea directionis) ist ei-
1. ne gerade Linie, nach welcher die Kraft und die Last entweder wirklich beweget werden, oder sich bewegen würden, wenn nicht etwas die Bewegung hinderte. Z. E. Wenn das Gewichte O nach der Linie AO herunter fallen würde, wenn man es in A abschneiden sollte; so heisset die Linie AO seine Directionslinie. Wiederum, wenn eine Kraft in H nach der Kraft HB ziehet: so ist gleichfalls HB ihre Directionslinie.

Erklärung.

I. 24. Die Entfernung (nemlich von dem Ru-
1. hepunkt) ist eine Linie CD, welche aus dem Ruhepunkt C auf die Directionslinie BH perpendicular gezogen wird.

Zusatz.

25. Also haben die Kraft und die Last die größte Entfernung, wenn sie unter einem rechten Winkel an die Maschine appliciret werden. Denn wenn die Directions-

linie

linie BE mit der Maschine AB einen rechten Winkel machet: so ist die Entfernung CB. Machet sie aber einen schiefen Winkel CBH; so ist die Entfernung CD. Nun ist aber in dem rechtwinklichten Triangel CBD die Linie CB grösser als CD (§. 144. Geom.)

Erklärung.

26. **Wenn man sich in einem Körper einen Punkt so gedenkt, daß jede durch ihn gelegte lothrechte Ebene ihn in zwey einander das Gleichgewicht haltende Stücke theilt, so heist dieser Punkt** des Körpers Schwerpunkt oder Mittelpunkt der Schwere (centrum grauitatis), **und jede solche Ebene** die Schwerebene (Planum grauitatis). (2.)

Erklärung.

27. **Ein Punkt in einem Körper, der eine solche Lage hat, daß jede durch ihn gehende Ebene den Körper in zwey gleich große Stücke theilt, heist** der Mittelpunkt der Größe (Centrum magnitudinis.)

Erklärung.

28. **Die Horizontallinie ist diejenige, in welcher ein jeder Punkt von dem Mittelpunkte der Erde gleich weit weg ist.**

Zusatz.

29. Die Horizontallinie ist eigentlich ein Circulbogen, der aus dem Mittelpunkte der Erde beschrieben wird (§. 13. Geom.)

Zusatz.

30. Allein weil die Sehnen kleiner Bogen, sonderlich in grossen Circuln, mit dem Bogen beynahe übereinkommen, oder nicht merklich von ihnen unterschieden sind (§. 126. Geom.); so kann man die gerade Linie MP, welche die wahre Horizontallinie in dem gegebenen Orte C berühret, für die Horizontallinie annehmen. I. 9.

Erklärung.

I. 31. Die gerade Linie MP, welche die wah-
2. re Horizontallinie in einem gegebenen Punkte C berühret, wird die scheinbare Horizontallinie genennet.

Erklärung.

32. Die Schwere ist eine Kraft, durch welche der Körper gegen den Mittelpunkt der Erde getrieben wird.

Lehrsatz.

I. 33. Wenn ein Körper DE dergestalt auf-
10. gehänget wird, daß die Linie, nach welcher man ihn aufhänget, AB durch seiner Schwere Mittelpunkt gehet, oder er auch in dem Mittelpunkt der Schwere aufliget; so hänget oder lieget er stille.

Beweis.

Denn weil derselbe durch den Mittelpunkt der Schwere in zwey gleichwichtige Theile getheilet wird (§. 26.); so drucket auf der einen Seite der Theil E so viel darnieder, als auf der andern der Theil D. Und dannenhero ist keine Ursache, warum eher der Theil D, als der Theil E gehoben werden sollte. Derowegen kann keiner gehoben werden, und solchergestalt hanget oder lieget der Körper stille. W. Z. E.

Zusatz.

34. Was demnach den Mittelpunkt der Schwere unterstützet, das träget die Schwere des ganzen Körpers.

Zusatz.

35. Und darum kann man sich einbilden, als sey die ganze Schwere in dem einigen Mittelpunkte der Schwere bey einander.

Lehrsatz.

36. Wenn ein Körper durchaus aus einerley Materie bestehet, und einerley Breite und

Dicke

Dicke behält; so kommt der Mittelpunkt der Schwere mit dem Mittelpunkte der Grösse überein.

Beweis.

Denn in diesem Falle ist keine Ursache, warum Theile gleicher Grösse nicht gleichwichtig seyn sollten, und daher sind sie gleichwichtig. Da nun der Körper durch den Mittelpunkt der Größe in zwey gleich große (§. 27.), durch den Mittelpunkt der Schwere aber in zwey gleichwichtige Theile (§. 26.) getheilet wird: so muß der Mittelpunkt der Schwere mit dem Mittelpunkte der Grösse übereinkommen. W. Z. E.

Aufgabe.

37. Den Mittelpunkt der Schwere in einem jeden Körper zu finden.

Auflösung.

1. Schiebet den Körper HI auf einer ausgespannten Seite, oder einem scharfschneidigen dreyeckigten Prismate FG so lange hin und wieder, bis er darauf stille liegen bleibet; so ist in der Linie LK, wo er aufliget, der Mittelpunkt der Schwere (§. 34.). I. II.

2. Wenn ihr ihn nun auf eben dieses Seil oder Prisma gleichergestalt nach einer andern Linie MN aufleget; so ist abermals in derselben der Mittelpunkt der Schwere (§. 34.), folgends in O, wo die beyden Linien einander durchschneiden.

Unterweilen könnet ihr den Mittelpunkt der Schwere finden, wenn ihr den Körper auf einem spitzigen Stifte hin und wieder verschiebet, z. E. einen Teller auf der Spitze einer Gabel.

37 a) Hierher gehöriger Kalkul ergiebt sich unten (§. 48 dd.)

Lehrsatz.

38. Wenn die Directionslinie innerhalb den Grund fället, darauf der Körper ruhet; so muß er stille liegen und kann nicht fallen. Sobald sie aber ausserhalb diesen Grund verrücket wird, muß er gegen die Seite fallen, wo die Directionslinie von dem Grunde ausweichet.

Beweis.

Die Directionslinie ist eine gerade Linie, nach welcher sich der Körper in einem gegebenen Falle entweder würklich beweget, oder bewegen würde, wenn nichts seine Bewegung hinderte (§. 23.). Fället nun diese innerhalb den Grund des Körpers, darauf er ruhet; so kann der Körper sich nach dieser Linie nicht bewegen. Daher muß er stille liegen oder stehen. Welches das erste war.

Hingegen wenn die Direcionslinie ausserhalb den Grund des Körpers fället, so hindert nichts, daß er sich nicht nach derselben bewegen könnte. Und dannenhero muß er fallen. Welches das andere war.

Zusatz.

39. Je breiter der Grund ist, darauf der Körper ruhet, je mit grösserer Mühe kann er umgeworfen werden: denn die Directionslinie muß durch einen großen Raum beweget werden, ehe sie ausserhalb dem Grund verrücket wird.

Lehrsatz.

I. 9. 40. Die gerade Linie MP, welche den Circul in C berühret, machet mit dem Radio CL einen rechten Winkel in dem Berührungs-Punkte C.

Beweis.

Wenn die Linie CL auf MP nicht perpendicular stehet; so kann man aus L eine andere Perpendicular-

linie

linie auf MP ziehen (§. 69. Geom.) Es sey dieselbe LP. Weil nun P ein rechter Winkel ist; so muß LC grösser als LP seyn (§. 144. Geom.). Es ist aber LC = LN (§. 27. Geom.). Folgends ist LN grösser als LP. Da nun dieses ungereimt ist; so muß bey C ein rechter Winkel seyn. W. Z. E.

Lehrsatz.

41. Die Directionslinie der schweren Körper stehet auf der scheinbaren Horizontallinie perpendicular.

Beweis.

Die schweren Körper fallen, vermöge ihrer Schwere nach dem Mittelpunkt der Erde (§. 32.), und also kommet ihre Directionslinie mit dem Radio der Erdkugel CL überein (§. 23. Mech. & §. 13. Geom.) Die scheinbare Horizontallinie MP berühret die Peripherie der Erde in C (§. 31.) Derowegen machet die Directionslinie der schweren Körper mit der scheinbaren Horizontallinie einen rechten Winkel (§. 40.) und stehet demnach auf derselben perpendicular (§. 18. Geom.) W. Z. E. I. 9.

Zusatz

42. Weil die Schwere des ganzen Körpers in dem Mittelpunkte der Schwere bey einander ist (§. 35.); so muß die Directionslinie der schweren Körper aus dem Mittelpunkte der Schwere auf die scheinbare Horizontallinie perpendicular gezogen werden.

Aufgabe.

43. Ob ein schwerer Körper in einer gegebenen Lage vor dem Falle sicher sey, oder nicht, zu finden.

Auflösung.

1. Suchet den Mittelpunkt der Schwere (§. 37.).
2. Fället aus ihm auf die scheinbare Horizontallinie ein Perpendicul (§. 69. Geom.)

Wenn

Wenn es innerhalb dem Grund des Körpers fället, so ist er vor dem Falle sicher; fället es aber ausserhalb seinem Grund, so muß er auf die Seite fallen. W. Z. E.

Beweis.

Weil der Perpendicul aus dem Mittelpunkte der Schwere auf die scheinbare Horizontallinie gezogen worden; so ist er die Directionslinie des Körpers (§. 42.) Wenn aber diese innerhalb dem Grund des Körpers fället, so ist er vor dem Falle sicher: fället sie aber ausserhalb dem Grund, so muß er auf dieselbe Seite fallen (§. 38.). W. Z. E.

Anmerkung.

44. Durch diese Aufgabe kann man die Ursache aller möglichen Posituren finden, und den Gang der Menschen und Thiere erklären, wie Borellus in seinem Werke de motu animalium part. 1. prop. 145. & seqq. gethan.

Erklärung.

44 a) Wenn Kraft und Last am Hebel auf verschiedenen Seiten der Unterlage angebracht sind, so heist er ein **Hebel der ersten Art**, oder ein **zweyseitiger** Hebel (vectis heterodromus); liegen aber Kraft und Last auf einerley Seite der Unterlage, so ist er ein **Hebel der andern Art**, oder **ein einseitiger** (homodromus.)

Lehrsatz.

H. 12. 45. Wenn an den beyden Enden A und C eines Hebels ABC zwey Gewichte G und F angehänget werden, die sich gegen einander verhalten wie die Entfernung des kleinen F zu der Entfernung des grossen G; so müssen sie einander die Wage halten, und keines kann das andere bewegen.

Beweis.

Es sey zum Exempel F 1 Pf. und G 3 Pf. Es seyn ferner die Directionslinien der beyden Gewichte CF und AG in C und A auf AC perpendicular: so ist BC

die

die Entfernung des Gewichtes F und AB die Entfernung des Gewichtes G (§. 24.), folgends nach unserer Bedingung AB : CB = 1 : 3.

Weil die Schwere der Körper unverändert bleibet, wenn gleich ihre Figur verändert wird; so bilde man sich ein, daß beyde Gewichte in Cylinder von gleicher Dicke verwandelt werden, und zwar dergestalt, daß ein halbpfündiges Stücke die Länge der kleinen Entfernung AB bekommne: so hält der Cylinder IK, in welchen das kleine Gewichte F verwandelt worden, 2; der andere aber HI, der aus dem großen G entstanden, 6 solcher Theile, als AB ist. Wenn ihr euch demnach ferner einbildet, daß die Linie BC in D verlängert wird, bis CD = AB, und hingegen AB in E, bis AE = BC; so ist die Linie ED der Länge des ganzen Cylinders HK gleich. Es ist aber die Linie ED in dem Punkte B in zwey gleiche Theile getheilet, weil von B bis E, 4; von B bis D auch 4 solcher Theile sind, als AB ist. Da nun der Cylinder HK seinen Mittelpunkt der Schwere in dem Mittelpunkte der Grösse hat (§. 36.); so gehet die Linie BM, nach welcher er aufgehänget wird, durch den Mittelpunkte seiner Schwere, folgends hänget er stille (§. 33.); und kann demnach keiner von den beyden Cylindern HI und IK, folgends auch keines von den gleichgültigen Gewichten G und F das andere überwiegen. W. Z. E.

Anmerkung.

46. Der vorstehende Lehrsatz enthält das Fundamentalgesetz der Statik, und ist für die gesammte Statik und Mechanik eben das, was die Lehre von den Parallellinien für die Geometrie ist. Er hat also wohl einen strengern mathematischen Beweis verdient, als der im vor. §. vorgetragene Archimedsche ist, dem es durchaus an der erforderlichen Allgemeinheit fehlt. Die folgenden Sätze, wobey ich Hrn. Hofr. Kästners Methode folge, beweisen die Wahrheit dieses äußerst wichtigen Satzes in der größten Allgemeinheit und in völliger Schärfe.

Lehr-

Lehrsatz.

III. 1. 47. **Wenn an einem zweyseitigen Hebel BCA das Gewicht O dem Gewicht P gleich ist, ingleichem die Punkte A, B gleich weit von dem Ruhepunkt abstehen, so bleiben Kraft und Last am Hebel in Ruhe, und keines kann das andere bewegen.**

Beweis.

Aus eben dem Grund, woraus der Hebel auf die rechte Seite sinken sollte, müßte er auch, weil auf beyden Seiten des Ruhepunkts alles einerley ist, auf die linke Seite sinken; da nun beydes zugleich nicht geschehen kann, so kann gar keine Bewegung erfolgen. (1.)

Zusatz.

47 a) Weil nun der Punkt B mit einer Kraft = P niedergezogen und dennoch nicht bewegt wird, so folgt, daß das an A befindliche Gewicht O den Punkt B des Hebels eben so stark aufwärts treibe, als ihn das Gewicht P an B niederwärts zieht.

Zusatz.

47 b) An dem angenommenen Hebel, wo auf beyden Seiten alles einerley ist, ruht auf der Unterlage ein Gewicht = O + P, d. i. = 2P. Wenn man also in C statt der Unterlage eine Kraft = 2P aufwärts ziehen läßt (z. B. III. 2. mittelst eines über eine Rolle geführten Fadens), so ist diese Kraft mit den beyden Gewichten O und P im Gleichgewicht, und der Hebel bleibt wie bey der Unterlage, in Ruhe.

Ueberhaupt bleibt dieser Hebel allemal in Ruhe, wenn man statt der Unterlage eine Kraft, die dem Druck auf die Unterlage gleich ist, nach einer dem Druck entgegengesetzten Richtung anbringt.

Zusatz.

III. 2. 47 c) Man kann also statt des Gewichts O bey A wieder eine Unterlage anbringen (die allemal in gehöriger Lage entweder über oder unter der Linie AB gedacht werden muß,) die nunmehr den aufwärts gehenden Druck der Stelle A, welcher zuvor durch das Gewicht O vernichtet würde, auszuhalten,

halten hat, und die Bewegung eben so verhindert, wie vorher das Gewicht O.

Zusatz.

47 d) Also ist bey dem auf solche Art entstandenen Hebel, wo CA = CB, sodann der Ruhe- oder Umdrehungspunkt bey A angebracht ist, bey B aber ein Gewicht P niederwärts, und bey C ein Gewicht = 2 P aufwärts zieht, alles im Gleichgewicht und der ganze Hebel in Ruhe. Da nun dieses ein einseitiger Hebel ist, so ersieht man, **daß am einseitigen Hebel die einfache Kraft P in der doppelten Entfernung AB = 2 . AC angebracht, mit der doppelten Kraft 2 . P in der einfachen Entfernung vom Ruhepunkt AC angebracht im Gleichgewicht steht.** III. 2.

Zusatz.

47 c) Nun bleibe der feste Ruhepunkt in A, das Gewicht = 2 P aber nehme man von C (Fig. 2.) weg und hänge es in D (Fig. 3.) auf, so daß DA = AC ist, so wird durch dieses in D aufgehängte Gewicht der Punkt C völlig wie zuvor (Fig. 2.) aufwärts gedruckt; es bleibt also alles wie zuvor in Ruhe. Es ist aber Fig. 3. ein zweyseitiger Hebel; **folglich gilt der Satz am Ende §. 47 d) auch vom zweyseitigen Hebel.** III. 3.

Zusatz.

47 f) Wenn man nun mit Fig. 3. Tab. III. eben so umgeht, wie mit Fig. 1., so daß man aus Fig. 3. wieder einen einseitigen Hebel erhält, und die dortigen Schlüsse auf gleiche Art anwendet, so erhält man den Satz, **daß am einseitigen Hebel die einfache Kraft in der dreyfachen Entfernung vom Ruhepunkt mit der dreyfachen Kraft in der einfachen Entfernung im Gleichgewicht stehe.**

Zusatz.

47 g) Und nun gilt dieser Satz vermög der Schlüsse (§. 47 e) auch vom **zweyseitigen Hebel.**

Zusatz.

47 h) Und da sich diese Schlüsse immer so fortsetzen lassen, so folgt: **Wenn die Entfernungen vom Ruhepunkt beyder**

Kräf-

Kräften am Hebel jeder Art durch einander dividirt, eine ganze Zahl geben, so ist am Hebel allemal, dafern sich die Kraft zur Last wie die Entfernung der Last vom Ruhepunkt zur Entfernung der Kraft vom Ruhepunkt verhält, alles im Gleichgewicht oder in Ruhe.

Zusatz.

47i) Wenn man also die eine Seite des Hebels in so viel gleiche Theile, als man will, theilt, und an dem ersten Theilungspunkt, der so nahe man will, am Ruhepunkt liegt, ein Gewicht hängt, so druckt solches mit jedem Gewicht an jedem Theilungspunkt den Hebel gleich stark nieder, dafern sich nur die angehängten Gewichte oder die angebrachten Kräfte allemahl verkehrt wie ihre Entfernungen vom Ruhepunkt verhalten, z. B. gleich stark mit $\frac{1}{7}$ des Gewichts in der 7fachen Entfernung, mit $\frac{1}{7}$ des Gewichts in der 7fachen Entfernung, u. s. w. folglich drucken auch $\frac{1}{7}$ des Gewichts in der 7fachen Entfernung, $\frac{1}{7}$ des Gewichts in der 5fachen Entfernung, $\frac{1}{11}$ des Gewichts in der 11fachen Entfernung vom Ruhepunkt u. s. w. den Hebel gleich stark niederwärts. So ist also das Fundamentalgesetz §. 45. in völliger Schärfe erwiesen.

Erklärung.

48. **Wenn man eine Kraft am Hebel mit ihrer Entfernung vom Ruhepunkt multiplicirt, so heißt das Produkt das statische Moment der Kraft.** (l.)

48a) Also sind Kräfte am Hebel im Gleichgewicht, wenn ihre statistischen Momente gleich groß sind.

48b) Sind also die statischen Momente entgegengesetzter Kräfte nicht gleich groß, so findet kein Gleichgewicht statt, es erfolgt wirkliche Bewegung.

48c) Wenn in jedes Element einer Masse einerley absolute Kraft wirkt, und keine Kraft entgegenwirkt, so muß Bewegung erfolgen, und die Masse muß offenbar einerley Geschwindigkeit annehmen, sie mag aus vielen oder aus wenigen Elementen bestehen, denn in jedes Element wirkt die nämliche Kraft, es kann also keines das andere beschleunigen oder dem andern vorzueilen streben.

48d) Man setze, eine Masse bestehe aus n Elementen, aber nur n — m Elemente würden von der absoluten

Kraft

Kraft f angegriffen, so ist die Summe aller Druckungen der ganzen Masse nur (n — m) . f. Nothwendig werden nun vermög des Zusammenhangs, alle Theile der ganzen Masse nach der Richtung hingezogen oder hingedruckt, und der Erfolg ist völlig eben so, als wenn in jedes Element der Masse nur die Kraft $\frac{n - m}{n} . f$ wirkte; der hieraus entstehende Druck wäre nämlich gleichfalls

$$= n . \left(\frac{n - m}{n}\right) . f = (n - m) . f$$

48 e) Ist also eine Masse A mit einer andern B so verbunden, daß die B, sobald A in Bewegung kommt, mit eben der Geschwindigkeit nachfolgen muß, mit welcher sich die A bewegt; und greift nun die Kraft f blos die Elemente der Masse A unmittelbar an, die aus α Elementen besteht, indeß die B aus β Elementen zusammengesetzt ist, so ist der ganze Druck, den hier die Kraft ausübt, $= \alpha . f$ die ganze Gewalt, mit welcher die veveinte Masse A + B von der Kraft f angegriffen, uud ihre Stelle zu verlassen genöthiget wird, ist also $= \alpha . f$ und vermög des Zusammenhangs beyder Massen, ist es grade eben so gut, als ob eine Kraft

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta} . f$$

jedes Element der gesammten Masse A + B unmittelbar angriffe, denn hieraus ergiebt sich die Gewalt

$$(\alpha + \beta) . \frac{\alpha}{\alpha + \beta} . f = a . f$$

Die Masse B wird, wegen des Zusammenhangs mit der A wirklich mit einer Gewalt angetrieben, welche $= \beta . f$ ist, weil die Gewalt $\alpha . f$ genöthigt ist, sich auf $\alpha + \beta$ Elemente auszubreiten, und es ist völlig einerley, ob nur ein einziges Element mit der Kraft αf unmittelbar angegriffen, und die übrigen $\alpha + \beta - 1$ Elemente jetzt nur vermög ihres Zusammenhangs mit angrtrieben würden, ihre Stelle zu verlassen, oder ob jedes einzele Element der vereinigten Masse A + B von der Kraft $\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$ unmittelbar angegriffen

griffen würde, Jedes Element leidet nämlich auch im ersten Fall eben diesen Angriff.

48f) Man kann an dem Schlußsatz 48e) gar nicht zweifeln, wenn man erwägt, daß die Materie blos als Materie betrachtet, kein Bestreben hat, sich nach einer bestimmten Richtung zu bewegen, sondern dieses Bestreben erst durch den Angriff einer absoluten Kraft erhält. Indem nun die Masse B vermög ihres Zusammenhangs mit A gleichfalls von der Kraft mittelbar angegriffen wird, erhalten alle seine Elemente das nämliche Bestreben, ihre Stelle zu verändern, wie die Elementen der Masse A.

48g) **Masse** thut hier überhaupt nichts zur Ausübung der Kraft, oder ist vielmehr **für sich** gar keiner Kraft fähig, sondern gleichsam nur das Vehikel für Kräfte. Ist einmal die ganze Kraft αf bestimmt, oder die Summe von Elementarkräften, welche vereint wirken, so kann solche durch bloses Zuthun von Masse (ohne neuen Zusatz von Kraft) gar nicht abgeändert werden. Ein einziges Element, in welches die Kraft αf wirkte, würde die nämliche Gewalt ausüben, wie die $\alpha + \beta$ Elementen, in welche zusammen eben die Kraft αf wirkt.

48h) Wenn eine Masse A ist, die aus α Elementen besteht, von einer absoluten Kraft f, die alle ihre Elemente angreift, getrieben wird, so daß kein Widerstand die Bewegung hemmt, so muß A in Bewegung kommen, und die Geschwindigkeit wird in jedem Augenblick, weil f immer neue Stöße giebt, gleichviel vergrößert. Die Geschwindigkeit, welche die Masse nach einer gewissen Zeit t erlangt hat, ist der Zeit t proportional, und ist zugleich die Verhältnißzahl der Gewalt von A. Diese Gewalt läßt sich daher durch $\alpha f.t.$ ausdrucken.

Auf die Anzahl von Elementen, welche überhaupt sich bewegen, kann hierbey (wie vor. §.) gar nichts ankommen, weil diese für sich keine Kraft ausüben können, sondern nur auf die Anzahl derjenigen Elementen, in welche die absolute Kraft wirkt.

Wenn also eine andere Masse B, deren Elementezahl β wäre, mit der A verbunden würde, ohne daß in diese β Elemente eine besondere Kraft wirkte, daß also die Masse B der A nur vermög des Zusammenhangs folgen müßte, so könnte die absolute Kraft f auch jetzt nach der Zeit t keine andere

dere Gewalt, als die $\alpha f . t$ ausüben. Ist die Verbindung der A mit der B so, daß sich B eben so geschwind bewegen muß, wie die A, so wäre die Gewalt der vereinigten Masse

$$(\alpha + \beta) . \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} . f\right) . t = \alpha f . t$$

wie vorhin.

48 i) Wenn eine Masse A mit einer andern B so in Verbindung steht, daß sie von der Kraft f in der Zeit t durch einen bestimmten Raum getrieben wird, und die Masse B in eben der Zeit durch eben den Raum v, nun aber diese Verbindung so geändert werden soll, daß die Masse, welche mit der A verbunden ist, in der Zeit t den Raum $\delta . v$ durchlaufen soll, indeß die A den Raum v durchläuft, so läßt sich fragen: wie muß B abgeändert werden? Die Bewegung von A soll in beyden Fällen die nämliche bleiben.

Weil die Bewegung von A die nämliche bleiben soll, so bleibt auch ihre Gewalt die nämliche, und weil die Kraft im Ganzen ungeändert bleibt, so muß auch die Gewalt der damit verbundenen Masse ungeändert bleiben. Ich will setzen, statt der Masse B müsse nun die P subſtituirt werden. Die Masse B erschöpfte einen Theil von αf, im bisherigen Sinn genommen, d. i. sie wirkte der αf gleichsam als eine Kraft $\frac{1}{m} \alpha f$, entgegen und vernichtete solche in der Masse A. Die Masse P muß also einen Theil erschöpfen, welcher

$$= \delta . \frac{P}{B} . \frac{1}{m} . \alpha f. \text{ ist.}$$

Es muß ferner

$$1 . \left(\frac{1}{m} \alpha f\right) = \delta . \left(\delta . \frac{P}{B} . \frac{1}{m} \alpha f\right)$$

das ist:

$$1 = \frac{\delta^2 . P}{B} \quad \text{also} \quad 1 . B = \delta^2 P$$

seyn, weil die Gewalt ungeändert bleiben muß. Soll also eine Masse B, deren Geschwindigkeit $= 1$ ist, mit einer andern P, deren Geschwindigkeit $= \delta$ ist, verwechselt werden,

und die A, welche mit der B verbunden war, von der in sie wirkenden absoluten Kraft in dem einen Fall völlig so wie in dem andern getrieben werden, so muß $1 . B = \delta^2 . P$ seyn, d. i. so müssen die Produkte aus den mit A verbundenen Massen in die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten gleich groß seyn. Uebrigens müssen die statischen Momente ungeändert bleiben.

48k) Die Eigenschaft der Materie blos dem Eindruck einer äuseren Kraft zu folgen, also solchen unter ihre Elemente zu vertheilen und eben darum, wenn mehr Elemente mit einander verbunden sind, als von der Kraft unmittelbar angegriffen werden, die Wirkung dieser absoluten Kraft auf die **einzelen Elemente** zu schwächen, heist die **Trägheit** der Materie, der Masse, oder der Körper *); und weil bey ungeänderten statischen Momenten **Massen** in Rücksicht auf Umdrehung für einander substituirt werden können, wenn das Produkt aus dem Quadrat der Geschwindigkeit in die Massen gleich groß bleibt, so heist dieses Produkt das **Moment der Trägheit.**

Weil sich bey der Umdrehung verschiedener Massen um eine gemeinschaftliche Axe die Geschwindigkeiten der einzelen Massen wie ihre Entfernung von der Umdrehungsaxe verhalten, so kann man statt der Geschwindigkeiten auch diese Entfernungen gebrauchen, also unter dem **Moment der Trägheit das Produkt aus der Masse in das Quadrat ihrer Entfernung von der Umdrehungsaxe** verstehen. In der Hydraulik gilt eigentlich die erste Bedeutung (Hydraul. §. 10 g).

48l) Massen sind also am Hebel, bey ungeänderter Differenz der statischen Momente, in Rücksicht auf Bewegung äquivalent, wenn ihre Momente der Trägheit gleich groß sind.

Dieses Fundamentalgesetz ist das für die aus der Uebermucht entstehende Bewegung, was das Fundamentalgesetz (§. 48 a) für das Gleichgewicht ist.

48m)

*) Kraft der Trägheit ist ein sehr unrichtiger Ausdruck, denn der Ausdruck: **die Materie ist träg**, heist mit andern Worten: **Die Materie hat für sich gar keine Kraft, wird blos durch äusere Kräfte bestimmt.**

48 m) Wird ein ruhiges Element von irgend einer Kraft nach einer gewissen Richtung seine Stelle zu verlassen bestimmt, so muß es, weil es für sich ohne alle Kraft ist, augenblicklich diesem Eindruck folgen. Trift dieses jetzt von der erwähnten Kraft belebte Element ein anderes unbelebtes blos träges Element auf seinem Wege, so kann dieses andere dem erstern gar keinen Widerstand entgegensetzen, sondern es ist augenblicklich bereit, der Kraft zu folgen, die jenes Element schon treibt. Weil aber weiter keine Kraft hier vorhanden ist, als die, welche das erste Element treibt, so kann auch weiter keine Wirkung erfolgen, als von eben dieser Kraft. Die Gewalt ist blos das Produkt aus der Kraft in die Geschwindigkeit, und da hier nur eine einzige dem ersten Element beygebrachte Kraft vorhanden ist, so kann sich im Augenblick der Berührung des 2ten Elements die Gewalt, deren die Kraft fähig ist, nicht ändern, weil das angestoßene 2te Element keine Kraft hat und keinen Widerstand entgegen setzen kann. Aber vom Augenblick des Anstoßes an hat die Kraft 2 Elemente zu treiben, und durch diese übt sie ihre ganze Gewalt aus, die nun durch das Produkt aus beyden Elementen in ihre Geschwindigkeit ausgedruckt wird; es müssen also beyde Elemente nach dem Stoß mit der Hälfte der Anstoßgeschwindigkeit fortgehen.

Und so fällt in die Augen, daß wenn eine aus n Elementen bestehende Masse an eine aus m Elementen bestehende mit der Geschwindigkeit C anstößt, hiernächst jede dieser Massen mit der Geschwindigkeit

$$c = \frac{n}{m + n} \cdot C$$

fortgehen müsse, weil die Kraft, ohne Widerstand zu finden, mit der Gewalt

$$n \cdot C = (m + n) \cdot \frac{n}{m + n} \cdot C$$

sich unverändert fortbewegen muß.

Also blos weil die Elementen der Materie alle gleiche Empfänglichkeit für die auf sie wirkende Kraft haben, und solche ohne einigen Widerstand nach Verhältniß ihrer Anzahl aufnehmen und ihrer Richtung folgen, theilt eine gewisse Gewalt einer grössern Masse weniger Geschwindigkeit mit, als einer kleineren. Und eben diese Eigenschaft der Materie

ist ihre **Trägheit**, ihr Mangel eigener, und vollkommene Empfänglichkeit für jede auf sie wirkende Kraft.

48 n) Man gedenke sich nun eine Masse M, die aus m Elementen besteht, und eine andere N, die aus n Elementen besteht; in die M soll eine Kraft μ, in die N eine ν wirken, so daß aus jener der Druck $m \cdot \mu$, aus dieser der Druck $n \cdot \nu$ entsteht; letzterer soll ersterem entgegengesetzt seyn, aber kleiner, daß also die Masse M ihre Stelle verlassen und sich wirklich bewegen muß. Wie wird sich jetzt die Bewegung verhalten?

Der Druck, welcher die Bewegung verursachen muß, ist $m\mu - n\nu$; dieses ist also die gesammte Kraft oder die Summe aller einzelen absoluten Kräfte, welche in die gesammte bewegte Masse $M + N$ oder in die gesammten Elementen $m + n$ wirken, und solche in Bewegung setzen soll. Auf jedes einzele Element kann also nur noch eine Kraft

$$\frac{m\mu - n\nu}{m + n}$$

wirken. Die Kraft unserer natürlichen Schwere, vermög welcher z. B. eine gewisse Masse einen Druck gegen den Mittelpunkt der Erde ausübt, welchen wir durch 1 Pfund ausdrücken, will ich γ nennen. Nun ist aus dem bisherigen klar, daß 2 : 3 : 4 fache Kraft bey einerley Masse das Bestreben ist 2 : 3 = 4 fache Geschwindigkeit hervorzubringen. Demnach kann, wenn unsere natürliche Schwere im ersten Augenblick der Bewegung einem Element die Geschwindigkeit c' mittheilt, die hier erwähnte Kraft nur die Geschwindigkeit

$$\frac{\left(\frac{m\mu - n\nu}{m + n}\right)}{\gamma} \cdot c'$$

bewirken; oder wenn ich $\gamma = 1$ setze, und hiernach μ und ν ausdrucke, die Geschwindigkeit

$$\frac{m\mu - n\nu}{m + n} \cdot c'$$

die absoluten Kräfte geben der bewegten Masse in jedem Augenblick einen neuen gleich großen Stoß, also gleich große Ver-

Vergrößerung der Geschwindigkeit. Demnach ist nach Verfluß der Zeit t die Geschwindigkeit

$$= \frac{m\mu - n\nu}{m + n} \cdot t \cdot c' \text{ (*)}$$

480) Sind die Massen M, N so verbunden, daß sie sich um eine gemeinschaftliche Axe drehen müssen, und ist der M Entfernung von der Axe = m, der N Entfernung = n, so ist die Kraft, welche Bewegung veranlaßt, die **bewegende Kraft,**

$$= m\mu - \frac{n}{m} \cdot n\nu,$$

und die Masse N in der Entfernung n wirkt in Rücksicht auf die Bewegung völlig so, als wenn in der Entfernung m statt der N die Masse $\frac{n^2}{m^2} \cdot N$ angebracht wäre (§. 481); man hat also, weil nun alles auf gleiche Entfernungen gebracht ist, die Geschwindigkeit der Massen nach der Zeit t

$$= \frac{m\mu - \frac{n}{m} \cdot n\nu}{m + \frac{n^2}{m^2} \cdot n} \cdot t \cdot c' = \frac{mm\mu - nn\nu}{mm + \frac{n^2 n}{m}} \cdot t \cdot c'$$

48p) Es kommt nun darauf an, t . c' für irgend einen Werth von t zu bestimmen.

Wenn ein Element von unserer natürlichen Schwere getrieben wird, so erhält es in jedem Augenblick einen neuen

*) Wenn nämlich c' die Anzahl von Fusen bedeutet, welche in einer Sekunde durchloffen wird, so ist t eine gewisse Anzahl von Sekunden, nach deren Verfluß die bewegte Masse eine Geschwindigkeit hat, mit der sie in 1 Sekunde den Raum

$$\frac{m\mu - n\nu}{m + n} \cdot t \cdot c'$$

durchlaufen könnte, welches nun ihre Geschwindigkeit genennt wird.

gleich großen Stoß, also einen gleich großen Zuwachs von Geschwindigkeit.

Ich will nun die einzelen Zeittheilchen von o nach p auf der Linie o p abschneiden, und den jedesmaligen Raum, welchen das Element in jedem unendlich kleinen Zeittheilchen, vermög des neuen Stoßes der Schwerkraft durchläuft, durch eine Ordinate auf o p ausdrucken.

Ist z. B. die Zeit o δ verflossen, so sey δ ε der Raum, den das Element in dem jetzt folgenden unendlich kleinen Zeittheilchen durchläuft. Ist die Zeit o ζ verflossen, so hat das Element eine Anzahl von Stößen erhalten, die sich zu der schon in δ erhaltenen, wie o ζ zu o δ verhält; aber die Geschwindigkeit ist dieser Anzahl von Stößen proportional, also verhält sich der Raum, den das Element nach Verfluß der Zeit o ζ im nächstfolgenden unendlich kleinen Zeittheilchen durchläuft, zu δ ε wie o ζ zu o δ d. i. wenn dieser Raum durch ζ η ausgedruckt wird, so liegt η in der durch o ε verlängerten grad en Linie.

Läßt man also o p für eine Sekunde gelten, und zieht p q so, daß q in der durch o ε gezogenen graden Linie o q liegt, so bezeichnet jede von o p bis o q gezogene Ordinate Φ Ψ den Raum, welchen das Element nach Verfluß der Zeit o Φ in einem unendlich kleinen Zeittheilchen durchläuft.

Der Raum S, welchen das Element während der Zeit o Φ durchläuft, verhält sich demnach zu dem Raum f, welchen es in der Zeit o p durchläuft, wie die Summe aller Ordinaten, welche sich auf o p nehmen lassen, d. i. wie die Fläche o Φ Ψ zu der o p q, oder wie $o\Phi^2$ zu op^2, also $S : f = o\Phi^2 : op^2$.

Setzt man also o Φ überhaupt in Sekunden = t, und den in der Zeit t durchloffenen Raum = S, so hat man allgemein

$$S = \frac{t^2 \cdot f}{op^2}$$

Nun hat die Erfahrung gelehrt, daß für o p = 1 Sek. f = 15,625. Rhl. Fus oder = 15,09 Par. F. ist; man hat also nach Par. Maas:

$$\text{I.)}\quad S = t^2 \cdot 15{,}09 \text{ in Par. Fusen.}$$

Weil aber jede Ordinate des Dreyecks zugleich die Geschwindigkeit c' des Elements am Ende der durch die Abscisse ausgedruckt

gedruckten Zeit anzeigt, und die Fläche eines jeden Stücks $o\Phi\psi$ den in der Zeit $o\Phi$ durchloffenen Raum ausdruckt, so hat man auch

$$\text{II.)}\quad S = \frac{o\Phi \cdot \Phi\psi}{2} = \tfrac{1}{2}\, t\, c'.$$

Man hat also:

$$t^2 \cdot 15{,}09 = \tfrac{1}{2}\, t \cdot c',$$

und das giebt

$$\text{III.)}\quad c' = 2t \cdot 15{,}09 \text{ Par. Fus.}$$

Man ist übereingekommen, wenigstens unter teutschen Mathematikern, statt des in der ersten Sekunde des freyen Falls durchloffenen Raums allgemein g zu setzen, so hat man

$$c' = 2\, g\, t$$

Die Französischen Schriftsteller bezeichnen gewöhnlich die am Ende der ersten Sekunde des freyen Falls entstandene Geschwindigkeit mit g.

48 q) Für unsere natürliche frey wirkende Schwere hat man also, $t = 1$ Sek. gesetzt, $t \cdot c' = 2g$ (§. 48°.)

Wenn also die Geschwindigkeit der aus m Elementen zusammengesetzten Masse (§. 48°) C heist, so hat man am Ende der ersten Sekunde der Bewegung

$$C = \frac{m\,m\,\mu - n\,n\,\nu}{m\,m + \frac{n^2\,n}{m}} \cdot 2\,g$$

und am Ende von t Sekunden

$$C = \frac{m\,m\,\mu - n\,n\,\nu}{m\,m + \frac{n^2\,n}{m}} \cdot 2\,g\,t$$

wo dann μ, ν absolute Kräfte sind, welche in die Elementen m, n, so wie sonst unsere Schwere wirken, so ausgedruckt, daß unsere Schwerkraft dabey $= 1$ gesetzt wird, daß also μ, ν eigentlich nur Verhältnißzahlen in Rücksicht auf unsere Schwerkraft sind, wie die trigonometrische Linien Verhältnißzahlen in Rücksicht auf den $= 1$ angenommenen Halbmesser sind.

48r) Die Anzahl der Elementen, wie m, n, lassen sich nicht angeben; aber dieses ist auch nicht nöthig, weil es hier nur drauf ankommt, die Verhältniß dieser Zahlen gegen einander zu kennen, und hierzu haben wir ein leichtes Mittel in Händen: die Beobachtung der verhältnißmäßigen Stärke des Drucks, welche unsere Schwere durch ihre Wirkung auf jedes Element hervorbringt, und die also der Anzahl von Elementen proportional ist. Man ist z. B. übereingekommen, einen gewissen Druck durch ein **Loth** zu bezeichnen, einen 32 mal so großen Druck durch ein **Pfund** u. s. w. So hat man also für den Druck, welcher die Einwirkung unserer Schwere in eine an sich bestimmte aber uns unbekannte Anzahl von Elementen verursacht, eine Benennung zur Bezeichnung seiner verhältnißmäßigen Stärke festgesetzt und verhältnißmäßig schwächere oder stärkere Druckungen der Schwere wieder mit andern Namen belegt, z. B. Gran, Quint; Zentner. Der durch solche Benennungen bestimmte verhältnißmäßige Druck, den eine Masse durch die Wirkung der Schwerkraft in die Summe ihrer Elemente leidet, heist das **Gewicht** dieser Masse, und dieses ist also der Menge von Elementen, aus welchen die Masse besteht, proportional. Man kann also statt der Elementenzahlen m, n, die Zahlen M, N gebrauchen, welche die Gewichte der von den Kräften μ, ν angegriffenen Massen ausdrücken, und so erhält man (§. 48. q)

$$C = \frac{m \cdot M \cdot \mu - n \cdot N \cdot \nu}{m \cdot M + \frac{n^2 \cdot N}{m}} \cdot 2gt$$

48s) Die Bewegung der einzelen Massen hängt von der Größe der Totalkräfte $\mu \cdot M$; $\nu \cdot N$ ab, daher diese Produkte aus den Partial-Kräften oder absoluten Kräften μ, ν in die Massen M, N sehe passend **bewegende Kräfte** genennt werden. Sind μ, ν unserer natürlichen Schwerkraft gleich, also $= 1$, so sind die **bewegenden Kräfte** mit den **Gewichten** der Massen einerley.

$m \cdot M \cdot \mu$, $n \cdot N \cdot \nu$ sind **Momente** der bewegenden Kräfte.

48t) Dividirt man (§. 48r) Zähler und Nenner mit m, und setzt dann

$M \cdot \mu$

$$\frac{M \cdot \mu - \frac{n}{m} \cdot N \cdot \nu}{M + \frac{n^2}{m^2} \cdot N} \cdot g = f.$$

so erhält man

$$C = 2 f t.$$

Hier sind

$$M \cdot \mu, \frac{n}{m} \cdot N \cdot \nu$$

bewegende Kräfte auf gleiche Entfernung von der Umdrehungsaxe reducirt; und im Nenner

$$M, \frac{n^2}{m^2} N$$ eben so reducirte Massen.

48u) Aus (§. 48p no. II.) ist allgemein der in der Zeit t durchloffene Raum:

$S = \frac{1}{2} t c'$ oder hier $= \frac{1}{2} t . C$, also, der Werth von C substituirt,

$S = \frac{1}{2} t . 2 ft = t^2 f$, und, für $t = 1$ Sek. $S = f$.

Oder f ist allemal der in der ersten Sekunde der Bewegung durchloffene Raum der Masse M.

Daher ist f das **Maas der Beschleunigung**, bey Massen, die von absoluten Kräften getrieben werden. Man hat aber den der Sache selbst vielleicht angemessensten Ausdruck nicht eingeführt, sondern nennt diese Größe f schlechtweg die **Beschleunigung**. Es ist also die Beschleunigung der frey wirkenden natürlichen Schwere = 15,09 Par. Fus; und die Schwere selbst ist beym freyen Fall schwerer Körper die **beschleunigende Kraft**.

48v) Aus (§. 48t) ist

$$f : g = \frac{M\mu - \frac{n}{m} \cdot N\nu}{M + \frac{n^2}{m^2} N} : 1$$

wo 1 die beschleunigende Kraft der natürlichen Schwere ist, welcher die Beschleunigung g zugehört; eben so ist demnach

$$\frac{M\mu - \frac{n}{m} . N\nu}{M + \frac{n^2}{m^2} N}$$

die beschleunigende Kraft, welcher die Beschleunigung f zugehört.

Wenn also bewegende Kräfte einander entgegen wirken, und die bewegende Kräfte sowohl als die Massen auf einerley Entfernung von der Umdrehungsaxe oder auf einerley Geschwindigkeit gebracht werden, so erhält man die **beschleunigende Kraft**, welche die überwiegende Masse treibt, wenn man den Ueberschuß der größern **bewegenden Kraft** über die reducirte kleinere mit der Summe der Massen, welche sich nach der erwähnten Reduktion ergiebt, dividirt.

Dabey muß man sich allemal erinnern, daß man für die **Massen** ihre **Gewichte** gebrauchen darf.

48 w). Der Erfahrungssatz $g = 15{,}09$ Par. Fus, verbunden mit den Formeln

$$\text{I.)}\ f = \frac{M\mu - \frac{n}{m} . N\nu}{M + \frac{n^2}{m^2} N}\, g \text{ oder } = \frac{m . M\mu - n . N\nu}{m^2 M + n^2 N}\, g$$

$$\text{II.)}\ C = 2 f t; \qquad \text{III.)}\ S = t^2 f$$

löst alle über die beschleunigte Bewegung vorfallende Aufgaben auf. Die beyden letzten Formeln geben noch

$$\frac{C^2}{4 f^2} = t, \frac{S}{f} = t^2, \text{ also } \frac{C^2}{4 f^2} = \frac{S}{f}.$$

oder:

$$\text{IV.)}\ \frac{C^2}{4 f} = S, \text{ und nun } \text{V.)}\ C = 2\sqrt{f} . S$$

Ferner aus (II.)

$$t =$$

$$t = \frac{C}{2f} \text{ und (V.)} = \frac{2\sqrt{fS}}{2f},$$

$$\text{also VI.)} \quad t = \sqrt{\frac{S}{f}}$$

48 x) Zum Gebrauch der Formel (§. 48 w no. I.) sind noch einige Erinnerungen nöthig.

I. Die Ausdrücke $M\mu$, $N\nu$, bezeichnen eigentlich Summen von partialen Kräften, die auf eine gewisse Anzahl von Elementen angewendet, eine totale Kraft geben. Nun kann man in Fälle kommen, wo weder M noch μ (oder auch weder N noch ν) jedes für sich bekannt ist. So wirkt z. B. eine Sammlung eingeschlossener erhitzter Dämpfe eine gewisse absolute Kraft μ; das Gewicht M dieser Dämpfe ist äuserst unbeträchtlich, und dennoch ist die totale Kraft oder die bewegende Kraft $M \cdot \mu$ bey großer Erhitzung sehr beträchtlich; also muß μ gewiß eine große Zahl seyn. Es ist aber genug, die Größe des Produkts $M \cdot \mu$ zu kennen.

Sonst wirken die Massen M N zumal beym Maschinenwesen gewöhnlich nur vermög des Eindrucks der natürlichen Schwere gegen einander, so daß dabey gewöhnlich

$\mu = \nu = 1$ ist, und für solche Fälle wird dann

$$f = \frac{M - \frac{n}{m} N}{M + \frac{n^2}{m^2} N} \cdot g$$

Wäre z. B. an einer Welle, deren Gewicht auser Acht gelassen werden könnte, eine Rolle ohne merkliches Gewicht angebracht, und um jene wäre ein Faden ohne Schwere mit dem Gewicht M, um diese aber ein ähnlicher Faden mit dem daran hängenden Gewicht N gelegt, so daß der Welle Halbmesser $= m$ und der Rolle Halbmesser $= n$ wäre, so würde der Masse M Beschleunigung f durch die vorstehende Formel ausgedruckt, d. h. wenn $M = 100$ Pfund, $N = 4$ Pfd. $m = 2$ Linien, $n = 10$ Linien wäre, und die aus der Rauhigkeit aller auch glatt scheinenden Flächen entstehende Hinderniß, die **Reibung** oder **Friktion**, nicht in Betrach:

trachtung käme, so müßte die Masse M in der ersten Sekunde ihrer Bewegung den Weg

$$\frac{100 - \frac{10}{2} \cdot 4}{100 + \frac{100}{4} \cdot 4} \cdot 15{,}09 = 6{,}036 \text{ Par. Fus}$$

durchlaufen, wofern beyde Gewichte frey herabhängen, denn alsdann ist für beyder Massen entgegenwirkende Kräfte

$$\mu = \nu = 1.$$

Läge aber bey eben dieser Vorrichtung N auf einer horizontalen Tafel, so daß der daran befestigte Faden der Tafel parallel wäre, so wäre die absolute Kraft, welche in die Masse N der in die M wirkenden Schwerkraft entgegen wirkte, d. i. $\nu = 0$, also in diesem Fall, alle Reibung beyseitgesetzt,

$$f = \frac{M - 0}{M + \frac{n^2}{m^2} N} \cdot g = \frac{100}{200} \cdot 15{,}09 = 7{,}545$$

Par. Fus. Der Weg der Masse M in der 1sten Sekunde.

In der Ausübung ist aber die Reibung niemals zu vergessen, sie kann allemal durch ein gewisses Gewicht beyläufig angegeben werden, das man nun nach (§. 48 a) auf die Entfernung n von der Umdrehungsaxe reducirt, und nach diesem reducirten Werth zu $N\nu$ noch addirt.

Man muß also nicht vergessen, daß unter dem Ausdruck $N\nu$ (§. 48 w no. I.) dieser reducirte Werth der gesammten Reibung mit begriffen ist.

II. Die Ausdrücke $m \cdot M\mu$, $n \cdot N\nu$ im Zähler des Werths von f (§. 28 w I.) setzen voraus, daß m diejenige Entfernung von der Umdrehungsaxe sey, welche mit $M\mu$ multiplicirt, das nämliche Produkt giebt, welches man erhält, wenn man den Eindruck auf jedes Element der Masse mit seiner Entfernung von der Umdrehungsaxe multiplicirt, und alle diese Produkte zusammen addirt. Das nämliche gilt von n und $N\nu$.

Eben so wird im Nenner vorausgesetzt, daß das Produkt $m^2 \cdot M$ mit der Summe der Produkten einerley sey, welche sich aus der Multiplication eines jeden einzelen Elements von M in das Quadrat seiner Entfernung von der Umdre-

drehungsaxe ergeben, und das nämliche gilt von n^2 N. Sind nun alle Elemente von M in einerley Entfernung m, und alle Elemente von N in einerley Entfernung n angebracht, so kann die Formel für f gradezu darauf angewendet werden. Liegen aber, wie gewöhnlich die Elemente der Massen in verschiedenen Entfernungen von der Umdrehungsaxe, oder allgemeiner gesprochen, (weil man nicht allemal mit Umdrehungsbewegungen zu thun hat): sind die Elementen der Massen so mit einander verbunden, daß sie bey der Bewegung der Massen verschiedene Geschwindigkeiten annehmen müssen, welches der gewöhnliche Fall ist, so muß man sowohl die **statischen Momente** $m . M\mu$, $n . N\nu$ als die **Trägheitsmomente**, $m^2 . M$, $n^2 . N$ für alle einzele Elemente und ihre verschiedenen Entfernungen von der Umdrehungsaxe oder ihre verschiedene Geschwindigkeiten gehörig zu berechnen und in einer einzigen Summe auszudrucken wissen. Hierzu dienen die nachstehenden beyden Aufgaben.

Aufgabe.

III. 5. 48y) A ist eine Welle mit einem darum gelegten Faden, welcher mit einem daran befestigten Gewicht M lothrecht herabhängt, und im Gleichgewicht erhalten werden soll. Es versteht sich, daß die Zeichnung nur lothrechte Durchschnitte der einzelen Theile vorstellt.

Um diese Welle liegt zugleich eine cylindrische Scheibe B; zur Seite liegt eine andere Welle D, parallel mit der vorigen, mit welcher ein lothrechter Arm De und ein wagrechter Dd verbunden ist.

An dem wagrechten Arm Dd sind in gegebenen Entfernungen Da, Db, Dc gegebene Gewichte p, q, r, angebracht, die an Fäden lothrecht herabhängen.

An dem Umfang der Scheibe B ist ein Faden befestigt, welcher von f nach e wagrecht mit dem lothrechten Arm De verbunden ist:

Man sucht die statischen Momente aller mit einander verbundenen Kräfte in Ansehung der Axe α, um welche sich die Welle α drehen muß, sobald Bewegung erfolgen soll.

Auflösung.

I. Die in die Elemente der cylindrischen Welle D wirkenden Kräfte heben alle einander auf; sie wirken blos auf

den

den Zapfen D, d. h. jede Welle muß für sich ruhig liegen bleiben, und übt keine andere Kraft aus, als Druck auf die Zapfen.

II. Aber das statische Moment des Arms g d muß gesucht werden. Die Länge g d sey $= \lambda$, seine Dicke oder lothrechter Querschnitt überall $= w$, das Gewicht von einem Kubikfus dieser Materie (oder Kubikzoll, wenn sonst alles in Zollen ausgedrückt wird) $= \varphi$, der Halbmesser D g $= \rho$, so kann man sich in jeder Entfernung $\rho + x$ von der Axe D eine unendlich dünne lothrechte Schichte des Arms gedenken, deren lothrechte Grundfläche $= \omega$ und Dicke $= dx$ wäre, nämlich das Differential der unbestimmten Länge x. Es läßt sich also dieses Elements Masse durch $\varphi . w . dx$ ausdrücken, und sein statisches Moment ist

$$(\rho + x) . \varphi . \omega\, dx.$$

Solcher Elemente, also auch solcher Momente giebt es unendlich viele, und sie alle zusammen machen das statische Moment des ganzen Arms aus; dieses ist also

$$= \int (\rho + x) . \varphi \omega\, dx = \int \rho\, \varphi \omega\, dx + \int \varphi \omega x\, dx$$
$$= \rho \varphi \omega x + \tfrac{1}{2} \varphi \omega x^2 + \text{Const.}$$

Weil nun das ganze Moment für $x = o$ auch $= o$ werden muß, so wird Const $= o$, also das Integral schlechtweg $= (\rho \omega x + \frac{1}{2} \omega x^2)\, \varphi$ für jede von g aus genommene Länge x; folglich für die ganze Länge λ das statische Moment des Arms

$$= \rho \varphi \omega \lambda = \tfrac{1}{2} \varphi \omega \lambda^2 = \varphi \omega \lambda . (\rho + \tfrac{1}{2} \lambda).$$

III. Die Entfernungen Da, Db, Dc sollen α, β, γ heisen, so sind der Gewichte p, q, r, statische Momente $\alpha . p$, $\beta . q$, $\gamma . r$; also ist das stat. Moment, womit der Arm g d sammt seinen angehängten Gewichten sich um die Axe D zu drehen strebt,

$$= \varphi \omega \lambda (\rho + \tfrac{1}{2} \lambda) + \alpha p + \beta q + \gamma r,$$

wofür ich A setzen will.

IV. Auf die Elementen des lothrechten Arms k e hat die Schwerkraft keinen Einfluß in Rücksicht auf Umdrehung; es entsteht daraus blos Druck auf die Zapfen der Welle.

V. Die Kraft, welche in e nach e f angebracht eben das Umdrehungsbestreben A (no. II.) hätte, heise P, die Entfernung,

fernung De aber δ, der Halbmesser der Zapfen h, und die Reibung am Umfang der Zapfen verursache einen Widerstand so groß, als ein in diesem Umfang entgegen ziehendes Gewicht F, so muß, wofern P so beschaffen seyn soll, daß bey der geringsten Vergrößerung von P eine Bewegung nach ef erfolgt, $\delta . P - h . F = A$ seyn, wo F bestimmt werden muß.

VI. Die Erfahrung hat gelehrt, daß die Reibung, welche von einem Druck entsteht, der Bewegung eben so hinderlich ist, als wenn derselben ein Gewicht, das einen bestimmten Theil des Drucks ausmacht, unmittelbar entgegendrückte. Ich werde von der Größe der Reibung noch einiges sagen; Hier will ich allgemein den Bruch, welcher mit dem Druck multiplicirt die Reibung giebt, μ nennen; das Gewicht der Welle mit dem lothrechten Arm soll G heisen, so leiden die Zapfen

1) den Druck der Gewichte

$$G + \varphi\omega\lambda + p + q + r$$

nach lothrechter Richtung

2) Den Druck $\delta . P$ nach wagrechter Richtung.

Aber den letztern ziehe ich nicht in Betrachtung, und erhalte also schlechthin

$$F = \mu . (G + \varphi\omega\lambda + p + q + r)$$

Demnach

$$\delta P - \mu h (G + \varphi\omega\lambda + p + q + r) = A$$

und

$$P = \frac{A + \mu . h . (G + \varphi\omega\lambda + p + q + r)}{\delta}$$

Eine solche Kraft müßte also an f nach ef ziehen, um allen entgegen wirkenden Kräften gleiches Moment entgegenzusetzen, oder das vollkommene Gleichgewicht so zu halten, daß eine etwas größere Kraft sogleich Bewegung nach ef hervorbringen müßte.

VII. Der Halbmesser α f heise H, so ist das Moment der Kraft P an f in Ansehung der Axe α d. h. ihr Umdrehungsmoment um diese Axe

$$\alpha = H.P = \frac{H.(A + \mu.h.(G + \varphi\omega\lambda + p + q + r))}{\delta}$$

wofür ich B setzen will.

Und wenn nun der Halbmesser der Welle A $= \rho'$, die Reibung der Zapfen $\alpha = F'$, der Halbmesser dieser Zapfen $= h'$ und das Gewicht, welches am Umfang der Welle A angebracht, eben das Umdrehungsbestreben B nach entgegengesetzter Richtung hätte, M heist, so hat man wie (V.)

$$\varrho' . M - F' . h' = B,$$

wo wieder F' bestimmt werden muß.

VIII. Es sey nämlich das Gewicht der Welle A sammt der cylindrischen Scheibe $B = Q$, so ist der Reibung verursachende Druck hier wieder nur der lothrechte

$$Q + M, \text{ also } F' = \mu . (Q + M),$$

und nun

$$\varrho' . M - \mu . (Q + M) . h' = B,$$

demnach:

$$M = \frac{B + \mu h' Q}{\varrho' - \mu h'}$$

d. h. ein am Umfang der Welle A angebrachtes Gewicht M ist mit der Summe aller entgegenwirkenden Kräfte im Gleichgewicht, wenn man

$$M = \frac{B + \mu h' Q}{\varrho' - \mu h'} \text{ nimmt.}$$

IX. Wird nun M größer genommen, so daß man $M + M'$ statt M hat, so erfolgt Bewegung; das Moment der Last oder aller dem Gewicht M entgegen wirkenden Kräfte ist nun

$$\frac{(B + \mu h' Q) . \varrho'}{\varrho' - \mu h'} = M . \varrho'$$

Hängt man also statt M ein Gewicht $M + M'$ an die Welle A, so ist das Moment der Kraft $= (M + M') . \rho'$, und der Unterschied der Momente der Kraft und der Last

$$= (M + M') . \varrho' - M \varrho' = M' \varrho'$$

Oder

Oder wenn das statt M angehängte Gewicht R heist, so ist der Unterschied der Momente

$$Re' - Me' = (R - \frac{B + \mu h' Q}{e' - \mu h'} \cdot e'$$

Aufgabe.

482) Es sey alles wie in der vorigen Aufgabe: man soll das Moment der Trägheit aller mit der Last verbundenen Massen berechnen, worunter also alle der Bewegung hinderlich fallende Massen begriffen werden.

Auflösung.

I. Der Gewichte p, q, r, Momente der Trägheit sind

$$\alpha^2 p, \beta^2 q, \gamma^2 r.$$

II. Des parallelepipedischen Arms g d Mom. d. Tr. muß eben so gesucht werden, wie (§. 48 y no. II.) sein statisches Moment. III. 5.

Man gedenke sich zuerst nach der Länge des Arms g d einen lothrechten Durchschnitt, welcher ein solches Rektangel giebt, wie g d in der Figur vorstellt; dieses Rektangel sey in einem unbestimmten Punkt m senkrecht durchschnitten, und D n sey durch die Mitte durchgezogen.

Jedes unter: oder oberhalb der Stelle n gelegene Element in der Linie m o hat eine größere Entfernung von der Axe als n. Man setze nämlich

$$g n = a, \text{ also } D n = e + a,$$

und drücke nun ein von n aus nach m genommenes unbestimmtes Stück von n m durch y aus, so endigt sich diese Ordinate y in einem Element, dessen Entfernung von der Axe durch

$$\sqrt{((e + a)^2 + y^2)}$$

ausgedruckt wird; dieses Elements d y Moment der Trägheit ist also

$$((e + a)^2 + y^2) \cdot dy,$$

und die Summe der Trägheitsmomenten aller von n bis m in m n liegenden Elemente ist also

$$\int((\varrho + a)^2 + y^2) \cdot dy = (\varrho + a)^2 y + \tfrac{1}{3} y^3$$

das nämliche gilt für die untere Hälfte n o; ist also die halbe Höhe des Rektangels m n $= \psi$, so hat man das Trägheitsmoment der in der Linie m o liegenden Elemente

$$= 2 \cdot (\varrho + a)^2 \cdot \psi + \tfrac{2}{3} \psi^3$$

Für jeden andern Werth von a ändert sich nun der Werth dieses Trägheitsmoments.

Man setze also nun eine unbestimmte Länge x statt a, so hat man für jedes unendlich schmale Rektangel, das durch $\psi \cdot dx$ ausgedrückt wird, das Trägheitsmoment

$$= 2 (\varrho + x)^2 \cdot \psi dx + \tfrac{2}{3} \psi^3 dx$$

also das Trägheitsmoment des Rektangels von g aus auf die ganze Länge x

$$= \int (2 (\varrho + x)^2 \psi dx + \tfrac{2}{3} \psi^3 dx)$$

$$= \int (2 \varrho^2 + 4 \varrho x + 2 x^2) \cdot \psi dx + \int \tfrac{2}{3} \psi^3 dx$$

$$= 2 \varrho^2 \psi x + 2 \varrho \psi x^2 + \tfrac{2}{3} \psi x^3 + \tfrac{2}{3} \psi^3 x + \text{Const}$$

wo aber Const $= 0$ ist, weil das ganze Moment für

$x = 0$ auch $= 0$ seyn muß.

Das Trägheitsmoment des ganzen Rektangels von g bis d ist also

$$= 2 \varrho^2 \psi \lambda + \tfrac{2}{3} \psi^3 \lambda + 2 \varrho \psi \lambda^2 + \tfrac{2}{3} \psi \lambda^3$$

Gedenkt man sich parallel mit diesem Rektangel einen ähnlichen Durchschnitt des Arms, also ein gleiches Rektangel unendlich nahe am ersten, so daß beyder Entfernung durch d z ausgedruckt werden kann, so ist das Trägheitsmoment eines unendlich schmalen Parallelepipedums

$$= (2 \varrho^2 \psi \lambda + \tfrac{2}{3} \psi^3 \lambda + 2 \varrho \psi \lambda^2 + \tfrac{2}{3} \psi \lambda^3) dz;$$

und für jede Breite z des Parallelepipedums, sein Mom. der Tr.

$$= z (2 \varrho^2 + \tfrac{2}{3} \psi^2 + 2 \varrho \lambda + \tfrac{2}{3} \lambda^2) \cdot \psi \lambda z$$

Denn jedes einzele solcher Rektangel dreht sich eben so um einen eigenen Punkt der Axe, und man darf das Moment nicht so berechnen, als wenn die Umdrehung aller Theile des Parallelepip. um **einen einzigen Punkt** geschähe.

Weil

Weil aber nicht alle Massen gleich dicht sind, so muß man noch wie im vor. §. mit φ multipliciren, da dann $\varphi \cdot \psi \lambda z$ das Gewicht des ganzen Arms g d ist. Setzt man also des Arms g d Gewicht $= S$, so ist sein Mom. d. Trägheit

$$= (\varrho^2 + \tfrac{1}{3}\psi^2 + \varrho\lambda + \tfrac{1}{3}\lambda^2) \cdot 2 \cdot S$$

wo ψ die lothrechte Höhe des Arms ist, wenn solcher wagrecht liegt.

III. Das Trägheitsmoment der Welle D giebt sich viel leichter. Ich betrachte sie als einen Cylinder von der Länge l; ρ ist ihr Halbmesser; man gedenke sich auf diesem Halbmesser aus dem Mittelpunkt unbestimmte Stücke x und $x + dx$, so schließen die zugehörigen konzentrischen Kreise einen Ring ein, dessen Fläche $= 3{,}14 \cdot 2x \cdot dx$ ist, dessen Moment der Trägheit also

$$= x^2 \cdot 3{,}14 \cdot 2x\,dx,$$

und das zum Halbmesser x gehörigen Kreises Mom. d. Tr. ist

$$\int 6{,}28 \cdot x^2\,dx = \frac{6{,}28 \cdot x^4}{4},$$

also des ganzen Kreises Mom. d. Trägheit

$$= \frac{6{,}28 \cdot \varrho^4}{4} = 3{,}14 \cdot \varrho^2 \cdot \tfrac{1}{2}\varrho^2,$$

welches wieder wie vorhin mit der Länge l multiplicirt

$3{,}14 \cdot \varrho^2 \cdot l \cdot \tfrac{1}{2}\varrho^2$ giebt.

Heist also das Gewicht des Cylinders T, so ist sein Mom. der Trägheit:

$$= T \cdot \tfrac{1}{2}\varrho^2$$

IV. Des Arms k c Moment der Trägheit giebt sich nun aus (no. II.); seine mit der Umdrehungsaxe nicht parallele Breite heise b, sein Gewicht Z, seine Länge von k ausgemessen g, so ist sein Mom. d. Tr.

$$= (\varrho^2 + \tfrac{1}{3}(b^2 + g^2) + \varrho \cdot g) \cdot 2Z$$

V. Weil man alle Momente der Trägheit auf die Axe a bringen muß, so muß man jetzt suchen, was für eine Mas-

se in der angegriffenen Stelle eben das Mom. d. Trägheit haben würde, das der Summe der bis hierhin berechneten Mom. d. Tr. gleich ist.

Die Summe dieser Momente ist:

$$\alpha^2 p + \beta^2 q + \gamma^2 r + (\varrho^2 + \varrho\lambda + \tfrac{1}{3}(\psi^2 + \lambda^2)) \cdot 2S + \tfrac{1}{2}T \cdot \varrho^2 + (\varrho^2 + \varrho g + \tfrac{1}{3}(b^2 + g^2)) \cdot 2Z$$

Sie soll Σ heisen und die Masse, welche in e angebracht, eben dieses Mom. d. Trägheit in Ansehung der Axe D hätte, will ich Π nennen, so ist, $De = \delta$ gesetzt,

$$\delta^2 \cdot \Pi = \Sigma \text{ also } \Pi = \frac{\Sigma}{\delta}$$

d. i. ein an der Welle A angebrachtes Gewicht würde von den mit der Welle D verbundenen Massen bey der Umdrehung um D völlig einerley leiden, wenn alle diese Massen vernichtet, und dagegen in dem einzigen Punkt e die Masse Π angebracht, das statische Moment der Kräfte aber ungeändert bliebe.

Der Faden fe hat also die Masse Π zu ziehen, und es hat nothwendig einerley Erfolg, es mag diese Masse in der Linie fe liegen wo man will. Die Sache verhält sich also völlig eben so, als wenn diese Masse Π unmittelbar am Umfang f der Scheibe in einem Punkt beysammen angebracht wäre.

VI. Der Scheibe Halbmesser αf ist $= H$, ihr Gewicht heise W, so ist (III.) ihr Moment der Trägheit

$$= W \cdot \tfrac{1}{2} H^2$$

VII. Der Welle A Halbmesser ist ϱ', ihr Gewicht heise N, so ist ihr Moment der Trägheit

$$= N \cdot \tfrac{1}{2} (\varrho')^2$$

VIII. Eine Masse, welche in f angebracht, eben das M. der Tr. (VI.) hätte, heise X; eine eben da angebracht, die das Mom. d. Tr. (VII.) hätte, Y, so ist

$$X \cdot H^2 = \tfrac{1}{2} W \cdot H^2, \text{ also } X = \tfrac{1}{2} W$$

und

$$Y \cdot H^2$$

$$Y \cdot H^2 = \tfrac{1}{2} N (\varrho')^2; \text{ also } Y = \frac{N \cdot (\varrho')^2}{2 H^2}$$

IX. Demnach haben alle Massen zusammengenommen, welche durch das an A angebrachte Gewicht in Bewegung gesetzt werden sollen, eben das Mom. d. Tr. als eine am Umfang f angebrachte Masse hätte, die

$$= \Pi + X + Y \text{ oder:}$$

$$= \frac{\Sigma}{\delta^2} + \tfrac{1}{2} W + \frac{N (\varrho')^2}{2 H^2},$$

wäre.

Aufgabe.

48aa) Es sey alles wie in der Aufgabe (§. 48y), man soll die beschleunigende Kraft bestimmen, mit welcher das Gewicht R (§. 48. y no. IX.) wirkt, welches an der Welle A angebracht ist, und nun das ganze System zu bewegen anfängt.

Auflösung.

I. Nach (§. 48y no. IX.) ist die Differenz der stat. Momente der bewegenden Kräfte

$$= \left(R - \frac{B + \mu h' Q}{\varrho' - \mu h'}\right) \cdot \varrho'$$

II. Nach (§. 48z no. IX.) ist die Summe der Momente der Trägheit

$$= H^2 \cdot \left(\frac{\Sigma}{\delta^2} + \tfrac{1}{2} W + \frac{N (\varrho')^2}{2 H^2}\right) + (\varrho')^2 \cdot R$$

III. Also (§. 48w no. I.)

$$f = \frac{\left(R - \frac{B + \mu h' Q}{\varrho' - \mu h'}\right) \cdot \varrho'}{H^2 \left(\frac{\Sigma}{\delta^2} + \tfrac{1}{2} W + \frac{N (\varrho')^2}{2 H^2}\right) + (\varrho')^2 \cdot R} l \cdot g$$

da dann der in g multiplicirte Faktor die beschleunigende Kraft ist, unsere natürliche Schwerkraft = 1 gesetzt (§. 48v).

48 bb) Eine Masse, die sich um eine Axe bewegt, übt nicht blos nach der Tangente ihrer Bahn, sondern auch nach der Richtung des auf diese Tangente von der Umdrehungsaxe gezogenen Perpendikels Kraft aus. Zur nähern Bestimmung dieses höchst wichtigen Satzes muß ich noch folgende Aufgabe hersetzen.

Aufgabe.

III. 6. 48 cc) In dem festen Punkt e ist ein Faden e d befestigt, an dessen Ende d ein Element d c einer Masse angebracht ist, das sich vermög einer ihm beygebrachten Geschwindigkeit in dem Kreis f d a g bewegt: **man soll die Kraft bestimmen, mit welcher sich das Element in jeder Stelle des Kreises nach der Richtung des Halbmessers vom Mittelpunkt e zu entfernen sucht.**

Auflösung.

I. Das Element befinde sich in seiner Bewegung jetzt in d, und seine Geschwindigkeit sey = c; mit dieser Geschwindigkeit würde er sich nach der Tangente d k fortbewegen, wenn ihn nicht der in e befestigte Faden hieran verhinderte.

II. d a sey ein Element des Kreises, d. h. ein unendlich kleines Bogenstück, und der Weg, welchen das Massenelement in d in dem unendlich kleinen Zeittheilchen d t durchläuft; nun verlängere man die Linie e a bis c, wo sie die Tangente d k durchschneidet, so wäre d c der Weg, den das Element d in dem Zeittheilchen d t vermög seiner Geschwindigkeit c durchlaufen würde, wenn es nicht aus jeder Stelle seiner Bahn gleichsam zurück nach dem Mittelpunkt e gezogen, und so in der Kreisbahn d a erhalten würde. Indem sich also das Element d am Ende des Zeittheilchens d t in a befindet, da es in c seyn sollte, ist es in diesem Zeittheilchen um die Länge c a aus der Bahn, die es frey durchlaufen würde, gegen den Mittelpunkt e hingetrieben worden.

III. a c ist also die Summe aller Pressungen, welche das in Bewegung gesetzte Element in dem Zeittheilchen d t gegen den Mittelpunkt leidet, so wie d c die Summe aller Pressungen anzeigt, welche das Element in eben dem Zeittheilchen bey freyer Bewegung vermög der ihm mitgetheilten Geschwindigkeit leiden würde.

IV. Nun ziehe man in a senkrecht auf c e die b a, so ist

$$a\,c : a\,b = d\,c : d\,e$$

Aber

Aber weil ad hier nur ein Element des Bogens ist, so ist

$$ab = bd = \tfrac{1}{2} ad;$$

ferner:

$$de = c \,.\, dt, \text{ also, } de = r \text{ gesetzt.}$$

$$ac : \tfrac{1}{2} ad = c \,.\, dt : r, \text{ und } ac = \frac{ad \times c \,.\, dt}{2r}$$

V. Es ist aber der elementarische Bogen ad mit der zugehörigen Tangente dc einerley, also gleichfalls

$$= c \,.\, dt, \text{ und daher } ac = \frac{c^2 \,(dt)^2}{2r}.$$

Wenn nun v die zu c gehörige Höhe ist, von der nämlich ein Körper frey herab fallen müßte, um am Ende die Geschwindigkeit c zu haben, so ist

$c = 2\sqrt{9v}$ (§. 48 w no. V.) also $c^2 = 4gv$

und nun:

$$ac = \frac{4gv\,(dt)^2}{2r} = \frac{2v}{r} g\,(dt)^2 \text{ oder:}$$

$$ac : g\,(dt)^2 = 2v : r$$

Es ist aber $g\,(dt)^2$ der Raum, welchen ein schwerer Körper in dem Zeittheilchen dt vermög der natürlichen Schwere durchlaufen würde (§. 48 w no. III.) und kann also als die Summe der Pressungen angesehen werden, welche die natürliche Schwere einem Körperelement in dem Zeittheilchen dt mittheilen würde.

VI. Also verhält sich die Summe der Pressungen, welche in dem Zeittheilchen dt angewendet werden, das Körperelement zu verhindern, daß es sich nicht aus dem Bogenelement da längst dem Halbmesser entferne, zur Summe der Pressungen, welche die natürliche Schwere dem Körperelement in eben dem Zeitelement beybringen würde, wie 2v zu r.

Weil nun die Geschwindigkeit des Körperelements, womit es sich im Kreise herumbewegt, als unveränderlich angenommen wird, so gilt eben dieser Satz von jedem Element des Bogens und für jedes Zeitelement.

Heist also die Kraft, welche das Körperelement in jeder Stelle des Kreises während seinem Umlauf von dem Mittelpunkt e zu entfernen strebt, p, so hat man allgemein

$$p = \frac{2v}{r}$$

die Kraft unserer natürlichen Schwere = 1 gesetzt.

VII. Aendert sich die Geschwindigkeit während der Bewegung, so gehört sie doch in jedem Punkt der Bahn einer bestimmten Höhe v zu, und dann ist jedesmal für diese Stelle:

$$p = \frac{2v}{r}$$

48 dd) Die Kraft p heist die **Centrifugalkraft**, auch **Schwungkraft**, sie ist der Geschwindigkeit des Elements proportional, wenn von den verschiedenen Schwungkräften der einzelen Elemente einer im Kreise herumlaufenden Masse die Rede ist. Denn es ist:

$$p = \frac{2v}{r} = \frac{2 \cdot c^2}{4gr} = \frac{2c}{4gr} \cdot c,$$

da dann bey einer kreisförmig bewegten Masse $\frac{c}{r}$ für alle Elemente gleich groß seyn muß, also p sich schlechthin wie c verhält, also auch schlechthin wie r, weil bey einer solchen Masse der Werth von c bey den verschiedenen Elementen dem Werth von r, welches zu dem Element gehört, proportional ist. Wenn daher die Schwungkraft für eine gegebene Masse bestimmt werden soll, so darf man die Masse nur als eine im Schwerpunkt vereinte Sammlung von Elementen betrachten, und nun die Berechnung so anstellen, als wenn alle Elementen oder die ganze Masse sich mit eben der Geschw. bewegte, mit welcher der Schwerpunkt herumgeht.

Es ergiebt sich aber die Entfernung des Schwerpunkts von einer gegebenen Axe, wenn man das für diese Axe nach (§. 48 y) berechnete statische Moment mit der Masse selbst dividirt.

Erklä=

Erklärung.

49. **Eine Wage wird genennet ein Instrument, dadurch man das Gewicht eines Körpers finden kann.**

Zusatz.

50. Die Einrichtung einer gewöhnlichen zweyschaligen oder gemeinen **Krämerwage**, ergiebt sich aus dem Bisherigen von selbsten.

Zusatz.

51. Bey dergleichen Krämerwagen muß es gleich viel seyn, in welche Schale man die Gewichte legt; die beyden Arme AC, BC, müssen daher gleich groß seyn. I. 14.

Zusatz.

52. Durch Verwechslung der Wagschalen oder der Gewichte lassen sich daher solche Wagen leicht probiren.

Erklärung.

53. **Eine Schnellwage wird genennet, durch die man mit einem Gewichte Körper von verschiedenem Gewichte abwiegen kann.**

Zusatz.

54. Die Einrichtung einer Schnellwage gründet sich auf das oben bewiesene Fundamentalgesetz der Statik. I. 15.

Zusatz.

55. Doch ist es in der Ausübung nöthig, die verschiedenen Abtheilungen des Wagbalkens, welche die Berechnung ergiebt, erst noch durch Probiren zu berichtigen, weil man weder die Voraussetzungen noch die Abmessungen allemal so genau nehmen kann, als die Theorie es erfordert.

55) Beym Gebrauch der Wagen hat man sich die Verhältnisse der an den verschiedenen Orten eingeführten Pfunde bekannt zu machen, wovon ich hier einige mittheile:

Aachen	9728
Altona	10080

Amsters

Amsterdam	"	"	10279
Ansbach	"	"	10608
Augsburg	10232	leichte Pfund	9837
Apotheker Gewicht	(teutsches)	"	7457
Bamberg	"	"	10103
Basel	"	"	10202
Bayreuth	"	"	10770
Bergen in Norwegen	"	"	10388
Berlin	"	"	9748
Bern	"	"	10840
Braunschweig	"	"	9716
Bremen	"	"	10380
Breslau	"	"	8434
Brüssel	"	"	9697
Cassel	"	"	6589
Coburg	"	"	10608
Cölln	"	"	9728
Dänemark	"	"	10388
Danzig	"	"	9062
Dresden	"	"	9716
Erfurt	"	"	9822
Erlangen	"	"	10608
Frankfurt am Main	9720	Centnergewicht	10595
Frankfurt an der Oder	"	"	9738
Hamburg, Handlungs-Gewicht		"	10080
Hanover	"	"	10129
Leipziger Handl.		"	9716
Lübeck	"	"	10059
München	"	"	11671
Nürnberg	"	"	10610
Paris	"	"	10202
Petersburg	"	"	8512
Ulm	"	"	9754

Aufgabe.

I. 56. Aus der gegebenen Schwere des He-
1. bels AB, der Entfernung des Schwerpunktes

CV,

CV, der Last, CA und der Kraft CB, und der Schwere der Last, die Grösse der todten Kraft zu finden.

Auflösung.

1. Bildet euch ein, der Hebel habe keine Schwere, und an deren statt hange in seinem Schwerpunkte V ein Gewichte G, so jener gleich ist (§. 35.); so könnet ihr die Last finden, welche ihr in A anhängen müsset, damit der Hebel wagerecht liegen bleibe (§. 45.).
2. Die gefundene Last ziehet von der gegebenen Last ab; so bleibet die Last übrig, welche die Kraft in B erhalten muß.
3. Weil nun dieselbe sich zu der todten Kraft in B verhält, wie CB zu CA (§. 45.); so könnet ihr diese durch die Regel Detri finden (§. 85. Arithm.) W. Z. F. und Z. E.

Exempel.

Es sey CA = 1, CV = 2, CB = 5, G = 10 Pf. O = 300 Pf.

1 — 2 — 10

10

20 Pf.

300 Last.

280

5 — 1 — 280

5) 25

30

30

0

56 Pf. Kraft.

Aufgabe.

57. Aus der gegebenen Schwere des Hebels AB, der Entfernung des Schwerpunkts CV, der Last CA und der Kraft CB, und der todten Kraft, die Schwere der Last zu finden. I. 1.

Auflösung.

1. Suchet wie in der vorhergehenden Aufgabe den Theil der Last, welchen der Hebel durch seine Schwere erhalten kann.

2. Su-

2. Suchet ferner auf eben diese Art den andern Theil der Last, den die in B applicirte Kraft erhalten kann.
3. Addiret beyde Theile: so kommet die Schwere der gesuchten Last heraus.

Exempel.

Es sey CA = 1, CV = 2, CB = 5, G = 10 Pf. die todte Kraft 56 Pf.

1 — 2 — 10
10

20 erster Theil der Last.

1 — 5 — 56
5

280 anderer Theil der Last.
20 erster Theil der Last.

300 ganze Last.

Aufgabe.

I. 1. 58. Aus der gegebenen Schwere der Last O und des Hebels G der todten Kraft und der Länge des Hebels AB nebst dem Schwerpunkte des Hebels V, den gemeinen Schwerpunkt C zu finden, wo nemlich der Hebel aufzulegen ist, damit die Kraft die Last erhalten kann.

Auflösung.

1. Suchet erstlich den gemeinen Schwerpunkt Z der todten Kraft in B und der Schwere des Hebels G, indem ihr schliesset; wie die Summe der todten Kraft zu der Schwere des Hebels, so verhält sich VB zu ZB, oder der Entfernung der Kraft von dem gemeinen Schwerpunkte (§. 45.).
2. Ziehet ZB von AB ab, so wisset ihr AZ.
3. Bildet euch ein, es hange in Z ein Gewichte, welches der todten Kraft in E und der Schwere des Hebels

Hebels G zusammen gleich ist (§. 35.); so könnet ihr wie vorhin die Linie CZ finden, folgends den Punkt C, den man suchte.

Exempel.

Es sey die Kraft in B = 56, die Schwere des Hebels G = 10, die Last O = 300 Pf. AB = 6, VB = 3.

66 — 10 — 3

3

66) 30 = $\frac{30}{66} = \frac{5}{11} =$ ZB

$\frac{66}{11} =$ AB

$\frac{61}{11} =$ AZ

356 — 66 — $\frac{61}{11}$

das ist 61 11 $\frac{61}{11}$ (§. 59. 96. Arithm.)

$\left.\begin{matrix} \not{8}x \\ \not{8}x \end{matrix}\right\} 1 =$ AC

Lehrsatz.

59. Wenn die Last in B zwischen dem Ruhepunkte C und dem Orte der Kraft in A appliciret ist; so verhält sich gleichfalls die todte Kraft in A zu der Last in B wie die Entfernung der Last zu der Entfernung der Kraft CA. I. 16.

Beweis.

Man verlängere CA in D bis DC = CA: so ist klar, daß die Kraft in A eben so viel vermag, als die Kraft in D (§. 46.) Wenn aber die Kraft in D das Gewichte in B erhält; so verhält sie sich zu demselben wie BC zu CD oder CA (§. 45.). Derowegen muß sich auch die Kraft in A zu der Last in B verhalten, wie BC zu CA. W. Z. E.

Anmerkung.

60. Der vorstehende Lehrsatz ist oben schon in seiner völligen Allgemeinheit bewiesen worden.

Auf-

Aufgabe.

I. 16. 61. Aus der gegebenen Schwere eines Hebels von der andern Art E, der Last G, dem Schwerpunkte F, der Entfernung der todten Kraft CA, die Grösse der todten Kraft in A zu finden.

Auflösung.

1. Suchet wie viel Kraft in A erfordert werde, den Hebel allein zu erhalten (§. 59.).

2. Suchet ferner, wie viel Kraft in A erfordert werde, die Last G allein zu erhalten (§. 59.).

3. Addiret die beyden einzelnen Kräfte; so kommt die Grösse der verlangten Kraft heraus.

Exempel.

Es sey CB = 1, CF = 3, CA = 6, G = 300

Pf. E = 10 Pf.

6 — 3 — 10

oder 2 — 1 — 10 (§. 59. 96. Arithm.)

1

X ∅ ∅ } 5 Pf. erster Theil der Kraft.

6 — 1 — 300

1

B ∅ ∅ } 50 Pf. anderer Theil der Kraft.

∅ ∅ } 5 Pf. erster Theil der Kraft.

55 Pf. ganze Kraft.

Anmerkung.

62. Wenn ihr euch die Aufgaben von dem Hebel, die bisher erkläret worden, wohl bekannt machet, und dabey dessen besinnet, was oben (§. 10.) erinnert worden; so werdet ihr das ganze Werk des Borelli de motu animalium verstehen. Unzählich viel andere Fälle will ich jetzt mit Stillschweigen übergehen, da diese Rechnungen Nutzen haben. Denn es ist fast

kein

kein einziges Instrument in der Kunst, und keine Bewegung eines Körpers in der Natur, wobey man nicht dieselben anbringen könnte.

Lehrsatz.

63. Wenn die Kraft den Hebel aus L in M niederdrücket: so verhält sich der Raum, den die Kraft durchläuft, zu dem Raume, durch welchen die Last beweget wird, wie die Last zu der todten Kraft. II. 17. 18.

Beweis.

Denn wenn die Kraft sich durch den Bogen LM beweget, so wird die Last durch den Bogen HN gehoben. Demnach verhält sich der Raum der Last zu dem Raume der Kraft, wie der Bogen HN zu dem Bogen LM, das ist, weil die Winkel I bey einander gleich sind (§. 40. Geom.), wie HI zu IL, folgends wie die todte Kraft zu der Last (§. 45.) W. Z. E.

Zusatz.

64. Wenn man aus N auf HI das Perpendicul NO, und auf IL aus M das Perpendicul MR fallen lässet; so verhält sich NI zu NO wie MI zu RM (§. 10. Trigon.), folgends NI : MI = NO : RM (§. 83. Arithm.). Derowegen verhält sich die Höhe, wodurch sich die Last beweget, zu der Höhe, durch welche die Kraft herunter steiget, wie die todte Kraft zu der Last. II. 17. 18.

Zusatz.

65. Und daher wird so viel Kraft erfordert, 3 Pfund durch 1 Schuh, als 1 Pfund durch 3 Schuhe in gleicher Zeit zu bewegen.

Zusatz.

66. Weil man die Geschwindigkeit der Bewegung aus dem Raume beurtheilet, der in einer Zeit durchlaufen wird; so verhält sich auch die Geschwindigkeit, mit welcher

welcher sich die Kraft beweget, zu der Geschwindigkeit, mit welcher die Last beweget wird, wie die Last zu der todten Kraft.

Anmerkung.

67. Der Satz (§. 63.) ist der **Cartesische Grundsatz der Statik**; mit gleichem Recht läßt sich auch der Satz (§. 66.) als Grundsatz der Statik gebrauchen, wie Hr. de la Grange in seiner Méchanique analytique gethan hat. Aber es bedürfen solche Sätze einer größern Evidenz, um als Grundsätze gelten zu können.

Lehrsatz.

I. 2. **68. Wenn die Directionslinie der todten Kraft mit dem Radio des Rades AC und die Directionslinie der Last E mit dem Radio der Welle CB einen rechten Winkel machet; so verhält sich die todte Kraft zu der Last, wie der Radius der Welle CB zu dem Radio des Rades AC.**

Beweis.

Die Kraft würde die Last erhalten, wenn gleich nur die Linie AB zurück bliebe. Da nun in C der Ruhepunkt ist, in B die Last, und in A die todte Kraft rechtwinklicht appliciret wird; so verhält sich diese zu jener, wie CB zu CA (§. 10. 45.). W. Z. E.

Zusatz.

69. Wenn die Directionslinie der todten Kraft FH mit dem Radio des Rades FC einen schiefen Winkel machet; so ist es eben so viel, als wäre sie in G applicirt. Und dannenhero verhält sie sich zu der Last, wie CB zu CG.

Zusatz.

70. Wenn euch der Winkel GFC, den die Kraft mit dem Radio des Rades machet, und der Radius des Rades gegeben sind; so könnet ihr die Linie GC durch die Trigonometrie finden (§. 20. Trigon.)

Zusatz.

Zusatz.

71. Es vermag die Kraft am meisten, wenn ihre Directionslinie mit dem Radio des Rades einen rechten Winkel machet (§. 25. 45.)

Zusatz.

72. Weil man sich aber bey der todten Kraft das Rad nicht anders als einen Hebel vorstellen darf (§. 10); so lassen sich alle Aufgaben von dem Hebel auf das Räderwerk appliciren.

Aufgabe.

73. Aus der gegebenen Last C und denen Radiis der Axen BH, AD, EF, und der Räder BA, DE, FG die todte Kraft zu finden, welche in G appliciret werden muß. II. 19.

Auflösung.

1. Suchet zuerst die Kraft, welche an der Peripherie des ersten Rades appliciret werden müste, damit sie das an seiner Welle BH hangende Gewichte C erhalten kann (§. 68.)

2. Diese Kraft sehet als ein Gewichte an, welches an die Welle des andern Rades appliciret worden, und suchet daraus abermals (§. 68.) die Kraft, welche an der Peripherie desselben Rades appliciret werden muß, damit sie solches, folgends auch das Rad A mit seinem Gewichte C aufhalten kann.

3. Mit dieser Arbeit fahret fort, bis ihr auf die Kraft kommet, welche an der äußersten Peripherie appliciret werden muß.

Exempel.

Es sey C = 6000 Pf. BH = 6, AB = 34, AD = 5, DE = 35, EF = 4, FG = 27.

	1	
34—6—6000	x n	
oder 17 3; 3	x 8 8 4	
	x 8 ø ø ø	1058 14/17 oder
18000	x n n n n	1059 Kraft in A.
	x x x	

35—5—1059	ß 2	
7 1	x ø 8 ø	151 2/7 Kraft in E
	n n n	

	1	
27—4—151 5/7	ß	
4	ß ø 1	
605 1/7	ø ø 8	22 11/27 Kraft in G.
	ß n n	
	ß	

Anmerkung.

74. Wenn die Last gesuchet und die Kraft gegeben würde; so darf man nur von der Kraft in G anfangen, und das Gewichte in E für die Kraft in E annehmen, u. s. w.

Lehrsatz.

I. 2. 75. **Wenn eine Kraft eine Last durch Hülfe eines Rades an einer Axe beweget; so verhält sich der Raum der Kraft zu dem Raume der Last, wie die Last zu der todten Kraft.**

Beweis.

Wenn das Rad einmal herumgedrehet wird, so gehet auch die Welle IBK einmal herum (§. 12.); und also wird die Last E so viel Schuhe herauf gehoben, als die Peripherie der Welle beträget. Derowegen stellet die Peripherie der Welle den Raum der Last, und die Peripherie des Rades den Raum der Kraft vor. Und demnach verhält sich jener zu diesem, wie die Peripherie der Welle zu der Peripherie des Rades, oder (welches gleich

viel

viel ist) wie der Radius der Welle CB zu dem Radio des Rades CA, folgends wie die todte Kraft zu der Last (§. 68.). W. Z. E.

Anmerkung.

76. Wenn viel Räder in einander gehen, so ist zu merken, daß diejenigen, so an einer Welle feste sind, in gleicher Zeit herum kommen: hingegen das kleinere, welches in das grössere greiffet, oder von dem grössern herum getrieben wird, so vielmal herum gehe, indem das grosse einmal herum kommet, wie vielmal die Peripherie des kleinen in der Peripherie des grossen, oder, welches gleich viel ist, die Zahl der Kammen im kleinen in der Zahl der Kammen im grossen enthalten ist.

Aufgabe.

77. **Aus den gegebenen Verhältnissen der Radiorum oder Peripherien der kleinen Räder zu den Radiis oder Peripherien der grossen, zu finden, wie vielmal dasjenige, so am geschwindesten gehet, herumkommet, ehe das, so am langsamsten beweget wird, seinen Lauf einmal vollendet.**

Auflösung.

1. Dividiret die Peripherien der großen Räder durch die Peripherien der kleinen.
2. Die herauskommende Quotienten multipliciret in einander.

So ist das Produkt die Zahl, welche andeutet, wie vielmal das geschwindeste Rad G herumgehet, indem das langsamste A einmal seinen Lauf vollendet (§. 76.) W. Z. E. II. 19.

Exempel.

Es sey die Peripherie des großen Rades A 24′ des kleinen D 12; des andern großen Rades E 36′ des andern kleinen F 9.

♄	2	♃	4
☿		☉	2

8

Also gehet das letzte Rad G 8 mal herum, indem das unterste A einmal herum kommet.

Anmerkung.

78. Die Peripherien werden auch durch die Zahlen der Kammen gegeben, weil die Kammen in Rädern, die in einander greiffen, von gleicher Grösse sind.

Aufgabe.

79. **Die Zahl der Räder und die Zahl der Kammen an den Rädern und den Getrieben oder den Trillingsstöcken zu finden, wenn angegeben wird, wie vielmal das Rad, so am geschwindesten gehet, herumkommen soll, ehe das langsamste einmal seinen Lauf vollendet.**

Auflösung.

1. Zerfället die gegebene Zahl in andere kleinere Zahlen, durch deren Multiplication sie erwächset: so sehet ihr, wie viel Räder mit Kammen und Getriebe oder Trillinge euch nöthig sind, nemlich so viel, als dergleichen Zahlen herauskommen.

2. Gebet den Getrieben nach Beschaffenheit der Umstände eine gehörige Zahl der Kammen, und multipliciret dadurch die vorher gefundenen Zahlen, so sind die Produkte die Zahlen der Kammen in den Rädern, welche in die Getriebe oder Trillinge eingreiffen (§. 77. 78.).

Exempel.

Es soll das geschwindeste Rad 40 mal herum gehen ehe das langsamste einmal seinen Lauf vollendet. Weil nun 40 durch Multiplication 5 in 8 entstehet; so sehet ihr, daß zwey Räder mit Kammen und zwey Getrie-

triebe oder Trillinge vonnöthen sind. Gebet jedem Trillinge 6 Stöcke, so bekommet das langsamste Rad A 48, da mittlere E 30, das letzte G keine Kammen, sondern dieses wird nach der Bequemlichkeit der bewegenden Kraft eingerichtet. II. 19.

Aufgabe.

80. Aus der gegebenen Kraft und Last die Zahl der Räder und Verhältnisse ihrer Radiorum gegen die Radios ihrer Axen, oder der kleinen an einer Welle mit ihnen befestigten Räder, zu finden.

Auflösung.

1. Dividiret die Last durch die Kraft, so findet ihr wie vielmal diese in jener enthalten ist.

2. Zerfället den Quotienten in verschiedene kleinere Zahlen, durch deren Multiplication er entstehet. Denn so viel habt ihr Räder nöthig, als dergleichen Zahlen herauskommen, und die Diameters der Axen oder Getriebe und Trillinge verhalten sich gegen die Diameters der Räder, die mit ihnen an einer Axe befestiget sind, wie 1 zu denselben Zahlen (§. 73.). W. Z. F.

Exempel.

Es sey die Last 3000 Pf., die Kraft 60 Pf., so ist der Quotient 500 Pf. Weil nun die Zahl sich in 4. 5. 5. 5. zerfällen lässet, so kann man 4 Räder machen. In dreyen verhält sich der Diameter der Axe zu ihrem Diameter, wie 1 zu 5, im vierten, wie 1 zu 4.

Anmerkung.

81. Die Zerfällung der Zahlen beruhet auf der Uebung. Man kann sie aber am bequemsten verrichten, wenn man die Zahl, welche zerfället werden soll, durch kleine Zahlen zu dividiren suchet. Unterweilen gehet es nicht an, daß eine gegebene Zahl in lauter ganze zerfället werden kann. Derowegen muß man in diesem Falle, entweder zuletzt einen Bruch beybehalten,

oder, wenn es die Sache leidet, die Zahl um etwas vermehren, bis sie sich bequem zerfällen lässet.

Lehrsatz.

I. 7. 82. **Wenn eine Kraft eine Last auf einer schiefliegenden Fläche AC erhält, dergestalt, daß ihre Direktionslinie DK mit ihrer Länge AC parallel ist; so verhält sie sich zu der Last, wie die Höhe AB zu der Länge AC.**

Beweis.

Es sey die Directionslinie des Gewichts DH; so kann man sich einbilden, es sey die ganze Schwere der Last in einem Punkte derselben, z. E. in F beysammen (§. 23. 35.). Und demnach ist ihre Entfernung von dem Ruhepunkte EF, hingegen die Entfernung der Kraft ist die Perpendicularlinie ED (§. 24.). Da nun DEF einen Hebel vorstellet (§. 10), dessen Ruhepunkt in E; so verhält sich die Kraft in D zu der Last in F, wie EF zu ED (§. 45.). Weil nun DEG ein rechter Winkel ist, und EFG gleichfalls; hingegen der Winkel EGF den beyden Triangeln EFG und DEG gemein ist; so muß auch der Winkel EDF dem Winkel EFG, folgends der Winkel DEF dem Winkel EGF gleich seyn (§. 78. Geom.), und demnach EF : ED = GF : EG (§. 148. Geom.). Wiederum weil die Verticalwinkel bey G einander gleich (§. 40. Geom.), und bey F und H rechte Winkel sind; so ist auch GF : EG = GH : GC (§. 148. Geom.) Endlich ist auch GH : GC = AB : AC (§. 149. Geom.), und demnach EF : ED = AB : AC (§. 57. Arithm.); folgends wie AB zu AC, so die todte Kraft zu der Last. W. Z. E.

Lehrsatz.

II. 20. 83. **Wenn eine Kraft eine Last auf einer schiefliegenden Fläche LN dergestalt erhält, daß ihre Directionslinie RI mit der Grundlinie MN parallel ist: so verhält sie sich zu der Last, wie die Höhe LM zu der Grundlinie MN.**

Beweis.

Beweis.

Es ist aus dem Beweise des vorhergehenden Lehrsatzes (§. 82.) klar, daß man annehmen könne, als ley in dem Hebel TQS und T die Kraft, in S die Last applciret: folgends ist die Kraft zu der Last wie QS zu TQ oder RS (§. 45) Da nun in dem angeführten Beweise ferner dargethan worden, daß die Triangel RQS, SQO, OPN und LNM einander ähnlich sind: so ist QS : RS = SO : QS = OP : PN = LM : NM (§. 148. 149. Geom.). Demnach verhält sich die Kraft zu der Last, wie LM zu MN. W. Z. E.

Zusatz.

84. Weil die Schraube nichts anders ist, als eine um eine Welle herumgeführte schiefliegende Fläche (§. 20.), und die Kraft sich mit der Grundlinie parallel beweget; so verhält sich die todte Kraft zu der Last oder dem Widerstande, den sie zu überwinden hat (§. 3.), wie die Weite der Schraubengänge zu der Peripherie der Schraube.

Zusatz.

85. Daher haben die Schrauben mit engen Gängen mehr Vermögen, als die mit weiten, wenn sie von gleicher Dicke sind.

Zusatz.

86. Wenn die Last von N bis O beweget worden; so hat man sie um OP erhoben, hingegen die Kraft hat sich durch die Linie PN beweget. Derowegen verhält sich der Raum der Kraft zu dem Raume der Last, wie die Last zu der todten Kraft (§. 83.) II. 20.

Zusatz.

87. Eben dieses gilt auch von der Schraube. Denn wenn die Kraft sich durch die Peripherie der Schraube beweget, so wird die Last um die Weite der Schrauben-

gänge niedergedrückt. Darum verhält sich der Raum der Last zu dem Raume der Kraft, wie die Weite zwischen zwey Gängen zu der Peripherie der Schraube, das ist, wie die todte Kraft zu der Last (§. 84.).

Aufgabe.

88. **Aus der gegebenen Kraft der Peripherie der Schraube, und der Weite der Schraubengänge, den Widerstand zu finden, den die Kraft mit einer Schraube überwinden kann.**

Auflösung.

Suchet zu der Weite zwischen den Schraubengängen, der Peripherie der Schraube und der Kraft die vierte Proportionalzahl (§. 85. Arithm.) so ist geschehen, was man verlangete.

Exempel.

Es sey die Weite der Schraubengänge 3″, die Peripherie der Schraube 25″, die Kraft 30 Pf.

3—25—30 (§. 95. Arithm.)
1 10 10

250 Last.

Aufgabe.

89. **Aus der gegebenen Kraft und Last die Eintheilung der Schraube zu finden.**

Auflösung.

1. Dividiret die Kraft durch die Last; so ist 1 die Weite der Schraubengänge und der Quotient die Peripherie der Schraube (§. 84.).

2. Nehmet nach Erforderung der Umstände die Weite der Schraubengänge in Zollen oder Linien an, und multipliciret dadurch den vorigen Quotienten; so habet ihr die Peripherie der Spindel in Zollen oder Linien (§. 85. Arithm.) und

3. kön-

3. könnet daraus ihren Diameter (§. 133. Geom.) finden.

Exempel.

Es sey die Last 250 Pf., die Kraft 30 Pf.

I

℔ 250	$8\frac{1}{3}$
℔ 30	3‴

Weite der Gänge.

25 Peripherie der Spindel

314—100—25

100

2500

30	
462	
℔ 2500	$7\frac{302}{314}$ oder $7\frac{151}{157}$
℔ 314	

Diameter der Spindel.

Zusatz.

90. Wenn ihr demnach die gefundene Peripherie der Spindel 25‴ auf die Linie BC traget, und in B ein Perpendicul aufrichtet (§. 70. Geom.) darauf die Weite der Gänge AB aus B gegen A so vielmal traget, als Gänge werden sollen, und das Rectangulum ADCB construiret (§. 99. Geom.); so könnet ihr die Gänge B 1, 1. 2, 2. 3, 3. 4. u. s. w. ziehen. Wenn ihr nun diesen Riß um die Spindel klebet; so ist die Eintheilung der Schraube richtig. II. 21.

Anmerkung.

91. Man beweget öfters die Schrauben durch einen Zieh-Pengel, welcher mit der Spindel ein Rad an einer Axe formiret (§. 13.), und dannenhero die Kraft noch über das Vermögen der Schraube vermehret (§. 68.).

Erklärung.

92. **Wenn die Schraube in ein Stirnrad eingreiffet, so nennet man sie** die Schraube ohne Ende. II. 22.

Zusatz.

Zusatz.

93. Die Kammen in dem Stirnrade müssen nach den Schraubengängen eingeschnitten werden, das ist, nach dem Winkel der Spindel.

Anmerkung.

94. Die Schraube ohne Ende darf nicht mehr als drey Gänge haben.

Zusatz.

95. Wenn die Schraube einmal herumgedrehet wird; so windet sich in dem Stirnrade ein Kammen aus, und ist demnach die Bewegung sehr langsam.

Lehrsatz.

I. 6. 96. **Wenn die Kraft D mit einem um eine Rolle C gezogenen Seile eine Last E erhält; so ist sie der Last gleich.**

Beweis.

Die Kraft D verhält sich zu der Last E, wie BC zu CA (§. 45.). Nun ist AC = CB (§. 18.) Derowegen ist die Last der Kraft gleich (§. 53. Arithm.) W. Z. E.

Lehrsatz.

II. 23. 97. **Wenn die Kraft E eine Last F mit einem um eine Rolle gezogenen Stricke dergestalt erhält, daß die beyden Stricke parallel sind, und die Rolle zugleich mit der Last hinaufgezogen würde, wenn eine Bewegung geschähe, so verhält sich dieselbe zur Last, wie 1 zu 2.**

Weil der Strick in D feste ist, und das Gewichte F in H hänget; so verhält sich die Kraft zu demselben, wie AH zu AB (§. 59.) Nun ist $AH = \frac{1}{2} AB$ (§. 18.). Derowegen ist auch die Kraft die Hälfte der Last. W. Z. E.

Zusatz.

Zusatz.

98. Daher vermehren in einem Kloben nicht die oberen, sondern nur allein die unteren Scheiben das Vermögen.

Lehrsatz.

99. **Wenn in einem Kloben alle Stricke MN, SX, QR, PO, TV, einander parallel sind; so verhält sich die Kraft in Z zu der Last W, wie 1 zu der Zahl der Seile, die von der Last gezogen werden.** II. 24.

Beweis.

Denn weil in diesem Falle alle Stricke gleich gedehnet werden; so wird die ganze Last durch dieselbe gleich vertheilet. Dannenhero hat die Kraft in Z nicht mehr zu erhalten, als was auf dem Strick MN kommet (§. 96.) Solchergestalt verhält sich die Kraft zu der Last, wie 1 zu der Zahl der Stricke, die von der Last gezogen werden. W. Z. E.

Zusatz.

100. Wenn ihr durch die Zahl dieser Stricke (5) die Last (500) dividiret; so kommet die Kraft (100) heraus.

Zusatz.

101. Hingegen wenn ihr die Kraft (100) durch die Zahl der Stricke (5) multipliciret; so kommet die Last (500) heraus.

Zusatz.

102. Und weil die Zahl der obern und unteren Rollen zusammen in einem Kloben der Zahl der Seile gleich sind; so kommet selbige heraus, wenn ihr die Last (500) durch die Kraft (100) dividiret.

Anmerkung.

103. Zuweilen setzet man die Scheiben in dem Kloben nicht über, sondern neben einander, absonderlich wenn ihrer viel sind, damit man den Raum ersparet.

Lehr-

Lehrsatz.

104. **Wenn eine Last durch einen Kloben beweget wird; so verhält sich der Raum der Kraft zu dem Raume der Last, wie die Last zu der todten Kraft.**

Beweis.

Wenn das Gewichte oder die Last um einen Schuh erhöhet werden soll; müssen alle Stricke, die von ihr gedehnet werden, um einen Schuh verkürzet werden. Also muß die Kraft so viel Schuhe herausziehen, als Seile sind. Darum verhält sich ihr Raum zu dem Raume der Last, wie 1 zu der Zahl der Stricke, die von der Last gedehnet werden, das ist, wie die todte Kraft zu der Last (§. 99.) W. Z. E.

Lehrsatz.

II. 20. 105. **Bey einem Keile verhält sich die Kraft zu der Last oder dem Widerstande, den die Sache, so zerspaltet werden soll, auf der Seite LN giebet, wie die halbe Dicke ML zu der Länge MN.**

Beweis.

Der Keil ist aus zwey schiefliegenden Flächen zusammengesetzet. Da es nun gleich viel ist, ob man die Last auf derselben beweget, oder ob man diese mit Gewalt darunter wegstößet; und die Directionslinie der Kraft, die mit einem Keile spaltet, mit der Länge eines Keiles übereinkommet; so verhält sich die Kraft zu der Last auf der Seite LN wie die halbe Dicke ML zu der Länge MN (§. 83.) W. Z. E.

Zusatz.

106. **Derowegen vermag ein spitziger Keil mehr, als ein stumpfer, weil ML zu MN in jenem eine kleinere Verhältniß, als in diesem hat.**

106a) Die Lehre vom Keil hätte hier ganz wegbleiben dürfen, s. H. H. Kästners Anfangsgr. der angew. Mathem. I. Abtheil. S. 67. u. f. Ueberhaupt haben die bisherigen Sätze in der Ausübung wegen der schon oben erwähnten Reibung eine beträchtliche Korrektion nöthig. Soll das Gleichgewicht unter der Voraussetzung statt finden, daß grade nur so viel Kraft angewendet werden soll, als nöthig ist, Bewegung zu verhindern, so muß die Reibung noch mit zur Kraft gerechnet, oder als ein Theil der Kraft angesehen werden; soll aber das Gleichgewicht so statt finden, daß eine kleine Vergrößerung der angewendeten Kraft sogleich Bewegung verursachen müßte, so muß die Reibung noch mit zur Last gerechnet werden. Es sey z. B. das Gewicht der (§. 83.) auf der schiefen Ebene liegenden Masse = 360 Pfund, die Verhältniß LM : MN = 3 : 4, und die Reibung betrage $\frac{1}{3}$ vom senkrechten Druck: man soll die Kraft nach RI berechnen, welche der Last sammt der Reibung das Gleichgewicht hält.

Ich will die erforderliche Kraft K nennen; wenn RQ senkrecht auf SN ist, so druckt das Gewicht (360 Pfund) eben so nach RQ als wenn die ganze Masse in R beysammen und solche längst einer schiefen Ebene RQ hinabzugehen, oder auf die Stelle Q zu drücken genöthigt wäre; es ist also der Druck nach

$$RQ = \frac{RS}{RQ} \cdot 360 = \frac{MN}{SN} \cdot 360 \text{ (§. 82.)}$$

$$= \frac{4}{5} \cdot 360 = 288 \text{ Pfund.}$$

Nun kehre man die Figur um, so daß LM in eine horizontale, und RI in eine lothrechte Lage kommt, so läßt sich der von dem Druck K nach RQ herrührende Druck so ansehen, als ob ein Gewicht = K auf der schiefen Ebene RQ herabzurütschen strebte, und die hierzu verwendete Kraft ist

$$= \frac{TR}{QR} \cdot K \text{ (§. 82.)} = \frac{LM}{MN} \cdot K = \frac{3}{4} K;$$

also verursachen das Gewicht (360 Pfund) und die erforderliche Kraft K zusammengenommen, einen auf LN senkrechten Druck nach

$$RQ = 288 \text{ Pfund} = \frac{3}{4} K;$$

und

und hieraus entsteht bey Q eine Reibung

$$= \frac{288 + \frac{3}{4} K}{3};$$

diese kommt nun noch mit zur Last, muß aber vorher noch reducirt werden; weil nämlich ein auf der schiefen Ebene liegendes Gewicht, das mit der Kraft:

$$\frac{288 + \frac{3}{4} K}{3}$$

längst der Ebene herabzurütschen strebt,

$$= \frac{LN}{LM} \cdot \frac{288 + \frac{3}{4} K}{3}$$ also hier:

$$= \frac{1440 + \frac{15}{4} K}{9} = 160 + 0{,}417 \cdot K$$

seyn müßte, so ist die Reibung hier als ein eben solches Gewicht anzusehen, und so ist also die gesammte in Rechnung kommende Last

$$= 360 + 160 + 0{,}417 \cdot K;$$

Demnach hat man nunmehr (§. 83.)

$$K : (360 + 160 + 0{,}417 \cdot K) = LM : MN = 3 : 4$$

oder: $4K = 1560 + 1{,}251 \cdot K$

und nun:

$$K = \frac{1560}{2{,}75} = 567{,}3 \text{ Pfund.}$$

Ohne Betrachtung der Reibung hätte man (§. 83.) schlechthin $K = \frac{3}{4} \cdot 360 = 270$ Pfund, welches noch nicht die Hälfte der wirklich erforderlichen Kraft ist.

Sollte die Kraft K grade nur groß genug seyn, die Last zu erhalten, ohne zugleich die Reibung aufzuheben, so wäre die zu erhaltende Last nur als ein Gewicht

$$= 360 - (160 + 0{,}417 \cdot K) = 200 - 0{,}417\,K$$

anzusehen, und man hätte:

$K : (200$

$K : (200 - 0{,}417 \cdot K) = 3 : 4$; also

$4K = 600 - 1{,}251 \cdot K$ und nun $K = 218$ Pf.

106 b) Man ersieht hieraus, wie wichtig die Bestimmung der **Reibung** oder der **Friktion** ist. Vollständige Sammlung hierhin gehöriger Versuche findet man in des Hrn. **Prony** Archit. Hydraulika I. Th. 2ter B. s. auch Hrn. **Metternichs** Abhandlung von dem Widerstande der Reibung.

In der Ausübung hat man bey Maschinen allemal mit glatten Flächen zu thun, weil sich solche bey ihrem Gange gar bald von selbsten abschleifen; man kommt überdas mit Fett, Oehl, Seife u. d. g. zu Hülfe. Ich bin unter dieser Voraussetzung der Wahrheit immer nahe genug gekommen, wenn ich bey fortrütschender Bewegung

I. { bey Holz auf Holz, — — — Eisen } die Reibung $= \frac{1}{4}$ des Drucks.
{ — Eisen auf Eisen }
{ — Eisen auf Messing $= \frac{1}{6}$ des Drucks

angenommen habe.

II. Bey umlaufenden horizontalliegenden Zapfen aber beträgt die Reibung nur etwa halb soviel, d. i. $\frac{1}{8}$ oder $\frac{1}{12}$ des Drucks.

III. Bey in einander greifenden Räderwerk ist die Reibung an den Zähnen, Kämmen oder Triebstöcken noch geringer, und beyläufig nur $\frac{1}{4}$ so groß als no. I.

106 c) Die Festigkeit der Körper, d. h. die Bestimmung der Kraft, welche angewendet werden muß, um dem Zusammenhang der Theile des Körpers genau das Gleichgewicht zu halten, so daß bey fernerer Vergrößerung der Kraft der Körper zerreißen müßte, läßt sich eben so wenig für alle Fälle in völliger Genauigkeit bestimmen, als die Reibung. Folgende Angaben sind von **Muschenbröck**.

I. Festigkeit der Seilen.

Dicke des Seils.	Festigkeit.
Linien.	Pfund.
6	190
8	330

Dicke des Seils. Linien.	Festigkeit. Pfund.
10	540
12	750
13	840
15	990
16	1030
20	2080
24	3000
30	4730
36	7900

II. Festigkeit verschiedener Holzarten.

In Gestalt eines Parallelepipedums, wovon jede Seite der quadratischen Grundfläche 0,27 Rhl. Zoll hatte, zerriß längst den Fibern:

	Pfund.
Das Buchenholz von =	1250
— Eschenholz von =	1250
— Eichenholz von =	1150
— Lindenholz von =	1000
— Erlenholz von =	1000
— Ulmenholz von =	950
— Tannenholz von =	600
— Fichtenholz von =	550

III. Festigkeit verschiedener Metallen.

Cylindrische Fäden im Durchmesser $\frac{1}{10}$ Rhl. Zoll dick zerrissen:

	Pfund.
Aus Gold von = =	500
— Eisen von = =	450
— Silber von = =	370
— Messing von = =	360
— Rothen Kupfer von =	$299\frac{1}{4}$
— Zinn von = =	$49\frac{1}{4}$
— Bley von = =	$29\frac{1}{4}$

Bey

Bey der Anwendung dieser Bestimmungen, welche auf die absolute Festigkeit gehen, muß auf die **Momente** der brechenden Kräfte und die **Momente** der Festigkeit gehörige Rücksicht genommen werden. Ueberhaupt fehlt es bey solchen Arten des Bruchs an hinlänglichen Versuchen im Großen.

106 d) **Unter der eigenen Schwere, specifischen Schwere eines Körpers** versteht man die Verhältnißzahl, durch die sich sein Gewicht ausdrucken läßt, wenn das Gewicht eines andern Körpers von eben dem kubischen Inhalt dabey als Einheit gebraucht wird. Ich will hier nur ein kleines Verzeichniß mittheilen:

Tafel der specifischen Schwere einiger Körper, die des Regenwassers bey mittler Temperatur zur Einheit angenommen.

Alabaster			1,872
Alaun			1,714
Ahorn			0,755
Bley, englisches	11,325	teutsches	11,310
Bergchrystall			2,650
Buchbaum			0,854
Burbaum			1,031
Baumöhl			0,913
Cedernholz			0,613
Eisen			7,614
Eschenbaum		0,734 bis	0,845
Eichenholz		0,87 bis	0,93
Fraueneis			2,322
Gold		18,166 bis	19,640
Glas, das feinste	3,150	gem. grün	2,620
Helfenbein			1,825
Jaspis			2,666
Kupfer, Japanisches			9,000
K. Schwedisches			8,784
Kieselstein, gemeiner			2,542
Kochsalz			2,148

Luft			$\frac{1}{850}$
Leinöhl			0,932
Messing,	gegossenes	8,000	geschlagenes 8,349
Queckſilber,	teutſches	14,000	engliſches 13,593
Regenwaſſer			1,000
Silber, feines			11,091
Stahl			7,7 bis 7,8
Tannenholz			0,550
Ulmenbaum			0,600
Zinn, reines			7,320

Inzwiſchen muß ich bemerken, daß die Angaben bey den verſchiedenen Holzarten beynahe gar nicht zu gebrauchen ſind, weil deren ſpec. Schwere ſchlechterdings unbeſtimmt iſt, und blos von dem Grad ihrer Trockenheit abhängt. Bey einem einſtmalen von mir angeſtellten Verſuch fand ich alles unrichtig, bis ich bey Unterſuchung der ſpec. Schwere des dabey gebrauchten ſehr trocknen Eichenholzes ſolche nur = 0,66 fand.

106 e) Statt deſſen, was **Wolf** von §. 107. bis zu Ende der Mechanik vorträgt, erwähne ich nur folgendes:

Um Laſten zu wältigen, oder ſie in eine zu einem beſtimmten Zweck erforderliche Bewegung zu ſetzen, benutzt man **Dämpfe, Luft, Waſſer, Gewichte, Federn, Menſchen** und **Thiere**, die dann durch **Stricke** oder **Seilen, Ketten, Hebel, Räderwerk, Stangenkünſte** auf ſehr mannigfaltige Weiſe mit der Laſt in Verbindung geſetzt werden. Man hat daher **Dampfmaſchinen, Windmühlen, ober- und unterſchlägige Waſſerräder, Rückwirkungsmaſchinen, Waſſerſäulenmaſchinen, Gopelkünſte, Tritträder**; und dieſe betreiben **Mahlmühlen, Bohrmühlen, Schneidemühlen, Stampfmühlen, Schleif- und Polirmühlen, Papiermühlen, Hammerwerke, Drathzüge, Blaſebälge, Waſſerhebungsmaſchinen** u. d. m.

Der in dieſem Lehrbuch bisher ertheilte Unterricht kann nur dienen, die Möglichkeit ſolcher Maſchinen zu begreifen, Begierde nach Schriften zu erregen, die davon ausführlichen Unterricht ertheilen, zur Aufſuchung und Beſichtigung ſolcher Maſchinen zu reizen, und ſie ſelbſten mit Verſtand

und

und Nutzen! zu besehen. Sich aber auf wenigen Blättern in eine brauchbare Beschreibung dieser Maschinen einlassen zu wollen, wäre eine ganz vergebliche Bemühung, die nothwendig mißlingen müßte, daher ich mich auch hierbey nicht weiter aufhalte.

106f) Nur einige allgemeine Erinnerungen, die das Maschinenwesen überhaupt betreffen, muß ich hier noch beybringen.

Wenn nämlich an einem Arm eines Hebels eine Last angebracht ist, und nun am andern Arm zur Bewegung der Last eine bestimmte Kraft angebracht werden soll, so wird die Länge dieses Arms oder die Entfernung der Kraft von der Umdrehungsaxe von Unverständigen gewöhnlich für gleichgültig gehalten. Nur ein einziges Beyspiel mag das Falsche dieses Satzes beweisen. Man gedenke sich z. B. eine **Erdwinde**, d. i. einen Haspel mit einer stehenden Welle, woran 4 Mann in der Entfernung von 5 Fus von der Umdrehungsaxe einen Weg von $1\frac{3}{4}$ Fus in jeder Sekunde zurücklegen können; nun soll die Entfernung der Arbeiter von der Axe bis zu 25 Fus vergrößert werden, damit sie desto schneller drehen können: sollte diese Verlängerung des Arms wohl vortheilhaft seyn? Wenn eine ganze Umdrehung jetzt in eben der Zeit wie vorhin geschehen sollte, so müßten sich die Arbeiter 5 mal so geschwind als zuvor, also mit einer Geschwindigkeit von $8\frac{3}{4}$ Fus in einer Sekunde fortbewegen, d. h. sie müßten mit der größten Schnelligkeit laufen, die kein ganz Lastloser Mensch auszuhalten vermag; der Effekt der Maschine wird also offenbar durch diese Verlängerung des Arms beträchtlich vermindert. Eben das findet bey Wasserrädern statt. Treibt z. B. ein Wasserstrohm, dessen Geschwindigkeit = 15 Fus wäre, die Schaufeln eines unterschlägigen Wasserrades mit einer Geschw. von 9 Fusen, und wäre sein Halbmesser = 6 Fus, so wäre es augenscheinlich schädlich, den Halbmesser dieses Rades bey der schon bestimmten Last = 12 Fus machen zu wollen; denn es wäre unmöglich, daß das Wasser die Schaufeln, **auch bey gänzlichen Mangel alles Widerstandes**, mit einer größern Geschw. als es selbsten hat, herumtreiben könnte, also auch unmöglich, daß die Schaufeln jetzt mit einer Geschwindigkeit von 18 Fus in 1 Sek. herumlaufen könnten, wie doch erfordert würde, wenn jetzt in eben der Zeit wie vorher das Rad einen Umgang machen sollte.

Es ist also von äußerster Wichtigkeit, durch Berechnungen, welche die höhere Mathematik lehrt, die vortheilhaftesten Abmessungen einer Maschine zu bestimmen.

Ausserdem ist zu bemerken, daß keine Maschine gleich bey der ersten Anwendung der Kraft in diejenige Bewegung geräth, welche sie nachher behält, sondern zur Erreichung einer bestimmten Geschwindigkeit auch eine bestimmte Zeit nöthig ist, wie überhaupt nie plötzlich aus einer kleinern Bewegung eine größere entsteht, sondern die kleinere allemal erst nach und nach beschleunigt werden muß, bis irgend eine wirklich größere daraus erfolgt, so daß zwischen zwoen Geschwindigkeiten alle mögliche dazwischen denkbare Geschwindigkeiten vorausgehen müssen, daher zu diesem Uebergang allemal eine der Kraft angemessene Zeit erfordert wird. Daraus wird der Nachtheil begreiflich, welchen ungleichförmigen Gang einer Maschine für ihren Effekt hat. Diesen ungleichförmigen Gang zu heben, ist also von Wichtigkeit, und dazu dienen die **Schwungräder** und **Schwungkolben**. Ihr Nutzen ist vorzüglich bey solchen Maschinen wichtig, wo abwechselnd immer wieder von neuem ruhige Massen in Bewegung gesetzt werden müssen, oder wo auch der Widerstand sehr abwechselnd ist. Aber das Gewicht dieser Schwungmassen ist wieder so wenig gleichgültig, als es vorhin die Entfernung der Kraft von der Umdrehungsaxe war. Der Vortheil solcher Schwungmassen besteht nämlich darin, daß umgekehrt eine sehr beträchtliche Masse allemal Zeit nöthig hat, um einen Theil ihrer Geschwindigkeit zu verliehren, desto mehr, je größer das Gewicht der Masse ist. Gegentheils braucht aber auch nach erfolgter Verminderung der Geschw. eine solche Masse wieder nach Verhältniß ihres größeren Gewichts länger Zeit, um die verlohrne Geschwindigkeit wieder zu erlangen, und zu diesem Nachtheil kommt noch die damit verbundene Vergrößerung der Reibung, die so groß werden könnte, daß die Kraft gar nicht vermögend wäre, die Maschine in Bewegung zu setzen. Es ist also auch bey den Schwungrädern wichtig, ihre vortheilhaftesten Abmessungen anzugeben. Ich habe die hierher gehörige Theorie in der Fortsetzung meines Lehrbuchs der Hydraulik umständlich vorgetragen.

Anfangs-Gründe der Hydrostatik. *)

Erklärung.

1.

Die Hydrostatik ist eine Wissenschaft von den Gesetzen des Gleichgewichts flüßiger Massen unter einander und in Verbindung mit festen Körpern.

Erklärung.

2. Die Materie wird flüßig genennet, wenn ihre Theilchen nicht feste zusammenhangen, sondern sich leicht trennen lassen.

Anmerkung.

3. Die Eigenschaft der flüßigen Körper erkennet man, indem sie andere Körper sich frey durch sich bewegen lassen, durch ihre eigene Schwere in Tropfen zertheilet werden, die Figur eines jeden Gefäßes im Augenblicke annehmen, und wenn sie in keinem Gefäße sind, zerfließen.

*) Hierhin gehörige Schriftsteller;

Die Herrn **Kästner** und **Karsten**, in den schon zur Mechanik angeführten Schriften. Hr. **Bürja**, Grundlehren der Hydrostatik. Hr. **Schleicher**, Einleitung in die Hydrostatik. Die Herrn **Prony** und **de la Grange**, in den schon zur Mechanik erwähnten Schriften. Herr **Euler** de l' equilibre des fluides (Mem. de l' Acad. des sc. de Prusse 1755.) Hr. **Bossüt** in seiner Hydrodinamik 1te Abtheil. u. d. m. Schriften über einzele hierher gehörige Gegenstände werden im Texte genennt.

Erklärung.

4. Ein fester Körper ist hingegen, dessen Theilchen dergestalt zusammenhangen, daß sie nicht ohne Mühe sich trennen lassen.

Erklärung.

5. Ein Körper von leichter Art ist der, welcher mit einem anderen Körper einerley Grösse haben kann, aber ein kleineres Gewicht.

Erklärung.

6. Hingegen ein Körper von schwererer Art ist, welcher mit einem andern einerley Größe und ein größeres Gewicht haben kann.

Anmerkung.

7. Wenn eine bleyerne Kugel so viel Raum einnimmt, als eine steinerne; so ist sie doch schwerer, als die steinerne. Derowegen ist das Bley ein Körper von schwererer Art als der Stein, und hingegen der Stein ein Körper von leichterer Art, als das Bley.

Erklärung.

8. Eine widerstehende Kraft wird diejenige genennet, welche die Würkung einer andern entweder ganz, oder zum Theil zu nichte machet.

Grundsatz.

9. Die schweren Körper drucken andere, auf denen sie liegen, und suchen sie aus ihrer Stelle zu jagen (§. 22. Mech.)

Grundsatz.

10. Wenn ein Körper schwerer ist, als ein anderer; so drucket er auch gewaltiger niederwärts.

Grundsatz.

11. Wenn zwey oder mehrere Körper einerley Schwere haben: so drucken sie gleichviel.

Grund-

Grundsatz.

12. Wenn zwey Körper, oder mehrere einerley Grösse, aber verschiedene Schwere haben; so wendet der schwerere mehr Kraft an zum Drucken, als der leichtere.

Grundsatz.

13. Wenn zwey Körper einander mit gleicher Gewalt, aber nach entgegengesetzten Directionslinien drucken; so folget keine Bewegung. Wenn aber der eine etwas mehr drucket, als ihm Widerstand geschiehet; so geschiehet die Bewegung nach der Directionslinie des stärkeren.

Zusatz.

14. Also erhalten prismatische lothrechte Wassersäulen von gleicher Höhe und gleicher Dicke einander im Gleichgewicht, wie Fig. 1. I.

14a) Eben das Gleichgewicht muß auch noch statt finden, wenn gleich die eine oder auch beyde Wassersäulen einen schiefen Winkel mit dem Horizont machten, wie Fig. 3 und 4, weil das Bestreben längst der schiefen Röhre herabzusinken in eben dem Maaße kleiner ist, in welchem die Menge der Elemente, welche dieses Bestreben ausüben, durch die schiefe Lage vergrößert wird (Mech. §. 82.) 3. 4.

14b) Wenn also AB (Fig. 5.) ein mit einem wagrechten Deckel vollkommen verschlossenes Gefäß ist, so ist es in Rücksicht auf erfolgende Pressungen völlig gleichgültig, in welcher Stelle des Deckels eine prismatische Röhre CD von bestimmter Weite eingesetzt und mit Wasser gefüllt wird, wenn sie nur allemal bis an eine und eben die Horizontalfläche angefüllt wird, sie mag übrigens lothrecht oder schief eingesetzt werden; und in allen solchen Röhren, wenn mehrere zugleich eingesetzt werden, müssen also die Wassersäulen einander im Gleichgewicht erhalten, weil sie gleiche Pressungen auf den Wasserspiegel im Gefäß bewirken. Sobald demnach eine einzige Röhre DC eingesetzt worden, muß jede Stelle des Deckels, die dem Querschnitt oder der Grundfläche dieser Röhre gleich ist, von unten hinauf einen Druck leiden, 5.

welcher dem Druck der in der Röhre befindlichen Wassersäule gleich ist, weil man, diesem Druck das Gleichgewicht zu halten, statt der durch ihre Festigkeit widerstehenden Stelle des Deckels, sobald sie weggenommen wird, eine Röhre bis auf die Höhe erwähnte Höhe CD einsetzen und mit Wasser füllen muß. Jede Stelle des Deckels also, die $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ so groß als die Weite der Röhre ist, leidet einen Druck von unten hinauf, welcher $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ so groß als das Gewicht einer Wassersäule, deren Grundfläche die der Röhre, und deren Höhe die lothrechte Höhe der Röhre ist. Und so leidet der ganze Deckel einen Druck von unten hinauf, welcher der Summe aller dieser Pressungen gleich ist, d. i. so groß, als das Gewicht einer Wassersäule von der Höhe CD, deren Grundfläche die Fläche des ganzen um die eingesetzte Röhre herum liegenden Deckels wäre.

Zusatz.

5. 15. Daraus läßt sich nun leicht herleiten, daß der Boden des weiten Gefäßes eben den Druck leidet, als wenn dieses Gefäß bis auf die Höhe BF durchaus in gleicher Weite mit Wasser angefüllt wäre. (4.)

15a) Auf jede Stelle des Bodens B (Fig. 5.) fällt also, wenn DC voll Wasser ist, ein Druck, welcher dem Gewicht einer Wassersäule von der Höhe BF gleich ist, und deren Grundfläche die erwähnte Stelle wäre. Gedenkt man sich also im Boden ein kurzes Rohr, das unter die Bodenfläche herabgeht und die Weite α hätte; und hätte dieses Rohr unten einen Boden, so litte dieser Boden einen Druck so groß als das Gewicht einer Wassersäule, deren Grundfläche α, und Höhe die Tiefe dieses Bodens unter der obersten Stelle D wäre. Eben so kann man sich nun dieses angesetzte Rohr unterhalb wieder mit einem weiten Gefäß verbunden gedenken; es wäre nun wieder eben so gut, als ob dieses Gefäß mit einer prismatischen Röhre verbunden wäre, die bis an D hinaufreichte, und der Boden dieses Gefäßes hätte also wieder einen Druck auszuhalten, welcher durch das Gewicht einer Wassersäule von der Weite dieses untersten Gefäßes und der ganzen Höhe bis D hinauf bestimmt würde u. s. w.

15b) Jedes Gefäß, von welcher Gestalt es auch seyn mag, läßt sich als ein solches betrachten, das aus einer Menge auf einander stehender prismatischer Gefäße von grös-

serer und kleinerer, auch unendlich kleiner Höhe zusammengesetzt wäre. Demnach gilt von jedem auch irregulären Gefäß der Satz: **Wenn ein Gefäß, von welcher Gestalt man will, mit Wasser angefüllt ist, so ist der Druck, den jede Querschnittsfläche im Gefäß leidet, dem Gewicht einer prismatischen Wassersäule gleich, deren Grundfläche die erwähnte Querschnittsfläche und deren Höhe die Höhe des Wasserspiegels über dem Querschnitt wäre.**

Zusatz.

16. Der Satz des vor. §. ist das für die Hydrostatik, was die Lehre vom Hebel für die Statik ist. Beyde beruhen auch im Grunde auf einerley Princip, daß **nämlich Massen gleiches Bestreben zur Bewegung haben, wenn die Produkte aus den Massen in ihre Geschwindigkeiten, welche sie im Fall einer entstehenden unendlich kleinen Bewegung zugleich annehmen müßten, gleich groß sind.** Sind diese Bestrebungen, bey einerley 7.
Größe einander entgegengesetzt, so muß Gleichgewicht erfolgen. Es sey z. B. die Röhre A B C zu beyden Seiten von B gleich hoch mit Wasser angefüllt; m n, M N seyen unendlich dünne Wasserschichten, die Querschnitte n m, N M mögen nun, welche Verhältniß man will, gegen einander haben, z. B. w : W; so müssen die Elemente in n m im Fall einer unendlich kleinen Bewegung die Geschwingkeit $\frac{W}{w}$. c annehmen, wenn die in M N die Geschwindigkeit c annehmen; die Schwerkraft muß also zu gleicher Zeit den Elementen in n m eine Anfangsgeschw. geben, welche

$$= \frac{W}{w} \text{ . c ist, und denen in M N eine}$$

Anfangsgeschw. = c; nun sey die Anzahl von Elementen in M N = E, so ist die Anzahl von Elementen in

m n =

$$mn = \frac{w}{W} E,$$

also verhält sich das Bestreben zur Bewegung der Schichte mn unterwärts zu dem Bestreben der Schichte MN unterwärts, wie

$$\frac{W \cdot c}{w} \cdot \frac{w \cdot E}{W} \text{ zu } c \cdot E \text{ d. i. wie 1 zu 1}$$

So haben also alle in einerley wagrechter Linie liegende Wasserschichten in beyden Schenkeln gleiches Bestreben, sich unterwärts zu bewegen, und wenn daher in beyden Schenkeln die Oberflächen in einerley wagrechter Ebene liegen, so muß ein Gleichgewicht eintreten, weil man in diesem Fall gleichviele Schichten hat, die alle einerley entgegengesetztes Bestreben zur Bewegung haben. (L.)

Zusatz.

17. Man kann daher auch hier wie (Mech. §. 48a) sagen: **Wassermassen, die so mit einander verbunden sind, daß die eine steigen muß, indeß die andere sinkt, erhalten einander im Gleichgewicht, wenn ihre Momente gleich groß sind.**

Die Momente sind nämlich auch hier wie beym Hebel Zahlen, welche die Verhältnisse der Produkte aus den Gewichten in ihre Geschw. ausdrucken; und der noch jetzt sehr vielen so sonderbar vorkommende Satz (§. 15b) ist also nichts anders, als das allgemeine Fundamentalgesetz der Statik auf flüßige Massen angewendet. (L.)

Lehrsatz.

18. **Wenn zwey Röhren, daraus der flüssige Körper aus einer in die andere kommen kann, mit flüßigen Materien von verschiedener Schwere gefüllet werden: so verhält sich bey dem Gleichgewichte die Höhe des Körpers**

von

von schwererer Art zur Höhe des Körpers von der leichteren Art, wie die Schwere des leichteren zu der Schwere des schwererern in einem gleich großen Stücke.

Beweis.

Die Wahrheit dieses Satzes folgt unmittelbar aus (§. 15b).

Lehrsatz.

19. Wenn ein Körper von einer schwereren Art, als eine flüßige Materie ist, in derselben eingetauchet wird, verlieret er so viel von seiner Schwere, als die flüßige Materie wieget, die er ausjaget.

Beweis.

Es wird z. E. ein Cubikschuh Bley im Wasser eingetauchet; so soll erwiesen werden, daß er so viel von seiner Schwere verlieret, als ein Cubikschuh Wasser wieget. Der Cubikschuh Wasser, den das Bley ausjaget, wurde von dem umstehenden Wasser in seiner Stelle erhalten. Wenn nun das Bley in seine Stelle kommt; so muß von dem umstehenden Wasser eben so viel von seiner Schwere erhalten werden, als das Wasser wieget, so daraus gejaget worden. Dannenhero gehet dem Bleye so viel von seiner Schwere ab, als ein Cubikschuh Wasser wieget. W. Z. E.

19a) Um mit dem Satz (15b) im Zusammenhange zu bleiben, kann man die Wahrheit des vorstehenden Lehrsatzes auch daraus begreifen, daß man sich jeden Körper aus unendlich vielen lothrechten Prismen zusammengesetzt gedenken kann; jedes solches Prisma leidet einen Druck von unten hinauf und von oben herab von Wassersäulen, deren Unterschied den Raum ausmacht, welchen das Prisma ausfüllt; so ist also der Unterschied des gesammten Drucks, welchen der eingetaugte Körper von unten hinauf und von oben herab leidet, eine Summe von Wasserprismen, deren kubischer

Inhalt

Inhalt zusammen dem kubischen Inhalt des eingetaugten Körpers oder seines eingetaugten Theils gleich ist.

Zusatz.

20. Wenn nun ein Cubikschuh Eisen so viel von seiner Schwere im Wasser verlieret, als ein Cubikschuh Bley, und doch ein Cubikschuh Bley schwerer ist, als ein Cubikschuh Eisen; so ist klar, daß das Eisen und überhaupt ein jeder Körper von einer leichtern Art in einerley flüßigen Materie, z. E. im Wasser, einen grössern Theil von seiner Schwere verlieret, als das Bley oder überhaupt ein jeder Körper von einer schwereren Art.

Zusatz.

21. Wenn also gleich ein Körper von einer schwereren Art, z. E. Bley, mit einem Körper von einer leichteren Art, z. E. Eisen, in der Luft die Wage hält; so halten sie doch nicht im Wasser, oder in einer andern flüßigen Materie einander die Wage, sondern das Bley giebet einen Ausschlag.

Zusatz.

22. Weil ein Cubikschuh Bley im Wasser so viel von seiner Schwere verlieret, als ein Cubikschuh Wasser wieget, uud hingegen im Weine ihm so viel von seiner Schwere abgehet, als ein Cubikschuh Wein wieget; ein Cubikschuh Wasser aber schwerer ist, als ein Cubikschuh Wein; so muß das Bley mehr im Wasser, als im Weine, und also ein jeder Körper mehr von seiner Schwere in einer flüßigen Materie von einer schwereren, als von einer leichteren Art verlieren.

Zusatz.

23. Daher bleibt ein Pfund Bley nicht im wagerechten Stande mit einem Pfunde Bley, wenn eines ins Wasser, das andere in Wein gehangen wird. Oder überhaupt zwey Körper von einerley Art und Grösse, bleiben

ben nicht im wagerechten Stande, wenn sie in flüßige Materien von verschiedener Schwere gehangen werden.

23 a) Hierauf gründet sich die Verfertigung der **Soolwagen** oder **Salzspindeln**; es sind dieses Werkzeuge, welche eben darum, weil Wasser eine desto größere specifische Schwere hat, je mehr Salz es in sich aufgelöst enthält, durch ihr mehr oder weniger tiefes Einsinken in einer Soole oder Salzwasser, oder auch durch das kleinere oder größere Gewicht, womit man sie beschweren muß, um bis zu einer bestimmten Stelle niederzusinken, die Reichhaltigkeit des Salzwassers zu bestimmen dienen. Alles hierhin gehörige findet man vollständig in meiner **Anleitung zur Salzwerkskunde.**

Zusatz.

24. Die Schwere einer flüßigen Materie verhält sich zu der Schwere eines andern Körpers von gleicher Grösse, wie das Theil der Schwere, welches ihm in derselben abgehet, zu seiner ganzen Schwere. Z. E. die Schwere des Wassers verhält sich zu der Schwere des Eisens, wie das Theil der Schwere, welches ein Cubikschuh Eisen im Wasser verlieret, zu seiner ganzen Schwere.

Aufgabe.

25. Das Gewicht einer jeden flüßigen Materie zu finden, z. E. des Weines in einem Fasse.

Auflösung.

1. Hänget einen Cubikzoll Bley in die flüßige Materie, z. E. in den Wein, und merket, wie viel er von seinem Gewichte verlieret; so wisset ihr, wie viel ein Cubikzoll von der gegebenen flüßigen Materie wieget (§. 19.).

2. Suchet durch Hülfe der Geometrie den körperlichen Inhalt der flüßigen Materie, z. E. des Weines in dem Fasse (§. 215. Geom.); so könnet ihr

3. durch die Regel Detri (§. 85. Arithm.) das Gewicht der ganzen flüßigen Materie finden.

Z. E. ein Cubikschuh Bley nach dem Pariser Maasse verlieret im Wasser 2 Pf. Ihr sollet finden, wie schwer 345 c′ Wasser sind.

1—72—345
72
690
2415
Gewicht des Wassers 24840

Zusatz.

26. Wenn euch das Gewicht einer flüßigen Materie gegeben wird; so könnet ihr auf eben eine solche Art ihren körperlichen Inhalt finden. Z. E. Man fraget, wie viel 325000 Pf. Wasser Raum einnehme.

72—1—325000
1
325000

x 6
Bzzz
4zB84
Bz5000 | 4513 3/5′ körperlicher Inhalt des Wassers.
zzzzz
zzz

Aufgabe.

27. Die Verhältniß der Schwere einer flüßigen Materie zu der Schwere einer andern flüßigen Materie von gleicher Menge zu finden.

Auflösung.

1. Suchet, wie viel ein Cubikzoll Stein in einer flüssigen Materie, z. E. im Wasser, von seiner Schwe-

Schwere verlieret; so wisset ihr, wie viel ein Cubikzoll Wasser wieget (§. 19.).

2. Eben so suchet, wie viel ein Cubikzoll Stein in einer andern flüßigen Materie, z. E. im Oel, verlieret; so wisset ihr, wie viel ein Cubikzoll Oel wieget (§. 19.).

Und also verhält sich die Schwere des Wassers zu der Schwere des Oeles, wie das Gewichte, welches ein Cubikzoll Stein im Wasser verlieret, zu dem Gewichte, welches eben derselbe im Oele verlieret.

Z. E. Ein Cubikschuh Stein verlieret im Wasser 72 Pf., im Oele 66 Pf. Derowegen verhält sich die Schwere des Wassers zu der Schwere des Oels, wie 72 zu 66, oder wie 12 zu 11 (§. 59. Arith.)

Aufgabe.

28. Aus dem gegebenen Gewichte eines Körpers, der aus zwey verschiedenen Materien zusammengesetzet worden, zugleich mit dem Gewichte, welche er in einer flüßigen Materie verlieret, die Schwere der beyden Materien insbesondere zu finden, aus deren Vermischung er entstanden.

Auflösung.

1. Machet durch die Erfahrung aus, wie viel z. E. 1 Pfund von denen beyden Materien in der gegebenen flüßigen Materie, z. E. im Wasser von seiner Schwere verlieret; so könnet ihr

2. durch die Regel Detri ferner finden, wie viel jede von beyden Materien von ihrer Schwere verlieren würde in eben derselben flüßigen Materie, z. E. dem Wasser, wenn jede die Schwere des ganzen gegebenen Körpers hätte.

3. Ziehet das kleinere verlohrne Gewichte von dem grössern ab; und merket den Unterscheid, welcher

andeutet, wie viel die Materie von der leichteren Art mehr von ihrer Schwere verlieret, als die Materie von der schwereren Art.

4. Ziehet ferner das Gewichte, welches die Materie von der schwereren Art verlieren würde, von dem Gewichte ab, welches der gegebene Körper verlieret, und merket abermals den Unterscheid, welcher andeutet, wie viel der Körper mehr als die schwere Materie von seinem Gewichte verlieret.

5. Wenn ihr nun zu dem ersten Unterscheide der Schwere des gegebenen Körpers und dem andern Unterscheide die vierte Proportionalzahl suchet (§. 85. Arithm.); so ist dieselbe das Gewichte der Materie von der leichteren Art. Derowegen, wenn ihr

6. dieses von dem ganzen Gewichte des Körpers abziehet; bleibet das Gewichte der Materie von der schwereren Art übrig.

Also ist gefunden, was man verlangte.

Exempel.

Man hat einen Klumpen von 120 Pf. aus Zinn und Bley zusammen vermischet, welcher in dem Wasser 14 Pfund verlieret. Ihr sollet finden, wie viel Pfund Bley und wie viel Pfund Zinn in demselben sind. Die Erfahrung lehret, daß 37 Pfund Zinn im Wasser 5 Pf. und 23 Pf. Bley im Wasser 2 Pf. von ihrer Schwere verlieren.

37—5—120

5

600/37 Pf.

23—2—120

2

240/23 Pf.

600

$$\frac{600-240}{37\quad 23} = \frac{13800-8880}{851} = \frac{4920}{851}$$

$$14-\frac{8880}{851} = \frac{11914-8880}{851} = \frac{3034}{851}$$

$$4920-3034-120$$

$$41 \qquad 1 \qquad (120$$

2
26
3034 | 74 Pf. Schwere der Materie von der leichteren Art.
xxx
4

120 Pf. Schwere des ganzen Körpers

46 Pf. Schwere der Materie von der schwereren Art.

Anmerkung.

29. Auf eben solche Weise kann die Aufgabe aufgelöset werden, welche der Hydrostatik den Ursprung gegeben, und von dem Archimede zuerst aufgelöset worden; wie viel nemlich der Goldschmidt Silber unter die Krone des Königs zu Syracusa genommen, welche 18 Pfund schwer war. Denn weil 18 Pfund Gold im Wasser 1 Pf., hingegen 18 Pfund Silber $1\frac{1}{2}$ Pf. und endlich die Krone $1\frac{1}{2}$ von ihrer Schwere verlohren; so wurde gefunden, daß zu der Krone 12 Pfund Silber und 6 Pf. Gold genommen worden.

Lehrsatz.

30. Ein jeder Körper, welcher von schwererer Art ist, als eine flüßige Materie, wendet in derselben so viel Kraft an, niederzusteigen, als sein Gewichte die Schwere der flüßigen Materie überschreitet, die eben so viel Raum wie er einnimmt.

Beweis.

Denn er verlieret so viel von seiner Schwere in der flüßigen Materie, als die Schwere des Theiles derselben

ist, der eben so viel Raum einnimmt (§. 19.) Derowegen kann er nur die übrige Kraft zum Niedersteigen anwenden. W. Z. E.

Zusatz.

31. Die Kraft also, welche den Körper z. E. im Wasser erhalten will, darf nicht grösser seyn, als der Körper schwerer ist, als eben so viel Wasser. Z. E. 37 Pf. Zinn verlieren im Wasser 5 Pf. Also bedürfet ihr nur 32 Pf. Kraft, sie in dem Wasser zu erhalten.

Anmerkung.

32. Also kann man aus der Grösse und Schwere eines Körpers finden, wie viel Kraft erfordert wird, ihn unter dem Wasser aufzuheben.

Z. E. Die Last ist 104500 Pf. ihre Grösse 340. Ein Cubikschuh Wasser, darinnen sie versunken, wieget 72 Pf.

340
72

680
238

24480 Schwere des Wassers, so der Last gleichet.
104500 Schwere der Last.

80020 erhaltende Kraft.

Zusatz.

33. Da nun das Gewicht des Körpers die Schwere der flüßigen Materie, die er ausgejaget, mehr überschreitet, wenn sie von leichterer, als wenn sie von schwererer Art ist (§. 22.), so muß er auch in jener geschwinder, als in dieser untersinken. Z. E. eine bleyerne Kugel sinket im Weine geschwinder unter als im Wasser.

Lehrsatz.

34. Wenn ein Körper von leichterer Art ist, als eine flüßige Materie, z. E. als Wasser;

ser; so tauchet er sich so tief ein, bis das Wasser, welches so viel Raum einnimmt, als der eingetauchte Theil, so schwer ist, als der ganze Körper.

Beweis.

Es sey z. E. der Körper, so eingetauchet wird, ein hölzerner Cylinder. Bildet euch ein, das Wasser bestehe aus vielen Cylindern, die alle einander die Wage halten, weil sie einerley Höhe haben (§. 15.). Wenn ihr nun den hölzernen Cylinder auf das Wasser leget; so wird der Cylinder von Wasser unter ihm mehr drucken, als die zu den Seiten widerstehen (§. 10.), und er wird dannenhero das Wasser zur Seiten in die Höhe treiben (§. 13.), folgends sich eintauchen. So bald er aber so viel Wasser ausgejaget, als seiner ganzen Schwere gleichet, ist der Cylinder des Wassers, von welchem er getragen wird, nicht schwerer, als er vorhin war, da das Wasser an der Stelle war. Derowegen weil vorhin das umstehende Wasser demselben die Wage hielt, muß es auch jetzt, da für einen Theil Wasser etwas gleichgültiges substituiret worden, demselben die Wage halten. Und solchergestalt kann sich der hölzerne Cylinder nicht weiter eintauchen. W. Z. E.

Zusatz.

35. Wenn man einerley Körper auf fließende Materien von verschiedener Art der Schwere leget; so muß er in der von einer leichteren Art sich tiefer eintauchen, als in der von einer schwereren Art; z. E. tiefer im Weine als im Wasser, weil mehr Wein als Wasser dem Körper an Schwere gleich ist.

Zusatz.

36. Je näher die Schwere des Körpers zu der Schwere der flüßigen Materie z. E. des Wassers kommet, je tiefer tauchet sich derselbe ein. Z. E. Holz von

schwererer Art tauchet sich tiefer ein, als Holz von leichterer Art.

Zusatz.

37. Wenn also der Körper mit der flüßigen Materie einerley Art der Schwere hat, daß z. E. ein Cubikschuh desselben so viel, als ein Cubikschuh Wasser wieget; tauchet der Körper sich ganz unter und bleibet innerhalb dem Wasser stehen, wo man ihn hinstösset.

Zusatz.

38. Wenn der Körper sich z. E. um den vierten Theil eintauchet; so wieget der vierte Theil Wasser so viel als der ganze Körper. Wenn ihr demnach vier Theile Wasser nehmet, das ist, so viel, als der Raum des ganzen Körpers fassen kann; so muß dasselbe viermal so viel, als der ganze Körper wiegen. Solchergestalt verhält sich die Schwere des Körpers zu gleich viel flüßiger Materie, wie der eingetauchte Theil zu seiner ganzen Grösse.

Zusatz.

39. Wenn ein Körper von leichterer Art, als eine flüßige Materie ist, auf dem Boden eines Gefässes lieget; so kann er nicht eher von dem Boden gehoben werden, als bis man so viel von derselben hineingegossen, daß sie über den Theil gehet, welcher sich in ihr eintauchet, wenn das Gefäß voll ist.

Aufgabe.

40. Aus der gegebenen Schwere z. E. eines Cubikschuhes Wassers, und der Grösse des eingetauchten Theils eines Körpers, die Schwere des ganzen Körpers zu finden.

Auflösung.

Weil der Körper so viel wieget als das Wasser, welches dem eingetauchten Theile gleich ist (§ 34.); so dürfet ihr nur sagen: wie sich verhält ein Cubikschuh

Wasser

Wasser zu seiner gegebenen Schwere, eben so verhält sich der eingetauchte Theil des Körpers zu der Schwere des ganzen Körpers, die ihr demnach durch die Regel Detri (§. 35. Arithm.) finden könnet.

Exempel.

Ein Cubikschuh Wasser wieget 72 Pf. Der eingetauchte Theil des Körpers ist 740'.

1'—72—740'
72
1480
518
53280 Pf. Schwere des Körpers.

Aufgabe.

41. Aus der gegebenen Schwere z. E. eines Cubikschuhes Wasser, und der Schwere eines Körpers, die Grösse des Theiles zu finden, um welchen er sich in dem Wasser eintauchen muß.

Auflösung.

Weil ihr sagen könnet. Wie die Schwere eines Cubikschuhes Wasser zu der Grösse eines Cubikschuhes, so verhält sich die Schwere des gegebenen Körpers zu der Grösse des Theiles, um welchen er sich eintauchen muß (§. 34.); so könnet ihr abermal die verlangte Grösse des einzutauchenden Theils durch die Regel Detri finden (§. 85. Arithm.)

Exempel.

Es sey die Schwere des Körpers 53280 Pf.

72—1'—53280 Pf.
1
53280

a 48 $\sqrt{bb48\phi}$ aaaa aa	740′ Grösse des einzutauchenden Theiles.

Anmerkung.

42. Wenn man das Gesetz kennt, nach welchem sich die Gestalt eines Körpers von unten nach oben ändert, und nun daraus die jedesmalige Höhe von unten hinauf herzuleiten weiß, welcher ein bestimmter kubischer Inhalt zugehört, so läßt sich nun auch die Tiefe bestimmen, zu der sich ein Körper im Wasser eintaugen muß. Solche Betrachtungen lassen sich auch auf Schiffe anwenden. (L.)

Aufgabe.

43. Die Kraft zu finden, welche einen Körper in einer flüßigen Materie von schwererer Art als er ist, z. E. ein Stück Holz, unter dem Wasser erhalten kann, wenn seine Grösse und Schwere nebst der Schwere der flüßigen Materie, z. E. eines Cubikschuhes Wasser, gegeben wird.

Auflösung.

Es ist (§. 34.) klar, daß so viel Kraft erfordert wird, den Körper unter dem Wasser zu erhalten, als das Wasser mehr wieget, welches eben so viel Raum einnimmt. Derowegen

1. suchet aus der gegebenen Schwere eines Cubikschuhes Wasser und der Grösse des Körpers, durch die Regel Detri (§. 85. Arithm.) die Schwere des Wassers, welches so viel Raum als der ganze Körper einnimmt.

2. Ziehet davon die Schwere des Körpers ab; so bleibet die verlangte Kraft übrig.

Exem-

Exempel.

Ein Cubikschuh Wasser wieget 72 Pfund, ein Körper, den man unter demselben erhalten soll, 100 Pfund. Seine Grösse ist 8′.

1′—72—8′
8

576 Pf. Schwere des Wassers, welches dem Körper gleichet.
100 Pf. Schwere des Körpers.

476 Pf. Kraft, die den Körper unter dem Wasser erhält.

Zusatz.

44. Weil der Körper mit so großer Gewalt auf die Höhe getrieben wird, als die Kraft ist, welche ihn unter dem Wasser oder einer andern flüßigen Materie erhalten kann; so kann man durch gegenwärtige Aufgabe auch die Gewalt finden, durch welche ein Körper in einer gegebenen flüßigen Materie von einer schwereren Art, als er ist, in die Höhe getrieben wird. Als in dem vorigen Exempel ist dieselbe 476 Pf.

Lehrsatz.

45. Wenn ein Gefässe AB, das voll Wasser ist, bis an die Linie AC sich eintauchet; so ist die Kraft, welche das leere Gefässe bis an die Linie AC eingetauchet erhalten kann, derjenigen gleich, die das volle in der Luft erhalten kann. 6.

Beweis.

Weil das volle Gefässe so tief eingetauchet wird, als es die Kraft niederdrücket; so muß diese der Schwere desselben gleich seyn. Die Kraft aber, welche das volle

Gefässe in der Luft erhält, ist auch seiner Schwere gleich. Derowegen muß auch die Kraft, welche das leere Gefässe bis zu der Linie AC in dem Wasser niederdrücken kann, derjenigen gleich seyn, die das volle in der Luft erhalten kann (§. 22. Arithm.) W. Z. E.

Lehrsatz.

46. Die flüßige Materie wird um so viel schwerer, als der untergetauchte Körper von seiner Schwere in derselben verlieret; imgleichen so viel Kraft erfordert wird, den leichteren unter der flüßigen Materie zu erhalten.

Beweis.

Wenn der Körper untergetauchet ist, so wird so viel von seiner Schwere von dem Wasser getragen, als er in demselben verlieret, wie aus dem Beweise des Lehrsatzes §. 19. erhellet. Da nun dieser Theil der Schwere zugleich mit dem Wasser unter oder über ihm in einem Cylinder dem umstehenden Wasser die Wage hält; muß es auch zugleich mit dem Wasser im ganzen Gefässe auf den Boden des Gefässes drucken, und also mit ihm wiegen. **Welches das erste war.**

Die Kraft, welche den Körper, der von der flüßigen Materie in die Höhe gestoßen wird, unter derselben erhält, drucket die flüßige Materie. Und also ist es eben so viel, als wenn ein gleichgültiges Gewichte darauf geleget würde; folgends muß die flüßige Materie um so viel schwerer werden. **Welches das andere war.**

Anmerkung.

47. Vom Druck auf Seitenwände ist bisher nichts gesagt worden; weil er mit der Entfernung der gedruckten Stellen von der Oberfläche des Wassers eben so zunimmt, wie das Moment der Kraft am Hebel mit der Entfernung von der Umdre-

hungs-

hungsaxe, so ist es eben so gut, als ob alle Pressungen im Schwerpunkt der Wand beysammen wären, oder die Wand in der Tiefe ihres Schwerpunkts unter dem Wasserspiegel horizontal läge. Hierauf beruhen manche Hydrotechnische Anstalten, worüber man aber überhaupt besondere Schriften nachlesen muß. Denen, welche H. H. **Kästner** in seiner Hydrostatik S. 133. erwähnt hat, füge ich noch folgende bey: Beyträge zum prakt. Wasserbau von Hrn. **Wiebeking**; Praktisches Handbuch für Hydrotechniker von Hrn. **Fuchs**; Beyträge zur Hydraulischen Architektur von Hrn. **Woltmann**; Vom Bau der Wehre von Hrn. v. **Cancrin**. (L.)

Anfangs.

Anfangs-Gründe der Aerometrie. *)

Erklärung.

1.

Die Lehre von den Eigenschaften der Luft, welche einer arithmetischen Bestimmung fähig sind, heist die Aerometrie.

Erfahrung.

2. Wenn ihr die Hand durch einen Raum, der leer zu seyn scheinet, gegen das Gesichte beweget; so werdet ihr wahrnehmen, das etwas das Gesichte berühret, ohnerachtet die Hand nicht daran kommet. Also muß eine Materie in demselben Raume seyn, die sehr subtil, weil man sie nicht sehen kann, und deren Theile nicht feste zusammenhängen, weil sie die Körper in ihrer Bewegung nicht aufhält, das ist, flüßig ist (§. 2. Hydrost.) Diese uns überall nmgebende Materie nennen wir die **Luft**.

Erklärung.

3. Ein Körper wird **zusammengedrückt**, wenn seine Theile durch eine **äußere Gewalt** in einen engern Raum

*) Hierher gehören **Hrn. H. Kästners** und **H. H. Karstens** Anleitungen in ihren schon am Anfang der Mechanik angeführten Werken; ingleichem des Hrn. **Prony** neue Architektura Hydraulika u. a. m.

Raum gebracht werden; er wird zusammengezogen, wenn dieses durch die Kälte geschieht.

Erklärung.

4. Ein Körper wird **ausgedehnt**, wenn seine Materie durch einen größern Raum ausgebreitet wird.

Erklärung.

5. Ein Körper heist **elastisch**, wenn er der Zusammendrückung fähig ist, und nach Wegnehmung der äußeren Gewalt, die ihn zusammendrückte, sich wieder in seinen ersten Raum ausbreitet.

Erfahrung.

6. Wenn man ein umgekehrtes Trinkglas in ein mit Wasser angefülltes Gefäß so eintaucht, daß sein unterer Rand beym Eintauchen dem Wasserspiegel parallel ist, so steigt zwar das Wasser im Glas immer höher, je tiefer man es eintaugt, aber die Oberfläche des Wassers im Gefäß steht immer höher, als die des Wassers im Glas. (l.)

Zusatz.

7. In dem Glas ist nur Luft, die also durch den Druck des äußern Wassers zusammengedrückt wird; daß aber die Luft nach ihrer Zusammendrückung ein Bestreben hat, sich wieder auszudehnen, erhellet aus dem niedrigern Wasserstande im Glase, weil sonsten, wie in der Hydrostatik gezeigt worden ist, das Wasser im Glas eben so hoch stehen müßte, als das äußere im Gefäß. Also ist die Luft elastisch. (l.)

Zusatz.

8. Eben das beweisen viele andere ganz einfache Versuche. Z. B. Man dehne eine Blase, so viel man will, auseinander, indem man mit einem Blasebalg hineinbläst, und binde sie während dem Aufblasen unterhalb dem eingesteckten Röhrchen fest zusammen. Diese aus-

ausgedehnte Blase läßt sich nun durch Umwendung und starkes Zusammenziehen eines Bindfadens in einen beträchtlich kleinern Raum bringen; sobald man aber den Faden wieder abnimmt, dehnt sich die Blase wieder in ihren vorigen Raum aus. (1.)

Erklärung.

9. Eine **Luftpumpe** heist ein Werkzeug, wodurch man die in einem Gefäß befindliche Luftmasse vermindern oder vermehren, d. i. die Luft verdünnen oder verdichten kann.

Aufgabe.

10. Eine Luftpumpe zu machen.

Auflösung.

I. 1. Lasset einen hohlen Cylinder AB aus Messing giessen, und inwendig auf das allersorgfältigste auspoliren, damit der Stempel DE auf das genaueste darein passet, und nicht im geringsten etwas Luft darzwischen sich aufhalten kann.

2. Den Stempel DE setzet aus Scheiben von Büffel-Leder, daraus die Degengehänge verfertiget werden, oder auch noch lieber von Hirsch-Leder, das geschmeidiger ist, zusammen, nachdem sie vorher mit Baumöle und ausgekochtem Schweinefette vollgetränket worden, und fasset ihn zwischen zwey messingene Platten, deren eine oben in D, die andere unten in E geleget wird. Befestiget ihn an der eisernen Stange CD, welche von C bis D bekammet ist, damit ihr ihn durch Hülfe des eisernen Creutzes ON und des mit ihm an einer Welle befestigten Stirnrades leichte heraus und hinein winden könnet.

3. In B löthet eine Röhre BFKL an, in welcher in F der Hahn IHG eingesetzet wird, damit ihr nach Belieben die Pumpe verschliessen und aufmachen kön-

könnet. Zu welchem Ende der Hahn einmal quer durchbohret, damit die Luft aus der Röhre LK in den Körper der Pumpe kommen kann; hernach aber nur auf einer Seite etwas schräge hinauf eingebohret wird, damit die Luft aus dem Körper der Pumpe durch die Röhre des Hahnes FH herausgetrieben werden kann. Oben aber ist ein messingener Stöpsel I, damit die Röhre des Hahnes zugestopfet wird, wenn es nöthig ist.

4. Endlich machet oben an die Röhre KL eine Schraube, damit ihr den Teller PQ, darauf die Gläser gesetzet werden, aus denen man Luft herauspumpen will, imgleichen andere Gefässe, die ihr ausleeren wollet, durch Hülfe einer Mutter aufschrauben könnet.

Anmerkung.

11. Die hier beschriebene Luftpumpe ist die **Senguerdsche**. In neuern Zeiten hat man sich sehr um die Vervollkommnung dieses Werkzeugs bemüht. Vorzüglich gehören hierher:

Hrn. H. **Kästners** Beschreibung der **Smeatonschen** Luftpumpe, in seiner Aerometrie; Hrn. **Hofrath Lichtenbergs** Beschreibung eben der Luftpumpe mit den von **Nairne** und **Blunt** angebrachten Verbesserungen in seiner 5ten Ausgabe der Erxlebenschen Naturlehre, nach der Vorrede; Beschreibung einer verbesserten Luftpumpe von **Joh. Cuthberson** a. d. Englischen. Beschreibung einer neuen und vollkommenen Einrichtung der Luftpumpe (der **Schraderschen**); **Baaders** Luftpumpen, in Hrn. **Grens** Journ. der Phys. II. B. S. 326. u. f. f. Anthiae nouae hydraulicopneumaticae mechanismus & descriptio auct. Hindenburg. (L.)

Anmerkung.

12. Daß sich durch die Dämpfe siedenden Wassers die Luft aus Gefäßen treiben läßt, und durch nachherige Abkühlung des verschlossenen Gefäßes diese Dämpfe wieder in zusammenfließende Tropfen verwandelt werden können, gab zur ersten Erfindung der Dampfmaschinen Anlaß. Späterhin benutzte man diese Eigenschaften der Wasserdämpfe zu einer neuen Art von

Luft-

Luftpumpen. S. Hrn. Grens Journ. der Phys. VI. B. S. 86 u. f. f.

Erfahrung.

4. 13. Kütter an eine große gläserne hohle Kugel A eine messingene kurze Röhre mit einem Hahne und einer Schraubenmutter B, damit ihr sie nach Gefallen verschliessen, und auf die Luftpumpe in L schrauben könnet. Pumpet die Luft heraus, so viel als möglich ist, und schliesset den Hahn zu. Schrauber sie ab, und leget sie auf eine Wageschaale: auf die andere Schaale aber so viel Gewichte als nöthig sind, sie in einen genauen wagerechten Stand zu setzen. Hierauf machet den Hahn auf; so werdet ihr die äussere Luft mit einem Geräusche hineinfahren hören, und die Kugel wird einen Ausschlag geben, auch beständig mehr wiegen, als da die Luft ausgeleeret war.

Zusatz.

14. Weil die Kugel die Wageschaale mehr niederdrucket, wenn sie voll Luft ist, als wenn sie leer ist; so muß die Luft schwer seyn (§. 23. Mech.)

Zusatz.

15. Weil die Luft sich zusammendrucken lässet, und die obere Luft durch ihre Schwere auf die untere drucket; so ist kein Wunder, daß die untere Luft dichter, die obere aber dünner befunden wird.

Zusatz.

16. Daher muß die untere Luft von schwererer Art seyn, als die obere; weil mehr derselben in einem Raume enthalten.

Anmerkung.

17. Es läßt sich also das Gewicht oder die specifische Schwere der Luft nicht allgemein angeben. Nach Hrn. Grens

Grens Versuchen (Grundriß der Naturlehre Ausg. von 1793. S. 599.) ist die spec. Schwere einer nicht sehr feuchten Luft bey 65 Grad des Fahrenheitschen Thermometers und der Barometerhöhe von 27 Zoll 8 Linien Rhl. Maas = $\frac{1}{810}$, die des Wassers = 1 gesetzt, nach dem Verfahren §. 13. Von Thermometern und Barometern wird bald geredet werden. (L.)

Lehrsatz.

18. Die ausdehnende Kraft der Luft ist der Kraft gleich, welche die Luft zusammendrucket.

Beweis.

Die Luft wird von einer kleinen Kraft nicht so enge zusammen gedrucket, als von einer grossen. Derowegen muß sie derselben widerstehen. Sie hat aber eine ausdehnende Kraft, durch welche sie sich, so viel ihr zugelassen wird, auszudehnen trachtet (§. 15.) Darum muß sie durch ihre ausdehnende Kraft derjenigen widerstehen, die sie zusammendrucket (§. 8 Hydrost.) Und weil diese nichts mehr wider sie vermag; so muß sie ihr gleich seyn (§. 13. Hydrost.) W. Z. E.

Zusatz.

19. Je mehr also die Luft zusammengedrucket wird, je stärker wird ihre ausdehnende Kraft. Hingegen je dünner sie wird, je schwächer wird sie.

Anmerkung.

20. Es versteht sich, daß die Verdünnung ohne Verminderung der Wärme geschehen muß, weil größere Wärme die ausdehnende Kraft der Luft vergrößert.

Zusatz.

21. Wenn also die Luft zweymal so viel gedrucket wird; so wird ihre ausdehnende Kraft zweymal so stark, als vorhin. Wird sie dreymal so viel gedrucket: so ist sie dreymal so stark, wie vorhin u. s. w.

Zusatz.

22. Daß aber eine bestimmte Luftmasse von der doppelten Kraft in die Hälfte des Raums, von der dreyfachen in den dritten Theil des Raums u. s. w. zusammengedruckt werde, also, bey einerley Wärmegrad, Luft von doppelter Dichtigkeit doppelte Ausdehnungskraft, Luft von 3 facher Dichtigkeit 3 fache Ausdehnungskraft habe u. s. w. läßt sich aus dem Gesagten noch nicht schließen. Inzwischen weiß man aus der Erfahrung, daß wenigstens bis zur 4 fachen Dichtigkeit auch dieser Satz seine Richtigkeit hat, d. h. wenigstens bis zu einer zusammengepreßten Luft, deren spec. Schwere etwa = 0,005 ist, die des Wassers = 1 gesetzt.

Zusatz.

23. Die ausdehnende Kraft der unteren Luft ist der Schwere der ganzen obern gleich, die auf sie drucket.

Zusatz.

24. Und darum können alle Wirkungen von der ausdehnenden Kraft der untern Luft geschehen, die durch das Drucken von der Schwere der ganzen Luft möglich sind.

Erfahrung.

25. Füllet eine Röhre, die über 32 Rheinländische Schuhe lang ist, mit Wasser. Verstopfet sie oben, daß keine Luft hinein kann, und unten verschliesset sie mit einem Hahne. Richtet die Röhre gerade auf, und setzet den Hahn ins Wasser. Wenn ihr ihn aufmachet, wird das Wasser anfangen herauszulaufen, hingegen bald aufhören, wenn es 31 bis 32 Rheinländische Schuhe hoch stehet.

Zusatz.

26. Weil das Wasser, welches in der Röhre hangen bleibet, auf das Wasser in dem Gefässe drucket (§. 9. Hy-

9. Hydrost.), und das umstehende Wasser ihm nicht weichet, so ist nöthig, daß es um und um gleichviel gedrucket werde. Nun drucket aber auf das Wasser die Luft (§. 18.) Derowegen muß dieselbe auf eine Circulfläche so stark drucken, als ein Wasser-Cylinder, der diesen Circul zu seiner Grundfläche hat, und 32 Rheinländische Schuhe hoch ist.

Zusatz.

27. Weil die Luft das Wasser in einer Röhre, so oben leer ist, 32 Schuh hoch erhalten kann, das Queckfilber aber 14mal so schwer, als das Wasser ist; so kann sie dasselbe nur den vierzehnten Theil von 32 Schuhen hoch erhalten (§. 18. Hydrost.).

Zusatz.

28. Wenn ihr dannenhero eine gläserne Röhre AB, die oben in A zugeschmelzet ist, mit Queckfilber füllet, und in ein Gefässe mit Queckfilber setzet; so wird das Queckfilber aus der Röhre nicht ganz herunterfallen, sondern in derselben beynahe 28 Zoll hoch stehen bleiben; wie Torricellius zuerst wahrgenommen, und von welchem sie auch die Torricellianische Röhre genennet wird. Giesset ihr auf das Queckfilber in dem Gefässe Wasser; so steiget es höher, weil die Luft mit dem Wasser drucket. Hingegen wenn ihr die Torricellianische Röhre unter eine gläserne Glocke mit einer weiten gläsernen Röhre setzet, und die Luft weggpumpet: so werdet ihr finden, daß das Queckfilber nach und nach herunterfället. 3.

Anmerkung.

29. Der Versuch (§. 28.) ist viel leichter anzustellen, als der (4. 25.) und eben darum letzterer zur Bestimmung des Drucks unserer Atmosphäre vorzuziehen. Es ist aber hierbey noch zu merken, daß nach der tiefern oder höhern Lage des Orts, wo man die Beobachtung anstellt, die Queckfilbersäule höher oder niedriger seyn müsse, weil der Druck der Atmosphäre stärker oder schwächer ist (§. 16.).

Aufgabe.

30. Aus der gegebenen Grundfläche der Luftsäule, ihre Schwere zu finden.

Auflösung.

1. Multipliciret die Grundfläche der Luftsäule durch die Höhe des Wassers, so ihr die Wage hält (§. 27.); das Produkt ist der körperliche Inhalt einer Wassersäule, die mit der Luftsäule einerley Schwere hat (§. 197. Geom.).

2. Wisset ihr nun, wie schwer ein Cubikschuh Wasser ist; so könnet ihr durch die Regel-Detri die verlangte Schwere der Luftsäule finden (§. 85. Arithm.).

Exempel.

Es sey der Diameter eines Circuls 100‴ so ist die Fläche 7850□‴ (§. 134. Geom.)

Höhe der Wassersäule 3100

785000
23550

Inhalt der Wassersäule 24335000⊙‴

1000⊙″ — 64 Pf. — 24335⊙″

64

97340
146010

1557440

1557440 | 1557½ Pf. Schwere der Luftsäule.
000

Lehrsatz.

31. Wenn ein Gefässe voll Luft ist, vermag die äussere Luft nichts wider dasselbe. Wenn aber die innere ausgeleeret wird, erfolget eine Würkung, welche der druckenden Kraft der äusseren Luft gemäß ist.

Beweis.

Beweis.

Wenn das Gefässe voll Luft ist, die eben so dichte wie die äussere: so ist die ausdehnende Kraft der äusseren gleich (§. 18.) Darum drucket die innere Luft so viel heraus, als die äussere hineindrucket: folgends kann die äussere mit ihrem Drucken wider das Gefässe nichts ausrichten (§. 13. Hydrost.) **Welches das erste war.**

Wenn aber die innere Luft entweder ganz, oder zum Theil ausgeleeret wird (§. 28.); so wird sie in dem letzten Falle dünner, als die äussere, und daher ihre ausdehnende Kraft geschwächet (§. 19.) Da nun in dem ersten Falle dem Drucken der äusseren Luft gar kein Widerstand geschiehet, in dem andern aber weniger Widerstand gethan wird, als die äussere Luft drucket; so muß allerdings eine Würkung erfolgen, die entweder der ganzen druckenden Kraft der Luft, oder ihrem Ueberschusse über den Widerstand der inneren proportioniret ist (§. 13. Hydrost.) **Welches das andere war.**

Lehrsatz.

32. **Wenn in der Torricellianischen Röhre über dem Queckſilber ein wenig Luft bleibet: so wird dasselbe nicht so hoch darinnen stehen, als wenn sie leer ist.**

Beweis.

Wenn die innere Luft so dicke ist, wie die äussere, so kann ihre ausdehnende Kraft allein der äusseren die Wage halten (§. 18. Aer. §. 13. Hydrost.) Derowegen muß das Queckſilber, vermöge seiner Schwere, anfangen zu fallen (§. 13. Hydrost.) Indem dieses geschiehet, dehnet sich die eingeschlossene Luft aus, und, da sie dünner wird, nimmet ihre ausdehnende Kraft ab (§. 19.) Da sie nun nicht mehr der veränderten äusseren Luft die Wage halten kann (§. 13. Hydrost.), muß nothwendig etwas von dem Queckſilber zurücke bleiben. W. Z. E.

Lehrsatz.

33. Wenn die Luft schwerer wird; so muß das Queckſilber in der Torricellianiſchen Röhre höher ſteigen. Wird ſie aber leichter, so muß es niederfallen.

Beweis.

Denn das Queckſilber in der Torricellianiſchen Röhre hält die Wage mit der Schwere der Luft (§. 30.). Wenn nun dieſe geringer wird, muß auch die Schwere des Queckſilbers, folgends ſeine Höhe abnehmen: wird ſie aber größer, ſo muß auch das Queckſilber höher ſteigen (§. 13. Hydroſt.) W. Z. E.

Zuſatz.

34. Da alle Tage im Jahre die Höhe des Queckſilbers in der Torricellianiſchen Röhre (ob zwar nicht viel, doch merklich) verändert wird; ſo hat man daraus geſchloſſen, daß die Schwere und alſo auch die ausdehnende Kraft der Luft vielen Veränderungen täglich unterworfen ſey.

Zuſatz.

5. 35. Daher bedienet man ſich dieſes Inſtrumentes, die Veränderung in der Schwere der Luft damit abzumeſſen, und nennet es **Barometer** oder auch Barolcopium.

Erklärung.

§. 36. Die Höhe der Queckſilberſäule in der gläſernen Röhre, d. h. die lothrechte Entfernung des oberſten Punkts ihrer Mittellinie über dem oberſten Punkt derſelben in dem untern Behältnischen, heiſt die **Barometerhöhe.**

Erklärung.

37. Zeichnet man ein ganzes Jahr hindurch, z. B. täglich Mittags 12 Uhr die Barometerhöhe auf, und

divi-

dividirt alsdenn die Summe aller dieser Höhen mit 365 (im Schaltjahr mit 366), so heist die herauskommende Zahl die **mittlere Barometerhöhe** für die Gegend, wo man beobachtet. Die mittlere Barometerhöhe ist desto sicherer, je größer die Anzahl von Tägen und die Anzahl von Aufzeichnungen an jedem Tage ist.

Erfahrung.

38. An den Europäischen Meeresufern läßt sich die mittlere Barometerhöhe ohne merklichen Irthum zu 28 Pariser Zolle Zolle annehmen. In höhern Gegenden ist sie also geringer, in tiefern größer (§. 29.)

Zusatz.

39. Aus der mittlern Barometerhöhe einer Gegend läßt sich ziemlich nahe die Höhe dieser Gegend über dem Meere bestimmen, wenn man die vorstehende Erfahrung zum Grund legt. Beobachtet man zu einerley Zeit mit übereinstimmenden Barometern die Barometerhöhen an verschiedenen Stellen, bey nicht sehr verschiedener Witterung, so läßt sich aus dem Unterschied dieser Barometerhöhen auf die Höhe der einen Stelle über der andern ziemlich genau schließen, wie ich gleich näher zeigen will.

Aufgabe.

40. Es sey z. B. auf einem Berg die Barometerhöhe p Par. Linien, am Meer H Linien (entweder zu einerley Zeit beobachtet, oder die mittlere Barometerhöhe genommen): man soll die Höhe des Bergs beyläufig bestimmen.

Auflösung.

1. Ich nehme an, die spec. Schwere des Queckſilbers ist m mal so groß, als die der Luft am Meer, wo die Barometerhöhe H Linien beträgt.
2. Ich stelle mir die ganze Höhe der zwischen beyden Stationen befindlichen Luftsäulen in Schichten abgetheilt vor, jede Schichte zu 1 Toise oder 864

Par. Linien hoch, und nehme an, daß ohne merklichen Irthum in jeder solcher einzelen Schichte die Luft als gleich dicht angesehen werden könne.

3. Wenn man nun von der untern Station zu der obern (d. i. im Ex. auf den Berg) steigt, so fällt das Queckſilber im Barometer von Schichte zu Schichte, und es ist die Höhe des Falls in Par. Linien:

in der 1sten Schichte $= \frac{864}{m}$ wofür ich α setze

— 2ten — $= (1 - \frac{\alpha}{H}) . \alpha$ oder $= \beta$

— 3ten — $= (1 - \frac{\alpha+\beta}{H}) . \alpha$

$= (1 - \frac{\alpha}{H}) . \alpha - \frac{\alpha}{H} . \beta = \beta - \frac{\alpha}{H} . \beta$

$= (1 - \frac{\alpha}{H}) . \beta$ oder $= \gamma$

in der 4ten Schichte:

$= (1 - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{H}) . \alpha = (1 - \frac{\alpha+\beta}{H}) . \alpha - \frac{\gamma}{H} . \alpha$

$= \gamma - \frac{\alpha^2}{H} . \gamma = (1 - \frac{\alpha}{H}) . \gamma$

Und so ergiebt sich allemal der nächstfolgende Fall, wenn man den vorhergehenden mit $1 - \frac{\alpha}{H}$ multiplicirt.

4. Steigt man also durch n Luftschichten, so ist der ganze Fall des Queckſilbers in allen Schichten zusammengenommen:

$= \alpha$

$$= \alpha + \left(1 - \frac{\alpha}{H}\right) \cdot \alpha + \left(1 - \frac{\alpha}{H}\right)^2 \cdot \alpha + \left(1 - \frac{\alpha}{H}\right)^3 \alpha +$$

$$\left(1 - \frac{\alpha}{H}\right)^4 \cdot \alpha \ldots + \left(1 - \frac{\alpha}{H}\right)^{n-1} \cdot \alpha$$

$$= \alpha \cdot \left(1 + \left(1 - \frac{\alpha}{H}\right) + \left(1 - \frac{\alpha}{H}\right)^2 \ldots + \left(1 - \frac{\alpha}{H}\right)^{n-1}\right)$$

die eingeschlossene Reihe ist nach (Algebra §. 60. no. 5.)

$$1 - \left(1 - \frac{\alpha}{H}\right)^n : \frac{\alpha}{H} ;$$

setzt man also den ganzen Fall des Quecksilbers $= f$, so hat man

$$f = \frac{\alpha \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{\alpha}{H}\right)^n\right)}{\frac{\alpha}{H}} = H \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{\alpha}{H}\right)^n\right)$$

5. Demnach

$$1 - \frac{f}{H} = \left(1 - \frac{\alpha}{H}\right)^n \text{ oder } \log\left(1 - \frac{f}{H}\right) = n \cdot l\left(1 - \frac{\alpha}{H}\right)$$

und nun

$$n = \frac{\log\left(1 - \frac{f}{H}\right)}{\log\left(1 - \frac{\alpha}{H}\right)}$$

Es ist aber

$$f = H - p, \text{ also } 1 - \frac{f}{H} = 1 - \frac{H-p}{H} = \frac{p}{H} \text{ und}$$

$$\log\frac{p}{H} = lp - lH;\ \log\left(1-\frac{\alpha}{H}\right) = l\left(\frac{H-\alpha}{H}\right) = l(H-\alpha) - lH$$

Demnach

$$n = \frac{lp - lH}{l(H-\alpha) - lH}$$

$$= \frac{lH - lp}{lH - l(H-\alpha)}$$

Oder (no. 3.)

$$n = \frac{lH - lp}{lH - l\left(H - \frac{864}{m}\right)}$$

wo dann n die Anzahl von Schichten, also die Anzahl von Toisen ist.

6. Wenn also H die mittlere Barometerhöhe an der Meeresfläche bedeutet, und die spec. Schwere des Queckſilbers m mal ſo groß als die mittlere spec. Schwere der Luft am Meere iſt, ſo hat man, $H = 336$ Linien geſetzt, die Höhe einer Station, für welche die Barometerhöhe $= p$ Linien iſt, über der Meeresfläche

$$= \frac{l\,336 - lp}{l\,336 - l\left(336 - \frac{864}{m}\right)},$$

und die Höhe einer Station, für welche die Barometerhöhe q iſt, über der Meeresfläche

$$= \frac{l\,336 - lq}{l\,336 - l\left(336 - \frac{864}{m}\right)}$$

alſo die Höhe beyder Stationen über einander

$$= l$$

$$= \frac{l\,336 - l\,q}{l\,336 - l\left(336 - \frac{864}{m}\right)} - \frac{l\,336 - l\,p}{l\,336 - l\left(336 - \frac{864}{m}\right)};$$

$$\text{also } n = \frac{l\,p - l\,q}{l\,336 - l\left(336 - \frac{864}{m}\right)}$$

Setzt man die Barometerhöhe auf der Meeresfläche = 336 Linien, so läßt sich

$$m = 14 \cdot 800 = 11200$$

annehmen; aber für jede Barometerhöhe auf der Meeresfläche muß man, wenn sie überhaupt H heißt, $\frac{336}{H} \cdot 11200$ statt m setzen, und so erhält man:

$$n = \frac{l\,p - l\,q}{l\,H - l\left(H - \frac{864 \cdot H}{336 \cdot 11200}\right)} = \frac{l\,p - l\,q}{l\left\{\frac{H}{H - \frac{864 \cdot H}{336 \cdot 11200}}\right\}}$$

$$= \frac{l\,p - l\,q}{l\left\{\frac{1}{1 - \frac{864}{336 \cdot 11200}}\right\}} = \frac{l\,p - l\,q}{l\left(\frac{336 \cdot 11200}{336 \cdot 11200 - 864}\right)}$$

den Logarithmen im Nenner finde ich

$$= 0{,}00010005; \text{ also}$$

$$n = 10000 \cdot (l\,p - l\,q) \cdot (h$$

wo p, q die Barometerhöhen in zwoen Stationen in Pariser Linien, und n die Höhe der obern über der untern in Toisen ausdruckt. (L.)

Zusatz.

Zusatz.

41. Die Barometerhöhen hängen zugleich einigermassen von der verschiedenen Temperatur der Luft ab, in welcher die Beobachtung geschieht. Nimmt man aus den Beobachtungen der Herrn **Roy**, **Rosenthal**, und **Lutz**, ein Mittel, so beträgt die verlängerte Ausdehnung einer 27 Zoll langen Queckſilbersäule von der natürlichen Frostkälte bis zur Siedhitze 5,6 Par. Linien. Die Formel (h § 40.) muß also zugleich von den verschiedenen Wärmegraden abhängen, und hieraus hat man Anlaß zu ihrer Verbesserung genommen. S. die von H. H. **Kästner** (**Aerometrie** S. 218. u. f. f.) angeführte Schriften, auch die schon angeführte Neue Architektura Hydraulika des **Hrn. Prony**. L.

Erklärung.

42. Ein Werkzeug, welches Aenderungen der Wärme anzugeben und einerley Wärmegrade zuwege zu bringen dienet, heist ein **Thermometer**, nicht so gewöhnlich **Thermoscop**. (L.)

Anmerkung.

43. Man handelt hiervon in der Aerometrie, weil viele aerometrische Untersuchungen damit in genauer Verbindung stehen. Inzwischen wäre es wohl natürlicher, alle auf Wärme sich beziehende Lehren unter dem Namen der **Pyrometrie** als eine eigene Wissenschaft in den mathematischen Lehrbüchern abzuhandeln. (L.)

Erfahrung.

44. Sowohl feste als flüßige Körper werden durch größere Wärme ausgedehnt, und ziehen sich bey abnehmender Wärme wieder zusammen. Die spec. Schwere aller Körper hängt daher von ihrer Wärme ab. (L.)

Zusatz.

6. 45. Flüssige Körper sind vorzüglich geschickt, durch ihre verschiedene Ausdehnungen Aenderungen der Wär-

me

me bemerkbar zu machen. Füllt man z. B. eine gläserne Röhre (Fig. 6.) die unten mit einer holen Kugel zusammenhängt, mit einer flüßigen Masse, und setzt sie dann einer größern Wärme aus, so wird nicht nur der schon in der Röhre befindliche Theil der Flüßigkeit, sondern auch die in der Kugel befindliche ausgedehnt, und die Flüßigkeit wird hierdurch genöthigt in der Röhre zu steigen, destomehr, je größer die Kugel bey einer bestimmten Weite der Röhre ist. (L.) 6.

Anmerkung.

46. Unsere gewöhnlichen Thermometer haben die eben erwähnte Einrichtung; es versteht sich, daß die obere Oeffnung der Röhre offen bleiben muß. Man füllt sie mit **Weingeist** oder mit **Queckſilber**, und fügt eine **Skale** bey, d. i. eine Eintheilung in gleiche Theile oder **Grade** längst der Röhre, die man sich allemal in lothrechter Stellung zu gedenken hat. Hier verdienen besonders das **Celsiussche**, das **Delislesche**, das **Fahrenheitsche** und das **Reaumürsche** Thermometer bemerkt zu werden. L.

Anmerkung.

47. Das Re'aumürsche Thermometer war ursprünglich mit Weingeist gefüllt, jetzt füllt man es aber auch wie die übrigen mit Queckſilber. Uebrigens unterscheiden sich diese verschiedenen Thermometer blos durch ihre verschiedenen Skalen. Bey allen setzt man zween Punkte fest, zwischen welchen die Grade abgetheilt werden. Die Stelle nämlich, bis zu der sich die Queckſilbersäule im schmelzenden Schnee zusammenzieht, oder der natürliche Gefrierpunkt ist der **untere**, und die Stelle, bis zu welcher sich die Queckſilbersäule im siedenden Wasser ausdehnt, der **obere** von beyden festen Punkten. Der Abstand zwischen beyden wird nach **De Lisle** in 150, nach **Celsius** (dessen Therm. auch das **Schwedische** heißt) in 100, nach **Fahrenheit** in 180, und nach **Re'aumur** in 80 gleiche Theile eingetheilt.

De Lisle zählt seine Grade von oben herab, die übrigen aber von unten hinauf, so daß nach Re'aumür und Celsius der natürliche Gefrierpunkt mit o bezeichnet werden;

Fahr-

Fahrenheit aber bezeichnet den natürlichen Gefrierpunkt mit 32, und zählt so bis zu 212 fort, weil er noch um 32 Grade tiefer seinen künstlichen Gefrierpunkt mit 0 bezeichnet.

Wenn man also Fahrenheitsche Grade mit F, Reaumürsche mit R, Celsiussche (Schwedische) mit C, und Delislesche mit D bezeichnet, so hat man

$$F = 32 + \frac{9}{4} R$$
$$= 32 + 1{,}8 \cdot C$$
$$= 32 + 1{,}2 \cdot (150 - D)$$

woraus sich die Grade eines jeden dieser 4 Thermometer leicht unter einander vergleichen lassen. Es ist aber am bequemsten, alle vier Skalen zugleich neben die Glasröhre zu verzeichnen. (L.)

Anmerkung.

48. Weil bey geringerem Druck der Atmosphäre, also bey geringern Barometerhöhen auch das Wasser von einer geringern Wärme siedend wird, so hat man noch eine besondere Vorsicht nöthig, um übereinstimmende Thermometer zu verfertigen, weil vor allen Dingen ihre **Siedpunkte** übereinstimmend seyn müssen. Dieser Zweck läßt sich erreichen, wenn man die Kugel des Thermom. bey einer Barometerhöhe von 332,16 Linien in siedendes Wasser setzt, oder, wofern zur Zeit der Beobachtung die Barometerhöhe n . 1,28 Par. Linien höher oder niedriger ist, als die erwähnte, alsdann den sich bey solcher Höhe ergebenden Siedpunkt um $\frac{n}{1000}$ seines Abstandes vom Gefrierpunkt tiefer herab oder höher hinauf zeichnet. S. **Sammlung.** zur Physik und Naturgeschichte I. B. S. 643. f. f. (L.)

Anmerkung.

49. Noch einige hierher gehörige Schriften, auch in Rücksicht auf Pyrometrie überhaupt, sind des Hrn. **de Lüc** Untersuchungen über die Atmosphäre. Hrn. **H. Mayers** Abhandlung über das Ausmessen der Wärme ꝛc. **Desselben** Abhandl. über Gesetze und Modifikationen des Wärmestoffs; Hrn. **Lamberts** Pyrometrie, **Langsdorfs** Versuch einer neuen Theorie

rie Hydrodinamischer und pyrometrischer Grundlehren, Hrn. **Luz's** Anweisung Thermometer zu verfertigen, Hrn. **Rosenthals** Beyträge zur Verfertigung ꝛc. meteorologischer Werkzeuge, Hrn. **Strohmeyers** Anleitung übereinstimmende Thermometer zu verfertigen. **Langsdorfs** Physisch-mathematische Abhandlung über Gegenstände der Wärmelehre, welche mit der Ausübung in der nächsten Verbindung stehen, u. a. m. (L.)

Ende der Aerometrie.

Anfangs-

Anfangs-Gründe der Hydraulik. *)

Erklärung.

1.

Die Hydraulik enthält die Lehren von der Bewegung des Wassers.

Anmer-

*) Hierher gehörige Schriften: Hrn. **Belidors** Architectura Hydraulika; Hrn. H. **Kästners** Hydrodynamik; H. H. **Karstens** Lehrbegr. der gesammten Mathematik, Vter und VIter Band; **Desselben** Anfangsgr. d. math. Wissens. IIter Band; Hrn. **Bossuts** Hydrodinamik; Hrn. **Bernhards** Neue Grundlehren der Hydraulik; Hrn. **Bürjas** Grundlehren der Hydraulik; Hrn. **Beyers** Schauplatz der Mühlenbaukunst; Hrn. **Lempens** Lehrbegriff des Maschinenwesens; Hrn. H. **Karstens** Preisschrift über die vortheilhafteste Anordnung der Feuerspritzen; H. **Pr. Klügels** Preisschrift von der besten Einrichtung der Feuerspritzen; **Langsdorfs** Versuch einer neuen Theorie Hydrodynamischer und pyrometrischer Grundlehren; **Desselben** Lehrbuch der Hydraulik; Hrn. **Fabre's** Versuch über die vortheilhafteste Bauart Hydraulischer Maschinen, insbesondere der Getreidemühlen; Hrn. **Hennerts** Elem. Hydrolt. & Hydraul. tam theor. quam pract. Hrn. **Dan. Bernoullis** Hydrodynamica; H. **Joh Bernoullis** Hydraulica; Hrn. **Eulers Abhandl.** de l' équilibre & du mouvement des fluides in den Mem. de l' Acad. de Prusse 1755; Hrn. **D'Alembert** Schrift eben des Titels. Hrn. **Gerstners** Theorie des **Wasserstoßes** (sehr wichtig); von **Gerstenbergks** theore-

Anmerkung.

2. Die Hydraulik ist unstreitig der schwierigste und verwickeltste Theil der ganzen angewandten Mathematik. Die Flüßigkeit ist es nicht geradezu, was diese Lehren schwierig macht; vielmehr dient eben diese Eigenschaft zur Erleichterung vieler Hydraulischer Untersuchungen; weil aber die Flüßigkeit des Wassers solches zu tausendfachen Bewegungen und daher rührenden Wirkungen geschickt macht, welche sich bey festen Körpern oder Zusammenhäufungen von festen Körpern gar nicht anwenden lassen, so ergeben sich hieraus Schwierigkeiten nicht sowohl in Rückficht auf den Kalkul, als in Rücksicht auf die besondern physischen Umstände, welche man in den Kalkul zu bringen hat. In der Mechanik fester Körper würden solche Schwierigkeiten noch weit größer seyn, wenn man von festen Körpern ähnlichen Gebrauch zu machen hätte. In meinem Lehrbuch der Hydraulik bin ich bemüht gewesen, diese Wissenschaft so vorzutragen, daß die Theorie die Vorwürfe nicht mehr treffen können, welche man ihr bisher machen mußte, sobald man zur Ausübung schritte. Hier muß man sich beynahe mit der bloßen Ueberschrift begnügen; inzwischen werde ich einige Wolfsche Sätze abkürzen, um für andere etwas Platz zu gewinnen. (L.)

Erklärung.

3. Die **Archimedische Wasserschraube** oder **Wasserschnecke**, ist ein um eine Welle oder Spindel schraubenförmig herumgeführter Kanal, dessen untere Oeffnung bey einer schiefen Stellung der Spindel in das Wasser eingreift, welches durch Umdrehung dieser Maschine in die Höhe gebracht werden soll, indem das mit jeder Umdrehung geschöpfte Wasser Absatzweis aus einem Gang in den andern fällt, bis es oben aus dem letzten ausgegossen wird. 1.

Anmer-

theoretisch praktischer Unterricht, das Wasser durch Röhrenwerke zu leiten; **Parrots** theoretisch praktische Abhandlung über die Besserung der Mühlräder (enthält viele Unrichtigkeiten.). Mehrere schon am Anfang der Mechanik angeführte Schriften u. a. m.

Anmerkung.

4. Man kann durch Hülfe der Wasserschraube zwar mit geringer Kraft viel Wasser, jedoch nicht sehr hoch bringen. Daher wird sie im Grundbaue gebrauchet, wenn man das Wasser heraus heben will. Sie kann auch noch auf andere Art aus dünnen Brettern und Spänen gemachet werden, wie in den Anfangsgründen zu finden.

Anmerkung.

4a) Die Theorie dieser Maschine hat ihre große Schwierigkeiten, Hr. **Hennert** hat den von der königl. Akademie zu Berlin darauf gesetzten Preis erhalten, s. das angeführte Lehrb. d. Hydraul.

Erklärung.

2. 5. Man gedenke sich über der obern und unterhalb der untern Oeffnung einer Röhre eine Welle, so daß sich beyde um Zapfen drehen, durch die Röhre aber und um beyde Wellen herum eine Kette oder Seil mit ledernen Püscheln, welche sich beym Durchgang durch die Röhre genau an die Röhrenwand anlegen, so hat man eine **Püschelkunst, Paternosterwerk, Rosenkranzmühle**, bey welcher das Wasser, in welches ihre untere Oeffnung gesetzt wird, der Höhe des äußern Wasserspiegels gemäß in die Röhre tritt, und nun durch den jedesmal bey Umdrehung der obern Welle eingezwängten Püschel erhoben wird, so daß jeder oben ausgehende Püschel das über ihm befindliche Wasser ausgießt.

Erklärung.

3. 6. Wenn man die Röhre (§. 5.) wegläßt, statt der Püschel aber Kästen oder Eimer nimmt, so hat man ein **Schöpfwerk, Kastenkunst.**

Anmerkung.

7. Die Paternosterwerke sind kostbar zu unterhalten, weil die Kugeln sich leicht zerreiben, und nehmen auch viel Kraft weg.

weg, indem sie sich an der Röhre stark reiben. Die Schöpfwerke sind im Winter nicht gut, weil die eisernen Ketten von der großen Kälte springen. Seile hingegen zerreissen leicht.

Erklärung.

8. Räder, die so eingerichtet sind, daß sie bey ihrem Umlaufen das Wasser, in das sie unten eingreifen, auffangen und auf einer gewissen Höhe wieder ausgießen, oder das Wasser durch ihre schmalen Schaufelflächen in ein schmales aufwärts gehendes Gerinne pressen, aus welchem solches oben wegen der immer nachfolgenden Schaufeln unaufhörlich ausgegossen wird, heisen **Schöpfräder.**

Erklärung.

9. ABCD sey eine hölzerne, oder besser, eine metallene Röhre, deren untere Oeffnung mit einer leicht beweglichen Klappe, wie mit einem Fallthürchen bedeckt ist; L sey ein durchbohrter Kolben, dessen obere Oeffnung gleichfalls mit einer leicht beweglichen Klappe bedeckt ist, und welcher übrigens mit einer bequem auf- und nieder zu ziehenden Stange LE verbunden ist, so hat man ein **Saugwerk, Plumpe oder Pumpe.** 5.

Anmerkung.

10. Eine solche Pumpe dient zur Erhebung und Ausgiessung des Wassers, in welches die untere Oeffnung der Röhre eingesetzt wird. Anfangs befindet sich nämlich zwischen dem Kolben und dem untern Wasserspiegel in der Röhre Luft, die mit der äusern atmosphärischen Luft einerley Ausdehnungskraft hat. Sobald der Kolben L in die Höhe gezogen, also der Raum zwischen dem Kolben und dem Wasser vergrößert wird, muß sich die eingeschlossene Luftmasse in diesen größern Raum ausbreiten. Hierdurch wird aber ihre Ausdehnungskraft vermindert (Aerom. §. 19.) und es druckt nun die äußere Luft stärker auf das ringsum die Röhre herumstehende Wasser, als die

innere Röhrenluft entgegendruckt, es muß also das Wasser in der Röhre höher steigen, als das äußere Wasser steht, bis der Gegendrück der erhöhten Wassersäule und der Ausdehnungskraft der eingesperrten Luft zusammengenommen, dem Druck des äußern Wassers und der darauf ruhenden atmosphärischen Luft zusammengenommen das Gleichgewicht hält; indem nun der Kolben wieder niedergehet, fällt die Klappe I zu, und die auf der Kolbenöffnung liegende Klappe bey L öffnet sich, so daß von der unter dem Kolben befindlichen Luftmasse **ein Theil durch die Kolbenöffnung herausfährt**, welches geschieht, so bald die eingesperrte Luftmasse durch den niedergehenden Kolben wieder bis zur Dichtigkeit der äusern Luft zusammengepreßt worden, und der Kolben nun noch tiefer zu sinken fortfährt (Aerom. §. 19.) Auf solche Art kommt die Ausdehnungskraft der eingesperrten Luft wieder ins Gleichgewicht mit der Ausdehnungskraft der äuseren, und die Kolbenklappe fällt also, sobald der Kolben seinen tiefsten Stand erreicht hat, wieder zu. Wird nunmehr der Kolben aufs Neue erhoben, so muß sich die zurückgebliebene Luftmasse wieder durch den ganzen Raum unter dem Kolben ausbreiten, und weil ein Theil davon durch die Kolbenöffnung herausgefahren ist, so kann sie ihre vorige Ausdehnungskraft, welche das fernere Steigen des Wassers verhinderte, nicht bis zur gänzlichen Erhebung des Kolbens behalten; ist z. B. bey dem gänzlichen Niedergang oder **Schub** des Kolbens nur $\frac{3}{4}$ der eingesperrten Luftmasse zurückgeblieben, so ist die Ausdehnungskraft dieser Luft, sobald der Kolben nur $\frac{3}{4}$ seines ganzen Hubs zurückgelegt hat, wieder so groß, als bey Vollendung des ersten ganzen Hubs, und bey ferneren Steigen wird sie nach Verhältniß des Steigens geringer; in dem Augenblick also, da der Kolben in diesem Beyspiel über $\frac{3}{4}$ seines ganzen Hubs hinauf geht, ist die Ausdehnungskraft der eingesperrten Luft nicht mehr hinreichend, dem äusern Druck das Gleichgewicht zu halten, die Klappe I muß also durch das Uebergewicht der äußern Kraft wieder geöffnet werden, und das Wasser in der Röhre aufs Neue steigen, bis der Kolben seinen ganzen Hub vollendet hat. So geht es bey fortgesetzten **Kolbenspielen** fort, bis endlich das Wasser den Kolben erreicht, da dann hiernächst zwischen dem Kolben und der untern Klappe nicht mehr eingesperrte Luft, sondern blos Wasser befindlich ist, das bey jedem fernern **Schub** durch die Kolbenöffnung über den Kolben tritt, und bey jedem Hub höher hinauf gehoben wird, bis es endlich die irgendwo über dem höchsten Kolbenstand

stand angebrachte Ausgußröhre MH erreicht; ist das Wasser einmal bis zu dieser Höhe gekommen, so wird bey jedem fernern Kölbenhub so viel Wasser ausgegossen, als die Röhre auf die Höhe eines Kolbenhubs faßt, d. i. eine Wassersäule, welche den Querschnitt des Kolbens zur Grundfläche und seinen Hub zur Höhe hat. (L.)

10a) Diese Erhebung des Wassers setzt also voraus, daß, bevor das Wasser den Kolben erreicht hat, bey jedem Niedergang des Kolbens die eingesperrte Luft bis zur Dichtigkeit der äusern zusammengepreßt seyn müsse, bevor der Kolben in seine tiefste Stelle kommt. Dieses kann aber fehlen, wenn der Kolben in seinem tiefsten Stand noch zu weit von der Klappe I entfernt ist.! Dieser Abstand heist der **schädliche Raum**, den man daher so klein als möglich zu machen suchen muß. Wenn inzwischen die Ausgußöffnung M beträchtlich hoch über dem Wasserspiegel bey DC liegt, also bey Beobachtung vorstehender Regel der Kolben in einer beträchtlichen Tiefe spielen müßte, um nahe an I zu kommen, so hätte er beständig eine hohe Wassersäule über sich stehen, da sich dann das Wasser gerne zwischen dem Kolben und der Röhrenwand durchdrängt, welches gleichfalls vermieden werden muß. Um nun beyden Forderungen zugleich Genüge zu thun, macht man die Röhre ABCD kurz, und treibt unten eine besondere Röhre mit der drauf liegenden Klappe ein, welche das **Stöckelkiehl** heist, und nun werden mehrere Röhren, **Ansteckkiele**, wo es nöthig ist, oben herab angesteckt, bis man das Wasser im untern Behältniß erreicht. Die ganze zusammengesetzte Röhre von unten hinauf mit Inbegriff des Stöckelkiels, heist die **Saugröhre**, das Röhrenstück aber, worin der Kolben spielt, der **Stiefel**, auf welchem zuweilen noch **Aufsatzröhren** befestigt werden, da dann die ganze Pumpe auch ein **hoher Satz** genannt wird.

10b) Inzwischen bleibt doch immer der Fall möglich, daß der Forderung (§. 10a am Anfang) kein Genüge geschieht, da dann das Wasser auch bey fortgesetzten Kolbenspielen nur eine bestimmte Stelle unter dem Kolben erreicht und da hängen bleibt. Solche Fälle lassen sich allgemein bestimmen, welches aber hier der Raum nicht verstattet. S. das angef. Lehrb. der Hydraul.

10c) Da übrigens das Wasser vom Druck der Atmosphäre nur auf eine bestimmte Höhe, nämlich etwa 14 mal so hoch als das Queckſilber erhalten werden kann, ſo dient die Barometerhöhe (Aer. §. 38.) zu bestimmen, wie hoch der Kolben bey ſeinem höchſten Staud über dem untern Waſſerſpiegel ſtehen darf, wofern die Waſſerſäule unter ihm von der äußern Luft ſoll erhalten werden können. Weil aber die äußere Luft das Waſſer nicht blos **erhalten**, ſondern mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit während dem Hub des Kolbens aufwärts treiben ſoll, ſo muß der höchſte Kolbenſtand immer noch tiefer liegen, d. h. ſeine Höhe über dem Waſſerſpiegel kleiner ſeyn, als die 14fache Barometerhöhe an der Stelle iſt. Wenn ſie 4 Fuſe niedriger iſt, die Höhe des ſchädlichen Raums nicht über $\frac{1}{7}$ des ganzen Hubs, der Durchmeſſer der Saugröhre, ingleichen der Oeffnung bey I nicht unter $\frac{1}{6}$ des Stiefeldurchmeſſers, und die ganze **Länge** der Saugröhre nicht über das 300 fache vom Durchmeſſer der Saugröhre beträgt, ſo kann in allen gewöhnlichen Fällen der Ausübung das Waſſer dem Kolben hinlänglich folgen, ſo daß auch der Umſtand (§. 10b) nicht zu fürchten iſt. Genauere Beſtimmungen findet man im angef. Lehrb., die aber der gemeine Künſtler oder Brunnenmeiſter entbehren kann.

10d) Wenn man ſich ohne viele Umſtände überzeugen will, ob eine Pumpe ihren vollen Hub giebt, ſo darf man nur nach einem geſchehenen Hub alles Waſſer aus der Ausgußröhre ablaufen, und alsdann den Kolben wieder niedergehen laſſen; **drückt** ſie beym Niedergehen **gut aus**, d. i. giebt ſie auch beym Niedergehen gleich anfangs Waſſer, ſo hat man vollen Hub, weil ſoviel Waſſer ablaufen muß, als der Raum ausfüllt, welchen die Kolbenſtange beym Niedergehen auf die eintaugende Länge des Hubs einnimmt.

10e) Auf den ruhig ſtehenden Kolben druckt von oben herab, wenn kein Waſſer über ihm ſteht, blos die Atmoſphäre oder eine Waſſerſäule von der 14fachen Barometerhöhe, welche den Querſchnitt des Kolbens oder die Weite des Stiefels zur Grundfläche hat (Hydroſt. §. 15b. Aerom. §. 38); der Gegendruck von unten hinauf iſt um ſo viel geringer, als die Höhe der bis zum Kolben von unten hinauf reichenden Waſſerſäule ausmacht, alſo iſt die Kraft, welche man anwenden muß, den Kolben aufwärts aus ſeiner Ruhe

zu

zu bringen, genau dem Druck einer auf dem Kolben ruhenden Wassersäule von dieser zuletzt erwähnten Höhe gleich.

Hat der Kolben Wasser über sich stehen, so muß diese Wasserhöhe noch zu der vorigen addirt werden; die Reibung des Kolbens an der Stiefelwand kann ohne sonderlichen Fehler auf $\frac{1}{8}$ des Drucks gerechnet werden, und so giebt sich also die gesammte Kraft, welche nöthig wäre, den Kolben aufwärts aus seiner Ruhe zu bringen, wenn man das Gewicht einer Wassersäule, deren Grundfläche die Weite des Stiefels und Höhe, die lothrechte Entfernung der obersten Wasserschichte über dem Kolben von dem Wasserspiegel im untern Behältniß wäre, mit $1\frac{1}{8}$ multiplicirt. Dabey setze ich voraus, daß diese Regeln (§. 10c) beobachtet werden.

10f) Die (§. 10e) erwähnte Last druckt allemal auf den ruhig stehenden Kolben, wenn auch gleich Aufsatzröhren auf den Stiefel aufgesetzet sind, welche viel enger als der Stiefel sind (Hydrost. §. 15b); weil nämlich der Druck, den ein Wassertheilchen von einem über ihm stehenden Wassersäulchen leidet, sich nach allen Seiten ausbreitet, so muß daraus auf eine gegebene Grundfläche die nämliche Pressung entstehen, als wenn jedes Theilchen von einem besondern eben so hohen Wassersäulchen gedruckt würde. *) Es

*) Ich habe Gelegenheit gehabt, viele Künstler, welche Pumpen, Spritzen u. d. g. verfertigen, kennen zu lernen, welche sich schlechterdings nicht überzeugen lassen wollten, daß das Wasser in engen Aufsatzröhren auf einen Kolben von bestimmter Größe eben so stark drucken sollte, als in viel weitern Aufsatzröhren; und sie haben hiernach verschiedene Anlagen gemacht. Darum habe ich hier noch einmal den physischen Grund des Satzes (§. 15b Hydrost.) wiederholt. Diese Leute gründen ihre Behauptung blos darauf, daß das Gewicht des Wassers in der engen Röhre kleiner sey, als in der weiten. Dieses hat allerdings seine Richtigkeit, allein hier kommt es, wie in allen Fällen, gar nicht auf das Gewicht, sondern auf das mit diesem Gewicht verbundene Bestreben an, Bewegung

kommt hier nicht auf Gewicht, sondern auf Summe von Pressungen an.

10g) Sobald aber von der wirklichen Bewegung des Kolbens die Rede ist, wird im Gegentheil bey einer engen Aufsatzröhre eine noch größere Kraft, als bey einer weiten erfordert. Ich will setzen, das Wasser soll als eine Säule von der Höhe h, deren Dicke oder Querschnitt = w wäre, auf dem Kolben, dessen Querschnitt W heisen soll, ruhen, und nun durch eine auf den Kolben wirkende Kraft, die sich dem Gewicht einer Wassersäule vom kubischen Inhalt K gleich setzen ließe, in Bewegung gesetzt worden, so wird dieses mit einer gewissen Beschleunigung f geschehen, die sich aus (Mech. §. 48 w) bestimmen läßt. Wenn ich nämlich die Geschw. der Kraft K durch m, die des Wassers in der Aufsatzröhre durch n (denn m, n sind oben a. a. O. eigentlich Verhältnißzahlen für die Geschwindigkeiten (§. 48 k) ausdrucke, die Länge der Aufsatzröhre λ nenne, und die Masse des Wassers im Stiefel selbst beyseitsetze, so erhält man (a. a. O. no. I.)

$$f = \frac{K - \frac{n}{m} \cdot h \cdot w}{\frac{n^2}{m^2} \lambda w} g$$

es ist aber hier:

$$\frac{n}{m} = \frac{W}{w}, \text{ also } f = \frac{K - h \cdot W}{\frac{W^2}{w^2} \lambda w} \cdot g$$

Soll nun der Kolben in der Zeit t auf die Höhe b erhoben werden, d. i. in der Zeit t der Hub b erfolgen, so hat man (a. a. O. no. III.)

$$b =$$

gung hervorzubringen, (wie es auch bey Gewichten an einer Stange, die sich um eine Axe drehen kann, der nämliche Fall ist, so daß 1 Pfund mit 10 Zentnern das Gleichgewicht halten kann). S. Hydrost. §. 15—17. Ich nehme hier hauptsächlich auf solche Arbeiter Rücksicht, weil ich bey ihnen häufig den Wolfischen Auszug angetroffen habe.

$$b = t^2 \cdot f, \text{ also}$$

$$f = \frac{b}{t^2} = \frac{K - W \cdot h}{\frac{W^2}{w^2} \lambda \cdot W} \cdot g$$

und nun:

$$K = \frac{b W^2 \lambda w}{t^2 w^2 g} + h \cdot W$$

oder:

$$K = \left(h + \frac{b \cdot \lambda W}{t^2 \cdot w \cdot g}\right) \cdot W$$

Nun ist h . W der Druck, welchen das in der Ansatzröhre befindliche Wasser auf den ruhig stehenden Kolben ausübt, also nimmt bey der wirklichen Bewegung die Höhe des Drucks noch um

$$\frac{b \lambda W}{t^2 w g}$$

zu, und dieser Zuwachs wird unter sonst gleichen Umständen desto größer, je kleiner w d. i. je enger die Aufsatzröhren sind.

10b) Ist w = W und λ lothrecht, so ist

$$\frac{b W}{t^2 g w} = \frac{b}{t^2 g}$$

allemal ein sehr unbedeutender Bruch und daher in solchem Fall:

$$h + \frac{b W \lambda}{t^2 g w} \cdot$$

nicht merklich von h verschieden, also in der Ausübung

$$K = h \cdot W$$

anzunehmen. So hoch demnach der Stiefel über dem Kolben in der Weite W fortgeht, kann man die Berechnung der Last nach (§. 10c) führen, und wenn also die Höhe vom

untern Wasserspiegel bis zur Ansatzröhre H heist, und die gesammte zur Bewegung des Kolbens erforderliche Kraft dem Gewicht einer Wassersäule gleich gesetzt wird, deren kubischer Inhalt K wäre, so hat man mit Rücksicht auf Kolbenreibung

$$K = \tfrac{2}{3} \cdot \left(H + h + \frac{b \cdot W \cdot \lambda}{t^2\ w\ g}\right) \cdot W$$

101) Wegen der Bemerkung (Mechan. 106f) thut man wohl, wenn man an einem zweyseitigen Hebel in gleichen Entfernungen von der Umdrehungsaxe solche Pumpen anbringt, so daß die Kolbenstange in der einen niedergeht, wenn sie in der entgegengesetzten hebt, und umgekehrt, also beym Auf- und Niedergang einerley Last zu wältigen ist.

10k) Setzt man die Zeit eines Auf- und Niedergangs zusammengenommen, d. i. die Zeit eines ganzen Kolbenspiels $= t$, so muß man im vorigen Ausdruck, wo t nur auf die Zeit eines Aufgangs geht, $\frac{1}{2}t$ statt t also $\frac{1}{4}t^2$ statt t^2 schreiben, und erhält auf diese Art für ein solches doppeltes **Saugwerk** die zur Betreibung der Kolben erforderliche Kraft

$$K = \tfrac{2}{3} \cdot \left(H + h + \frac{4\ b\ W\ \lambda}{t^2\ w\ g}\right) \cdot W$$

oder wenn man den Werth von g aus (§. 48 w) Mech.) substituirt und alles in Pariser Fusen ausdruckt,

$$K = \tfrac{2}{3} \cdot \left(H + h + \frac{0{,}265 \cdot b\lambda W}{t^2\ w}\right) \cdot W$$

das giebt folgende

Aufgabe.

Die Kraft zu bestimmen, welche an einer Kolbenstange ziehen muß, durch die bey einer Pumpe Wasser auf eine verlangte Höhe gehoben werden soll.

Auflösung.

1) Man multiplicire in Pariser Fusen ausgedrückt, die ganze Höhe vom Wasserspiegel bis zum Ausgusse mit dem

Fla-

Flächeninhalt des Kolbens, oder mit der Weite des Stiefels, so hat man den Druck auf den ruhig stehenden Kolben.

2) Hat der Stiefel Aufsatzröhren, welche enger als der Stiefel sind, so multiplicire man die Zahl, wie vielmal der Stiefel oder der Querschnitt des Kolbens weiter als die Ansatzröhren ist, mit dem Hub, in Pariser Fusen ausgedruckt.

3) Was no. 2. herauskommt, multiplicire man mit $\frac{265}{1000}$.

4) Die no. 3. herausgebrachte Zahl dividire man durch die mit sich selbst multiplicirte doppelte Anzahl von Sekunden, welche ein Kolben brauchen soll, um aus seinem tiefsten Stand bis zu seinem höchsten zu kommen.

5) Die no. 4. herausgekommene Zahl multiplicire man mit dem kubischen Inhalt einer auf dem Kolben stehenden Wassersäule, die so lang als die Ansatzröhren wäre.

6) Die no. 5. gefundene Zahl addire man zu der no. 1. so kommt die Anzahl von Par. Kub. Fusen Wasser heraus, deren Gewicht die erforderliche Kraft anzeigt, die Kolbenreibung beyseite gesetzt.

7) Man erhält die wegen der Kolbenreibung erforderliche Vergrößerung dieser Kraft genau genug für die Ausübung, wenn man sie um $\frac{1}{8}$ des Ganzen vergrößert, d. i. sie mit $\frac{9}{8}$ multiplicirt. (S. §. 22.)

101) Kunst- und Werkleute können nun in jedem Fall der Ausübung selbsten untersuchen, ob die Verengung der Aufsatzröhren merklichen Schaden bringe, und wie enge sie solche machen dürfen, ohne merklichen Schaden davon zu haben. Die no. 6. im vor. Satz herauskommende Zahl ist nämlich das, was wegen der Verengung der Ansatzröhren an der Kraft zugelegt werden muß, da sonsten die no. 1. gefundene schon hinreichend wäre.

Aufgabe.

11. Ein doppeltes Druckwerk zu machen, dadurch man das Wasser sehr hoch drucken kann.

Auf-

Auflösung.

4. 1. Machet zwey Stiefel ABCD aus Messing, und unten im Boden CD ein Ventil.

2. Löthet an jeden eine Röhre an, die in H und I gleichfalls mit Ventilen versehen, so sich gegen N aufthun lassen.

3. Stosset einen Stempel K hinein, der sich genau in den Stiefel schicket, damit das Wasser zwischen ihm und der Röhre nicht heraufkommen kann.

Anmerkung.

9. 12. Ein Ventil kann man auf folgende Art machen. Man höhlet den dicken Boden des Stiefels AC nach der Figur eines abgekürzten Kegels aus, und schmergelt einen aus Messing gegossenen abgekürzten Kegel B hinein. Unten in D machet man einen Nagel vor, daß ihn das Wasser nicht umkehren kann, wenn sich das Ventil eröffnet. Man kann auch den Boden wie eine halbe Kugel aushöhlen, und eine Kugel von Messing, die genau darein passet, hinein legen.

Anmerkung.

4. 13. Es werden zwey Stifel gemachet, damit die Maschine hurtig hinter einander das Wasser ausspritzen kann, indem man es so anordnet, daß der eine Stempel niedergestoßen wird, wenn man den andern in die Höhe ziehet. Man bedienet sich ihrer zu den Feuerspritzen, ingleichen zu den Wasserkünsten.

13 a) Man sieht leicht, daß auch Druckwerke mit Saugröhren verbunden werden können, da sie dann **vereinbarte Saug- und Druckwerke** genennt werden.

Zusatz.

14. Die Berechnung der Druckwerke geschieht eben so wie bey Saugwerken; die Formeln (10h; 10k) bleiben ganz die nämlichen, was bey Saugwerken vorhin

Auf-

Aufsatzröhre' genannt wurde, ist hier die Steigröhre. (f.)

Zusatz.

15. Hier noch zwo Hauptbemerkungen:

I. Bey den bisherigen Berechnungen ist nur auf die Beschleunigung der in den verschiedenen Röhren befindlichen Wassermassen gesehen worden, nicht aber auf den Umstand, daß beym Uebergang des Wassers aus einer Röhre in die andere Kraft angewendet werden muß, die Geschwindigkeit beym Durchgang zu verändern. Wenn die Buchstaben eben die Bedeutung wie (§. 10k) haben, nur daß ich die Oeffnung, durch welche das Wasser aus jener Röhre durchgepreßt werden soll, w nenne, so ist die um des erwähnten Umstandes willen noch besonders erforderliche Kraft

$$= \frac{b\ (W^2 - w^2)}{t^2\ w^2\ g} \cdot W$$

(s. Lehrbuch S. 423. Note.) Jeder kann in vorkommenden Fällen hiernach leicht berechnen, wie klein ohne beträchtlichen Nachtheil für die Kraft die Oeffnung w genommen werden kann. Es erhellet daraus, daß man die Last ausserordentlich vergrößern kann, wenn man Klappen- oder Ventilöffnungen zu klein macht.

II. Durchaus fehlerhaft ist bisher die Formel für K (§. 10k) selbst von den größten Mathematikverständigen beym Maschinenwesen angewendet worden. Sie setzt nämlich voraus, daß die Kraft, (oder die Masse, durch welche die Kraft wirkt) nach jedem Hub oder Schub des Kolbens ihre Bewegung

wegung wieder von Null anfange. Daher hat die Formel keinen Gebrauch, wo die Kraft mittelst Massen wirkt, die sich im Kreise herumbewegen, also keinen Gebrauch bey Saug- oder Druckwerken, welche durch Göpelkünste, Tritträder, Wasserräder u. d. g. betrieben werden, der Ausdruck

$$\frac{4\,b\,W\,\lambda}{t^2\,w\,g}$$

leidet in diesen Fällen eine Verminderung, und eben dieses muß in Fällen, wo solche Kreisbewegungen noch nicht sind, erfolgen, sobald man die Bewegung der Kolbenstangen mit dem Umlauf eines Schwungrades zu verbinden weiß. Dabey ist es wichtig, den Massen der Schwungräder, der Wasserräder u. d. g. die gehörigen Abmessungen zu geben, (Mech. §. 1061), und es ist dieses eine neue höchst wichtige Lehre, nicht nur für die richtige Berechnung des Effekts, sondern auch für die Vervollkommung des Maschinenwesens. Man findet solche in der Fortsetzung meines Lehrbuchs der Hydraulik vorgetragen. (L.)

Erfahrung.

16. Wenn man aus einem mit Wasser angefüllten Behältniß eine **Röhrenleitung** abführt, so fließt am Ende derselben desto weniger Wasser aus, je länger unter sonst völlig gleichen Umständen die Röhrenleitung ist; auch fließt aus einer Röhrenleitung von doppeltem Querschnitt oder doppelter Weite mehr als doppelt so viel Wasser, bey 3facher Weite mehr als 3 mal so viel Wasser durch u. s. w. (L.)

Erfah-

Erfahrung.

17. Hr. du Buat hat das große Verdienst, die Gesetze der Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen zuerst mit einer für die Ausübung hinlänglichen Genauigkeit angegeben zu haben. Ich wurde dadurch in den Stand gesetzt, diese höchst wichtige Lehre in dem Lehrbuch der Hydraulik vollständig abzuhandeln. Zum praktischen Gebrauch kann folgendes Täfelchen dienen. (1.)

Röhren-

160	1,3	1,5	1,8	2,1	2,3	2,6	2,7	2,8	2,9	3,1	3,2	3,4	3,5	3,6	3,8	3,9	4,0	4,2	4,4	4,6
200	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	3,0	3,1	3,2	3,4	3,4	3,5	3,7	3,8	4,1
250	1,0	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	3,0	3,0	3,1	3,3	3,4	3,7
300	1,0	1,1	1,3	1,4	1,6	1,7	1,9	2,0	2,1	2,2	2,2	2,4	2,5	2,6	2,8	2,8	2,9	3,1	3,3	3,4
350	0,9	1,0	1,2	1,3	1,5	1,6	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8	2,9	3,1
400	0,8	0,9	1,0	1,2	1,3	1,5	1,7	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,4	2,5	2,6	2,7	2,9
500	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,3	1,5	1,5	1,6	1,7	1,7	1,8	1,9	1,9	2,1	2,1	2,2	2,3	2,4	2,6
600	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,4	1,4	1,5	1,5	1,6	1,6	1,7	1,7	1,9	1,9	2,0	2,1	2,2	2,4
800	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4	1,5	1,5	1,6	1,7	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1
1000	0,5	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,4	1,5	1,5	1,5	1,6	1,7	1,8
1300	0,4	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,9	1,0	1,0	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7

S. 432 u. 433. **Röhrendurchmesser in Pariser Zollen.**

Länge d. Röhrenleitung in Toisen (jede Toise zu 6 Par. Fus.)	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	9	10	11	12
	Länge des Wegs in Pariser Zollen, welchen das Wasser in den Röhren in jeder Sekunde durchläuft, wenn der Mittelpunkt der Ausflußöffnung nur 1 Zoll unter dem Wasserspiegel des Behältnisses liegt.																					
10	5,3	6,4	7,3	8,0	8,7	9,3	9,8	10,2	10,7	11,1	11,4	11,8	12,1	12,4,	12,6	12,9	13,1	13,6	14,0	14,3		
20	3,8	4,6	5,2	5,9	6,4	6,8	7,3	7,7	8,0	8,4	8,7	9,0	9,3	9,5	9,8	10,0	10,2	10,7	11,1	11,4		
30	3,1	0,8	4,3	4,8	5,3	5,7	6,0	6,4	6,7	7,0	7,3	7,6	7,8	8,0	8,2	8,5	8,7	9,1	9,4	9,8		
40	2,7	3,3	3,8	4,2	4,6	5,0	5,3	5,6	5,9	6,1	6,4	6,6	6,9	7,1	7,3	7,5	7,7	8,0	8,5	8,7		
50	2,4	2,9	3,4	3,8	4,1	4,4	4,7	5,0	5,3	5,5	5,7	6,0	6,2	6,4	6,6	6,8	6,9	7,3	7,6	7,9		
60	2,2	2,7	3,1	3,5	3,8	4,1	4,3	4,6	4,8	5,1	5,3	5,5	5,7	5,9	6,0	6,2	6,4	6,7	7,0	7,3		
70	2,0	2,5	2,9	3,2	3,5	3,8	4,0	4,3	4,5	4,8	4,9	5,1	5,3	5,5	5,6	5,8	5,9	6,2	6,5	6,8		
80	1,9	2,3	2,7	3,0	3,3	3,5	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5,1	5,3	5,4	5,6	5,9	6,1	6,4		
90	1,8	2,2	2,5	2,8	3,1	3,3	3,6	3,8	4,0	4,2	4,3	4,5	4,7	4,8	5,0	5,1	5,3	5,5	5,8	6,0		
100	1,7	2 1	2,4	2,7	2,9	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,1	4,3	4,4	4,6	4,7	4,9	5,0	5,3	5,5	5,8		
140	1,4	1,6	1,9	2,2	2,4	2,6	2,9	3,0	3,1	3,3	3,4	3,6	3,7	3,8	4,0	4,1	4,2	4,4	4,6	4,9		

Anmerkung.

18. Es wird bey dieser Tafel vorausgesetzt, daß die Wendungen einer Röhrenleitung aus einer Richtung nach einer andern nicht nur durch gehörig gekrümmte Röhren geschehen, sondern daß auch diese gekrümmte Röhren etwas weiter als die übrigen genommen werden. Ohne diese Beobachtung könnte die Ausflußmenge etwas geringer ausfallen. (L.)

Anmerkung.

19. Es ergiebt sich nun aus dieser Tafel die Wassermenge, welche eine Röhrenleitung bey jeder gegebenen Tiefe der Ausflußöffnung unter dem Wasserspiegel in jeder Sekunde abführt, wenn man den Weg, welchen diese Tafel für 1 Sekunde giebt, mit der Quadratwurzel aus der gegebenen Tiefe, und dieses Produkt mit der Weite der Röhren multiplicirt.

Exempel.

Wie viel Kub. Fus Wasser führt eine Röhrenleitung ab, wenn ihr Durchmesser 7 Zoll, ihre Länge 2100 Fus, und die Tiefe des Mittelpunkts ihrer Ausflußöffnung unter dem Wasserspiegel 9 Fus beträgt? Hier ist ihre Länge

$$\frac{2100}{6} = 350$$

Toisen; in der neben dieser Länge stehenden horizontalen Reihe suche man die Zahl, über welcher oben in der horizontalen Reihe für die Röhrendurchmesser die Zahl 7 steht; man findet 2,4 Zoll; diese mit der Quadr. Wurzel aus 9, d. i. mit 3 multiplicirt, giebt 7,2 Zoll; die Weite der Röhren ist 38,46 Quadr. Zoll, also die Wassermenge, welche diese Röhrenleitung in jeder Sekunde giebt, $= 7{,}2 \times 38{,}46 = 277$ Kub. Zoll. (L.)

Anmerkung.

20. Wo die Zahlen nicht gradezu in der Tafel stehen, lassen sich leicht arithmetische Mittelzahlen nehmen.

Exempel.

Es sey der Durchmesser der Röhren $3\frac{1}{4}$ Zoll, die Länge der Röhrenleitung 5300 Fus, so ist diese Länge in Toisen $= 883$; zum Durchm. von 3 Zoll gehört bey einer Länge von 800 Toisen der Weg 1,0 und zum Durchmesser von 3,5 Zoll der Weg 1,1 also zum Durchm. von $3\frac{1}{4}$ Zoll bey der Länge von

800

800 Toisen der Weg 1,05; von 800 bis 1000 Toisen beträgt der Unterschied im Weg 0,2, also von 800 bis 883 genau genug $\frac{83}{200} \times 0{,}2$ oder 0,083; demnach gehört zu 883 Toisen bey einem Durchmesser von $3\frac{1}{4}$ Zoll nach der Tafel der Weg 1,05 — 0,08 oder 0,97 Zoll. *) (L.)

Anmerkung.

21. Ueber die Höhe eines springenden Strahls hat man noch bis jetzt keine lehrreicheren Versuche als die unvollkommenen Mariotteschen, nach welchen man

$$h = -150 + \sqrt{(300 \cdot H + 22500)}$$

bekommt, wenn die Höhe vom Wasserspiegel bis zur Sprungöffnung in Par. Fusen durch H und die Höhe des Sprungs durch h ausgedruckt wird. Dabey muß aber die Sprungöffnung in einer dünnen Platte angebracht, und die Röhrenleitung weit genug seyn. (L.)

Anmerkung.

22. Feuerspritzen gehören unter die wichtigsten Maschinen im bürgerlichen Leben; sind nichts anders als Druckwerke, einfache oder doppelte, wodurch das Wasser auf eine beträchtliche Höhe zu springen genöthigt werden kann; die Stiefel werden in einen Kasten befestigt und mit solchem auf ein zum schnellen Fortführen bequemes Fuhrwerk gesetzt. Statt der Steigröhre bringt man nur einige kurze zur Umdrehung nach allen Seiten schicklich zusammengesetzte messingene Röhren an, an die man auch noch eine lange lederne Röhre, den Schlauch, ansetzt, an dessen Ende ein messingenes Gußrohr angeschroben wird. Ihre Berechnung ergiebt sich aus dem Bisherigen.

*) Die Tafel geht nur bis auf Röhrenlängen von 1300 Toisen; hätte man aber eine größere Länge, so nehme man den Weg, welchen das Wasser in 1 Sek. durchlauft, so wie ihn die Tafel für die Länge von 1300 Toisen ergiebt; hiernächst dividire man die Zahl 1300 durch die gegebene größere Länge, zieht aus diesem Quotienten die Quadratwurzel, und multiplicire nun mit dieser Quadratwurzel den angenommenen Weg des Wassers, so erhält man ihn genau genug für die größere Länge der Röhrenleitung.

Soll nämlich ein lothrechter Strahl auf die Höhe h über die Gußmündung springen, so hat man

$$H = \frac{h^2}{300} + h \text{ (§. 21.) und}$$

es muß also $\frac{h^2}{300}$ als eine Last oder Widerstand angesehen werden, welcher gleichfalls überwunden werden sollte. Der Buchstabe H (§. 10k) hat eine andere Bedeutung, und kann hier ganz beyseitgesetzt werden; statt des dortigen h aber muß man hier ausser der Höhe der Gußmündung über dem mittlern Kolbenstand noch $\frac{h^2}{300}$ setzen; heißt also die Höhe der Gußmündung p, so setzt man (§. 10k)

$\frac{h^2}{300} + p$ statt h, w ist die Weite des Schlauchs, λ seine Länge, W die Weite eines Stiefels oder die Grundfläche eines Kolbens; nimmt man nun den Ausdruck (§. 15. I.) noch mit, wo w hier angewendet, die Weite oder Größe der Gußöffnung bedeutet, so ergiebt sich, alles in Pariser Fusen ausgedruckt, die erforderliche Kraft zur Betreibung der Spritze mit 2 Stiefeln, ohne Rücksicht auf Reibung

$$K = \left(\frac{h^2}{300} + p + \frac{0{,}265 \cdot b \cdot \lambda \cdot W}{t^2 \cdot w} + \frac{b^2 (W^2 - w^2}{t^2 \cdot w^2 \cdot 15{,}09} \right) \cdot W$$

Bey Röhrenleitungen wird überdas ein gewisser Theil der Kraft verwendet, die Hindernisse zu überwinden, welche die Wassertheilchen einander selbsten und die Röhrenwände ihnen entgegensetzen, zumal wenn das Wasser mit beträchtlicher Geschwindigkeit durchgetrieben wird. Diese habe ich im Lehrb. der Hydraulik

$$= \frac{0{,}0022 \cdot \lambda \cdot b^2 \cdot W^2}{t^2 \cdot \delta \cdot w^2}$$

bestimmt, wo δ der Durchmesser der Kreisfläche w ist. Also hat man vollständig

K =

$$K = \left(\frac{h^2}{300} + p + \frac{0{,}265 \cdot b \cdot \lambda \cdot W}{t^2 \cdot w} + \frac{b^2 \cdot (W^2 - w^2)}{t^2 \cdot w^2 \cdot 1509} + \frac{0{,}00022 \cdot \lambda \cdot b^2 \cdot W^2}{t^2 \cdot \delta \cdot w^2}\right) \cdot W$$

ohne die Kolbenreibung. (L.)

Anmerkung.

23. Gedenkt man sich unter HN (Fig. 4.) ein cylindri- 4.
sches oben verschlossenes Gefäß, und die Steigröhre nahe über dem Boden dieses Gefässes angebracht, so hat man ein doppeltes Druckwerk mit einem Windkessel. Auf solche Art verfertigt man auch Feuerspritzen mit einem Windkessel, deren Vorzug darinn besteht, daß bey jedem Rückgang eines Kolbens das Wasser durch die im Windkessel zusammengepreßte Luft fortzuspringen genöthiget wird. Nicht nur ist diese beständige gleichstarke Unterhaltung des Strahls für sich schon beym Feuerlöschen von Wichtigkeit, sondern es hat auch diese Wirkung zugleich den nämlichen Erfolg, welchen ich (§. 15. II.) von den Schwungrädern erwähnt habe. Dem Hrn. H. **Karsten** gebührt die Ehre, diesen letztern Vortheil zuerst bemerkt zu haben, da man die Windkessel nur wegen der Fortdauer des Strahls angebracht hatte. (L.)

Anmerkung.

24. Eine Röhre oder Röhrenleitung, durch welche das Wasser aus einem Behältniß abgeführt werden soll, muß, wenn man nicht durch besondere Anstalten den Druck der Atmosphäre zu Hülfe nimmt, überall tiefer als der Wasserspiegel im Behältniß liegen. Wenn aber auch eine Röhrenleitung Stellen hätte, die nur nicht höher, als es der Barometerhöhe in solcher Gegend gemäß ist, über dem Wasserspiegel liegen, so muß das Wasser dennoch durch sie abfließen, wofern man sie anfänglich ganz mit Wasser anfüllt, also während der Anfüllung ihre Ausflußöffnung verstopft, und die Einflußöffnung etwa mit einer Klappe bedeckt. Es ist nämlich der Druck vom Wasserspiegel bis zur höchsten Stelle der Röhrenleitung mit Inbegriff des atmosphärischen größer, als der Gegendruck, welchen die Wassersäule von der Ausflußöffnung bis zur höchsten Stelle der Röhrenleitung vermög der Atmosphäre ausübt, sobald man den untern Spunden auszieht; es muß also jene Wassersäule in Be-

wegung gesetzt werden, und auf solche Art beständiger Abfluß erfolgen. Eine Röhre oder Röhrenleitung dieser Art heist ein **Heber.**

Offenbar wirkt die Atmosphäre bey jeder Röhrenleitung eben so auf Ein- und Ausflußöffnung, aber sie ist dabey entbehrlich, beym Heber **nothwendig.** Uebrigens muß der Ausfluß aus einem Heber völlig eben so berechnet werden, wie bey jeder Röhrenleitung. (L.)

Anmerkung.

25. Die Lehre vom Wasserstoß mit ihrer Anwendung auf unterschlägige Räder, läßt sich hier nicht beybringen. Nur um sie nicht ganz übergangen zu haben, kann men folgendes merken. Der Querschnitt eines isolirten, d. h. ringsum blos von Luft umgebenen Wasserstrahls sey da, wo er an eine Fläche senkrecht stößt, = z, die Höhe, welche der Geschwindigkeit des Strahls an dieser Stelle zugehört, heise H; die Fläche, welche den Stoß auffängt, welche nach der Richtung des Stoßes mit einer Geschwindigkeit aus, welche der Höhe h zugehört, und die Kraft des Stoßes werde durch das Gewicht einer Wassersäule ausgedruckt, deren Kubikinhalt = K ist, so ist

$$K = (2H + h - 3\sqrt{Hh}) \cdot z$$

Ist die Stoßfläche die Schaufelfläche eines Rades, die also mit der Geschwindigkeit $2\sqrt{gh}$ herumläuft, so giebt das Produkt aus der Größe der Kraft in die Geschwindigkeit das **mechanische Moment** oder den Effekt; oder wenn dieser E heist, so ist

$$E = K \cdot 2\sqrt{gh} = (2H + h - 3\sqrt{Hh}) \cdot z \cdot 2\sqrt{gh}.$$

Bey einerley H und z ändert sich also der Effekt, nachdem man h größer oder kleiner werden läßt, d. i. nachdem man dem Rad eine kleinere oder größere Last zu wältigen giebt, und der Effekt wird am größten, wenn man

$$h = 0{,}18 \cdot H$$

nimmt.

Nur muß der Durchmesser der Stoßfläche nirgends weniger als $\frac{1}{3}$ vom Durchmesser des Strahls betragen, damit sie den sich ausbreitenden Strahl ohne merklichen Verlust auffangen könne.

Es ist immer vortheilhafter, das Wasser in ein hinlänglich tiefes Behältniß vor dem Rad treten zu lassen, aus welchem

chem es durch eine unten angebrachte Oeffnung isolirt gegen die Schaufeln ströhmt, als das Rad in einem Gerinne laufen zu lassen.

Beym oberschlägigen Rad wirkt das Wasser hauptsächlich durch sein Gewicht, wenig durch den Stoß, und seine vortheilhafte Betreibung erfordert eine langsame Bewegung, so daß eine Schaufel nicht über 7 höchstens, bey hohem Gefälle und vielem Wasser, 9 Rhl. Fuse in 1 Sekunde durchlaufe. Bey Mühlen, die durch diese Räder betrieben werden, muß man also ja nicht die große Umlaufsgeschwindigkeit des Läufers durch große Geschwindigkeit des Wasserrades zu erhalten suchen, sondern durch Vergrößerung des Kammrades, so daß auf einen Umgang des Kammrades mehr Umlauf des Trillings fallen, als beym unterschlägigen Wasserrad.

Es ist ohne Widerrede eine völlig entschiedene Sache, daß bey hinlänglichem Gefälle ein oberschlägiges Rad allemal mehr ausrichtet, als ein unterschlägiges, wenn beyde mit gleich guten Einsichten gebaut und betrieben werden. S. das mehr erwähnte Lehrbuch der Hydraulik und dessen Fortsetzung.

Ende der Hydraulik.

Anfangs-Gründe der Optik.

Erklärung.

1.

Die optischen Wissenschaften haben das Ausmeßbare bey den Lichte zum Gegenstande, und belehren uns über die Erscheinungen der Grösse, Gestalt und Bewegung der Körper, in so ferne sie durch das Gesicht empfunden werden. Im engern Sinne wird zur **Optik** nur dasjenige gerechnet, was sich von den Lichtstrahlen, in so ferne man sie blos als gerade Linien betrachtet, deren Richtung durch nichts abgeändert worden ist, sagen läßt.

Erfahrung.

2. Wenn wir einen Gegenstand **sehen** wollen, so müssen wir das Auge nach ihm richten, und von ihm ungehindert nach dem Auge eine gerade Linie ziehen können. Zugleich muß er aber auch **erleuchtet** seyn, d. h. sich in einem Zustande befinden, daß er auf irgend eine Art unser Auge rühren kann, weil wir sonst keine Empfindung von ihm, durch das Auge haben könnten.

Erklärung.

3. Diese Ursache der **Sichtbarkeit** der Körper nennen wir das **Licht**. Ob nun die Körper auf unser Auge würken, daß sie würklich etwas Materielles aus sich ausströmen lassen, was einen Eindruck auf das Auge macht, oder ob sie vielleicht auf unser Auge nur wie

die

die schallenden Körper auf unser Ohr wirken, d. h. eine feine durch den ganzen Weltraum verbreitete Materie in eine Art von Erschütterung versetzen, wie die schallenden Körper unsere gröbere Luft, das ist eine Untersuchung, die mehr dem Physiker als Mathematiker zugehört. Nach jener Theorie, welche (man auch die Neutonianische nennt) würde ein Lichtstrahl in einer Reihe sehr feiner Körpertheilchen bestehen, die von einem leuchtenden Körper nach dem Auge zufahren, nach dieser aber würde man annehmen müssen, daß die Theilchen eines leuchtenden Körpers sich in einer Art von Bewegung befänden, wie die Theile eines schallenden, und daß diese Bewegung durch irgend eine feine Materie geradlinigt bis zu unserm Auge fortgepflanzt würde, und also das Wesen eines Lichtstrahles in einer Reihe von schwingenden Theilchen einer sehr zarten Flüssigkeit bestände, welche aber nun freylich nicht die Luft seyn könnte, weil wir auch in dem luftleeren Raume Körper sehen können. Die letztere Theorie heist auch die **Eulerische**, oder das **Vibrationssystem**, so wie die Neutonianische unter dem Nahmen des **Emanationssystems** bekannt ist. Dem Physiker liegt es ob, zu untersuchen, welche von beyden Theorien die wahrscheinlichste ist. Die beste Schrift über diesen Gegenstand ist von dem jetzigen Hrn. Prof. Heinrich in Ingolstadt. „**Kömmt das Neutronische oder Eulerische System vom Lichte mit den neuesten Versuchen und Erfahrungen der Physik mehr überein**„ eine mit dem Preise belohnte Abh. **in den neuen philosophischen Abh. der bayrischen Akad. der Wissens.** V. Band 1789. Ebendas. befindet sich auch über diesen Gegenstand eine lesenswerthe Abh. vom Hrn. B. **Arbutheor**, Abte zu St. Jacob in Regensburg. Die Eulerische Theorie ist in Eulers opusculis varii argumenti, und in dessen lettres a une princesse d' Allemagne umständlich zu ersehen.

Zusatz.

4. Worinn nun aber auch ein Lichtstrahl bestehen mag, so müssen wir uns denselben doch immer als eine **gerade Linie** gedenken (§. 2.) Da nun aber ein Gegenstand überall gesehen werden kann, wo wir von ihm ungehindert nach dem Auge eine gerade Linie ziehen können, so schließt man, er schicke nach allen Seiten Lichtstrahlen aus, die ihn, oder vielmehr jeden leuchtenden Punkt desselben umgeben, wie die Halbmesser einer Kugel ihren Mittelpunkt.

Erklärung.

5. **Wo kein Licht vorhanden, oder Mangel des Lichtes ist, befindet sich Schatten oder Dunkelheit.** Je weniger Lichtstrahlen von einem leuchtenden Körper an einen Ort hinfallen können, desto geringer ist auch die Erleuchtung, und desto stärker der Schatten. **Abwesenheit alles Lichtes ist Finsterniß.**

Erklärung.

6. **Für sich leuchtende Körper** sind solche, die durch eignes Licht auf unser Auge wirken, z. E. die Sonne, das Feuer u. d. g. **Dunkele Körper** nennt man diejenigen, welche ohne von einem leuchtenden Körper Lichtstrahlen zu empfangen, nicht auf unser Auge wirken können. Z. E. die meisten Gegenstände auf unserer Erde, der Mond und mehrere andere Weltkörper. **Durchsichtige Körper** heissen solche, welche die Lichtstrahlen durchlassen, wie Glas, Wasser u. d. g.

6 a) In dünnen Scheibchen sind Materien durchsichtig, welche in dicken Stücken oft kein Licht durchlassen, ja die durchsichtigsten Körper können bey allzugroßer Dicke undurchsichtig zu seyn scheinen, welches so viel beweist, daß auch in einem durchsichtigen Körper, immer sehr viele Theile sind, welche das Licht aufhalten, und es nicht durchlassen.

Zusatz.

Zusatz.

7. Dunkele Körper werden durch das von einem leuchtenden Körper auf sie fallende Licht selbst sichtbar. Sie müssen also das auffallende Licht zurückwerfen, weil wir sie sonst nicht sehen könnten. Da nun aber die so genannten schwarzen Körper dunkel erscheinen, wenn gleich Licht auf sie fällt, so müssen diese wohl das auffallende Licht entweder verschlucken, oder sonst unthätig machen, daß es das Auge nicht rühren kann, und so sehen wir denn den schwarzen Körper, so wie den Schatten, bloß in so fern er an benachbarte hellere Körper gränzt. Ueberhaupt mag aber wohl jeder Körper, bald mehr bald weniger solche Theilchen auf seiner Oberfläche haben, die kein Licht zurückwerfen, und daher neben solchen, die es zurückwerfen, dunkel oder schwarz erscheinen müssen.

Zusatz.

8 Da die Lichtstrahlen von einem leuchtenden Punkte A, nach divergirenden Richtungen Ab, Ac, Ad, Ae, Af &c. ausfahren, so kann ein dunkeler Körper, der weit von A weg ist, nicht so viel Luftstrahlen von A empfangen, als wenn er näher dabey ist, d. h. ein dunkeler Körper, wird von einem leuchtenden desto schwächer erleuchtet werden, je weiter er von demselben weg ist, wie auch die Erfahrung bestätigt. 1.

8a) Es sey E (Fig. 125. Geom.) ein leuchtender Punkt, und CD eine kreisrunde Fläche, in dem senkrechten Abstande EF von E, so ist alles Licht, was die Fläche von E empfängt, innerhalb des körperlichen Raumes des Kegels CED enthalten. Gedenkt man sich nun diesen Kegel bis nach G hinaus, verlängert, und in dem Abstande EG mit einer ebenen Fläche parallel mit CD durchschnitten, so ist die Durchschnittsfigur AB ein Kreis von dem Halbmesser AG, und alles Licht, was die Fläche CD bekommen würde, ist nun auf einer größeren Fläche AB vertheilt, daher diese an einzeln Stellen nicht so stark erleuchtet seyn kann, als die Fläche CD in gleichgroßen Stellen. So viel mahl begreiflich die Fläche AB größer ist, als CD, so viel mahl wird auf einen Quadratzoll der erstern, weniger Licht

als

als auf einen Quadratzoll der letztern fallen können. Nun verhalten sich aber die Kreisflächen AB, CD, wie die Quadrate ihrer Halbmesser AG, CF, oder wegen der ähnlichen Dreyecke ECF, EAG, wie die Quadrate von EG und EF. Also wird das Licht auf einem Quadratzolle der Fläche AB, so viel mahl schwächer, als auf einem gleich großen Theile der Fläche CD seyn müssen, so viel mahl das Quadrat der Entfernung EG größer ist, als das Quadrat der Entfernung EF vom leuchtenden Punkte, d. h. die **Stärke des Lichtes** nimmt ab, so wie das Quadrat der Entfernung vom leuchtenden Punkte zunimmt.

88) Gedenkt man sich den Kegel durch den Punkt E schief durchschnitten, so ist die Schnittfigur größer als die Kreisfläche CD, und da jene doch eben die Lichtmenge von E bekömmt, als diese, so muß jene in einzeln Stellen nicht so stark erleuchtet seyn, als diese. Daher hängt die Stärke der Erleuchtung einer gegebenen Fläche, auch von ihrer Lage gegen den leuchtenden Punkt E ab. Je senkrechter überhaupt die Lichtstrahlen auf eine gegebene Fläche fallen, desto stärker wird diese auch dadurch erleuchtet werden.

Zusatz.

88) Die bisherigen Sätze gelten, wenn das Licht durch keine andern Ursachen geschwächt wird, als weil es sich nach divergirenden Richtungen ausbreitet. Da es aber auf seinem Wege auch durch die Luft geschwächt werden muß, weil diese kein vollkommen durchsichtiger Körper ist, und also viele Lichtstrahlen aufhält, welche sonst auf eine vorgegebene Fläche fallen könnten, so erfordert dies neue Untersuchungen, die wahre **Stärke der Beleuchtung** eines dunkeln Körpers durch einen hellen zu bestimmen, welche aber zu schwer sind, als daß hier nur einiges davon beygebracht werden könnte. Daß indessen die Luft wirklich das Licht schwächt, bemerken wir an der untergehenden Sonne, in die wir ungeblendet hinein sehen können, weil ihre Lichtstrahlen dann einen viel größern Weg durch die Luft bis zu unserm Auge zu durchlaufen haben, als wenn sie hoch über dem Horizonte steht.

Anmerkung.

9. So kann man demnach mancherley Vergleichungen zwischen den verschiedenen Graden der Beleuchtung eines dunkeln Körpers durch einen hellen, der verschiedenen **Stärke und Schwächung des Lichtes** unter diesen oder jenen Umstän-

den

den anstellen, und was von leuchtenden Punkten bisher gesagt worden, auch auf ganze Körper anwenden, die man als aus leuchtenden Punkten zusammengesetzt ansehen kann. Alle hieher gehörige Lehren gehören in eine besondere optische Wissenschaft, welche **Bouguer** und **Lambert** zuerst unter dem Nahmen der **Photometrie** bearbeitet haben.

Essai d'optique, sur la gradation de la lumiere par Mr. Bonguer a Paris 1719. (zwote sehr vermehrte Ausgabe 1760.) Lamberti Photometria siue de mensura et gradibus luminis colorum et umbrae. Aug. Vind. 1760. **Karstens** Lehrbegriff der Math. 8 Thl.

Erfahrung.

10. Wenn man einen Strahl GC in ein finsteres Zimmer hineinfallen läßt, und ihn mit einem ebenen Spiegel BD dergestalt auffängt, daß er mit ihm einen rechten Winkel macht, so prallet er in sich selbst zurück. Hingegen, wenn man den Spiegel BD so hält, daß der einfallende Strahl FC mit ihm einen spitzigen Winkel macht, so prallt er auf der andern Seite zurück, so daß der **zurückprallende** (zurückgeworfene) **Strahl** EC einen eben so grossen Winkel ECB mit dem Spiegel macht, als der **einfallende** FC. Dieser Satz gilt, wenn man bey C auch nur ein sehr kleines Theilchen der ganzen Spiegelfläche läßt, und alles übrige des Spiegels entweder bedeckt, oder auch sich ganz weggedenkt, zum Beweise, daß eigentlich nur das Theilchen des Spiegels, worauf der Strahl EC würklich fällt, den Strahl zurückwirft, das übrige des Spiegels aber wenigstens zur Zurückwerfung des Strahles EC nichts beyträgt. 2.

Erklärung.

11. Dieses Zurückprallen der Strahlen wird die Reflexion genennet. Der Winkel FCD, den der einfallende Strahl FC mit dem Spiegel BCD machet, heisset der Einfallswinkel (Angulus incidentiae). Der Winkel ECB aber, den 2.

der

der zurückgeworfene Strahl EC mit dem Spiegel machet, der Reflexionswinkel (Angulus reflexionis.)

Zusatz.

2. 12. Daher ist in einem Spiegel der Reflexionswinkel ECB dem Einfallswinkel FCD gleich (§. 10.).

12a) Setzt man ein Perpendikel GC auf das Element der Spiegelfläche bey C, so sind auch die Winkel ECG und FCG einander gleich. Jenen nennt man auch oft den **Reflexionswinkel**, so wie diesen den **Einfallswinkel.**

Erfahrung.

3. 13. **Füllet ein conisches Glas HKI mit Wasser, und lasset den Strahl LM in dem verfinsterten Orte schief darauf fallen; so wird er nicht in einer geraden Linie in N hinfahren, sondern, wenn er aus dem Glase wieder in die Luft kommet, nach der Linie MO fortgehen, nicht anders, als wenn er aus P kommen wäre.**

Zusatz.

14. **Wenn also der Strahl des Lichtes aus einer dichteren Materie in eine dünnere, oder aus einer dünneren in eine dichtere fähret; so wird er gebrochen.**

Erklärung.

15. **Dieses Brechen der Strahlen, das ist, ihre Abweichung von der vorigen Linie, in welcher sie waren, wird die Refraction genennet.**

Erklärung.

4. 16. **Der Winkel VSX, den der einfallende Strahl TV mit dem gebrochenen SX machet, heisset der Refractionswinkel** (Angulus refractionis.) **Der Winkel ZSX, den der gebrochene Strahl**

SX

SX mit der Linie SZ machet, welche in dem Einfallspunkte S auf der Fläche des Körpers QR, darauf der Strahl fället, perpendicular stehet, wird der gebrochene oder refringirte Winkel (Angulus refractus) genennet. Endlich der Winkel TSY, den der einfallende Strahl TS mit gedachter Perpendicularlinie SY machet, bekommt den Namen des Neigungswinkels oder Inclinationswinkels (Angulus inclinationis.) 4.

16a) Statt der ganzen Oberfläche QR des Körpers, darf man sich auch nur ein kleines Stückchen derselben bey S gedenken, und das Perpendikel YS drauf setzen.

Anmerkung.

17. Der einfallende und zurückgeworfene Strahl in (§. 11.) lieget mit dem Perpendikel GC der Erfahrung zufolge allemahl in einer einzigen Ebene, welche man die **Zurückwerfungsebene** nennt. Eben das findet auch in (§. 16.) bey der Brechung des Lichtes statt, und man nennt daher die Ebene in der der einfallende Strahl, der gebrochene, und das Perpendikel liegen, die **Brechungsebene.** (M.)

Anmerkung.

18. Die bisherigen Erfahrungen zeigen nur vorläufig, was das Licht für Aenderungen seines geradlinigten Ganges erfährt, wenn es auf Spiegel oder durchsichtige Materien fällt. Die weitern Betrachtungen über diese Modifikationen des Lichtes, kommen in der Catoptrik und Dioptrik vor. So gehört nun auch die Betrachtung des Auges in dem folgenden §. eigentlich in die Dioptrik, kann aber auch ohne Nachtheil der Gründlichkeit hier schon vorkommen, wenn man das, was von dem Auge gesagt wird, blos für **Erfahrungen** nimmt, die doch einigermaßen auch diejenigen belehren, wie es mit dem Sehen zugehe, für welche die gegenwärtigen Anfangsgründe eigentlich bestimmt sind, und deren Beschäfftigung es nicht mit sich bringt, sich tief mit der Theorie des Sehens abzugeben.

Erklärung.

19. Das Auge bestehet aus verschiedenen Häuten und Feuchtigkeiten. Die erste Haut ist wie ein durchsichtiges Horn, und wird daher

die

die Hornhaut (Cornea) genennet. Mit ihr ist in dem hinteren und größten Theil des Auges eine andere zähe Haut (Sclerotica) verknüpfet, die wir die harte Haut nennen wollen. Unter der Hornhaut ist eine farbige Haut (Uvea), de en Farben von den Unwissenden der Hornhaut beygeleget werden. Diese hat mitten ein circulrundes Loch (Pupilla), welches wir den Stern nennen wollen. Mit der farbigen Haut ist eine schwarze (Choroides) verknüpfet, welche an der harten anlieget. Endlich über die schwarze ist hinten an dem Auge ein zartes netzförmiges Häutlein (Retina), welches wie ein Schleim zusammenfället, wenn man es absondert, hingegen sich wie ein leinenes Tuch ausspannet, wenn es innerhalb dem Wasser beweget wird. Es ist aus subtilen Nerven gewebet. Den hintersten und größten Theil des Auges füllet die gläserne Feuchtigkeit (humor vitreus) aus, welche einer aus Kraftmehle zubereiteten Stärke gleichet. Mitten in dem Auge unter dem Stern lieget die crystalline Feuchtigkeit (humor cristallinus) die einem geschliffenen Glase ähnlichet, und beyderseits eine Rundung hat. Endlich den Raum zwischen der crystallinen Feuchtigkeit und der Hornhaut, erfüllet eine wässerige Feuchtigkeit (humor aqueus), die bald herausfliesset, wenn die Hornhaut verletzet wird.

Erfahrung.

20. Haltet die crystalline Feuchtigkeit vor ein angezündetes Licht, oder gegen ein Fenster, und darhinter ein Papier. Rücket mit dem Papiere nach und nach gegen jene zu; so werdet ihr das Licht mit der Bewegung der Flamme; imgleichen das Fenster mit seinen Glasscheis

scheiben, sehr subtil darauf abgebildet sehen, jedoch umgekehret, so daß die Spitze der Flamme gegen den Erdboden stehet. Ziehet die crystalline Feuchtigkeit von dem Lichte etwas weiter weg; so wird das Bildlein auf dem Papiere verschwinden, aber wieder kommen, wiewohl etwas kleiner, wenn ihr mit dem Papiere näher hinzurücket. Eben dieses geschiehet mit einem erhabenen geschliffenen Glase.

20a) Nämlich mit einem so genannten Brennglase, womit überhaupt sich auch die folgenden Zusätze sehr gut zeigen lassen, weil es etwas unbequem ist, mit einem so kleinen Körper, als die chrystallene Feuchtigkeit, oder die Chrystall-Linse in dem Auge ist, dergleichen Versuche anzustellen. Die in den folgenden Zusätzen enthaltene Sätze, lassen sich aus der Theorie der Brechung alle vollkommen streng erweisen.

Zusatz.

21. Die Körper, von welchen Strahlen in das Auge fallen, mahlen sich sehr nett und subtil, aber umgekehret, hinter der crystallinen Feuchtigkeit ab.

Zusatz.

22. Dieses Bildlein ist näher hinter ihr und kleiner, wenn die abgebildete Sache weit weg ist, als wenn sie nahe ist.

Zusatz.

23. Da nun die nahen Sachen groß, die weiten klein aussehen; so siehet eine Sache groß aus, wenn in dem Auge ein großes Bild abgemahlet wird, hingegen klein, wenn sich ein kleines abmahlet. Und daher müssen zwey Körper gleich groß aussehen; wenn ihre Bilder im Auge gleich groß sind.

Zusatz.

24. Wenn die Sache beweget wird, so beweget sich auch das Bild im Auge. Daher sehen wir die Sa-

che in der Bewegung, wenn das Bildlein in dem Auge nicht auf einer Stelle bleibet.

Zusatz.

25. Weil das Bildlein gar sehr viel kleiner ist, als die Sache, die es abbildet; so kann entweder wegen der Kleinigkeit der Sache, oder der allzugrossen Weite von dem Auge, das Bildlein so klein werden, daß es einen untheilbaren Punkt im Auge einnimmt, und also die Sache nicht mehr abbildet. Derowegen kann in diesem Falle die Sache nicht gesehen werden.

25 a) Oder eigentlich, das Auge vermag die einzeln Punkte einer Sache, deren Bild so klein ist, nicht mehr deutlich von einander zu unterscheiden, und hält daher einen Punkt für den andern.

Zusatz.

26. Weil nun keine Sache in der Nähe ist, da nicht einige Theilchen; hingegen auch keine in der Weite, da nicht einige grosse Theile unsichtbar seyn sollten; so kann man weder jene, noch diese mit bloßen Augen ganz deutlich sehen, wiewohl jene deutlicher als diese. Denn wir sehen etwas deutlich, wenn wir alle Theile unterscheiden können, die in der That von einander unterschieden sind.

Zusatz.

27. Weil das Bildlein sich auf dem netzförmigen Häutlein darstellet: so muß die crystalline Feuchtigkeit ihm näher seyn; wenn ihr in der Ferne etwas deutlich sehet, als wenn ihr in der Nähe etwas erkennet (§. 22.).

27 a) Ueber den Streit, ob die Netzhaut in dem Auge, oder die so genannte **Adernhaut** (obige choroidea) das Werkzeug der Empfindung sey s. m. **Smiths** Lehrbegriff d. Optik I. Buch. 3 Kap. der Kästnerischen Uebers.)

Zusatz.

28. Daher muß in einem Auge, welches sowohl in die Ferne, als in die Nähe siehet, die crystalline Feuch-

Feuchtigkeit ihre Entfernung von dem netzförmigen Häutlein verändern können.

Zusatz.

29. Wenn die crystalline Feuchtigkeit dem netzförmigen Häutlein zu nahe ist; so können sich die nahen Sachen nicht deutlich auf ihm abbilden. Ist sie aber von ihm zu weit weg, so kann von den weiten kein deutliches Bild auf ihm formiret werden (§. 22.). Derowegen kann man in dem ersten Falle nicht wohl in die Nähe, in dem andern nicht wohl in die Ferne sehen.

29a) Ein Auge, welches blos in der Nähe, aber nicht in die Ferne deutlich sieht, heist **kurzsichtig** (myops). Im entgegengesetzten Falle **weitsichtig** (bresbyta).

Anmerkung.

30. Alle Veränderungen, die in dem Auge vorgehen, kann man auch in einem verfinsterten Zimmer wahrnehmen, wenn man durch ein geschliffenes, auf einer Seite kugelrundes, auf der anderen aber ebenes, oder auch auf beyden Seiten kugelrundes Glas (welches mit der crystallinen Feuchtigkeit im Auge übereinkommet) das Licht hinein fallen lässet. Denn es mahlen sich in einer gewissen Weite von dem Glase alle Sachen, von denen Strahlen auf das Glas fallen können, umgekehret auf das allerdeutlichste mit ihren Farben und Bewegungen ab. Dergleichen verfinsterten Ort pflegee man eine Cameram obscuram zu nennen. Wenn das Löchlein nicht viel grösser als eine Linse oder Erbse ist; kann das geschliffene Glas wegbleiben. Denn weil alsdenn die Strahlen des Lichtes, die von verschiedenen Punkten der Fläche eines Körpers hineinfallen, alle auf besondere Punkte der Wand fallen, und ohne Vermengung in das **Auge** zurücke geworfen werden: so müssen sie noch eben die Kraft behalten, die sie vorher hatten, nemlich die strahlenden Punkte, von denen sie ausgeflossen, vorzustellen.

30a) So weit muß man aber die Vergleichung des Auges mit einem finstern Zimmer nicht treiben, daß man sich die Seele als Zuschauerin gedächte, welche das Bildchen eines Gegenstandes auf der Netzhaut gleichsam mit Augen betrachtete, wie wir das Bild eines Gegenstandes in einem finstern Zimmer. Wie der Eindruck jenes Bildchens auf der

Netzhaut, eine Empfindung und Vorstellung des zugehörigen Gegenstandes in unserer Seele erweckt, wird uns wohl auf immer unerklärlich bleiben.

30b) Man hat sehr viel darüber geschrieben, warum wir einen Gegenstand nicht verkehrt sehen, da das Bild desselben in dem Auge doch verkehrt ist.

Die natürlichste Beantwortung dieser Frage ist wohl, daß wir uns der kleinen Bilder in unserm Auge gar nicht bewußt sind, und nicht wissen würden, ob sie aufrecht oder verkehrt sind, wenn uns nicht die Eigenschaften der Glaslinsen solches gelehrt hätten. Aber die **Bewegung unserer Augen** sind wir uns bewußt, und beurtheilen darnach von Jugend auf die Lagen der Dinge die wir sehen. **Seitwärts** liegt dasjenige, was uns durch eine Bewegung des Auges **nach der Seite** deutlich wird, **oben** dasjenige, wozu wir das Auge **erheben, unten**, wozu wir das Auge senken müssen. Ob das Bild in dem Auge aufrechts oder verkehrt ist, lernen wir durch die bloße Empfindung nicht, und können also darnach auch gar nicht das Oben- oder Unten, das Rechts- oder Links-Seyn an einem Gegenstande beurtheilen.

30c) Warum wir mit zwey Augen nicht doppelt sehen, Smiths Lehrb. d. Optik I. B. §. 137.

Erfahrung.

31. **Leget den Spiegel an das Fenster, und tretet vor denselben. Nehmet wahr, wie groß der Stern im Auge ist. Haltet beyde Hände an die Schläfe, daß von den Seiten kein Licht mehr in die Augen fallen kann; so werdet ihr sehen, daß der Stern merklich grösser wird. Sobald ihr aber die Hände zurückziehet, wird auch der Stern sich wieder zusammenziehen.**

Zusatz.

32. Der Stern im Auge wird grösser, wenn das Licht abnimmt; hingegen kleiner, wenn das Licht zunimmt.

Zusatz.

33. Dannenhero ist er in der hellen Mittagssonne überaus klein; in der Abenddämmerung sehr groß.

33 a)

33 a) Und dies ist eine wahre Wohlthat für die feine Organisation im inneren unseres Auges. Zöge sich der Stern durch den Reitz eines allzuheftigen Lichtes nicht zusammen, so könnte das Auge durch die große Menge eines einfallenden Lichtes sehr leicht beschädigt werden. Wie aber dieses Zusammenziehn zugehe, ist noch nicht ganz ausgemacht, gehört auch nicht hieher.

Lehrsatz.

34. **Wenn das Licht auf einem dunkelen Körper fället; so wirft er allezeit einen Schatten hinter sich, dem Lichte gegen über.**

Beweis.

Denn der dunkle Körper läßet keine Strahlen des Lichts durchfallen. Da sie nun in einer geraden Linie fortgehen (§. 4.); so hindert er, daß auf einen gewissen Raum hinter ihm Strahlen fallen können. Und daher ist hinter dem Körper, dem Lichte gegen über, ein Schatten (§. 5.). W. Z. E.

Zusatz.

35. Wenn derowegen das Licht seine Stelle verändert, so rücket auch der Schatten aus seiner Stelle fort. Eben dieses muß geschehen, wenn der erleuchtete Körper sich beweget. Und dannenhero scheinet es in beyden Fällen, als ob sich der Schatten bewegte.

Zusatz.

36. Weil nichts ohne Licht gesehen werden kann, der Schatten aber ein Mangel des Lichtes ist (§. 5.); so kann er nur gesehen werden, in so weit der Körper der im Schatten lieget, einiges zurückfallendes Licht von den Seiten her empfänget, und in so weit man die Gränzen des Schattens und Lichtes sehen kann.

Aufgabe.

37. **Aus der gegebenen Höhe eines Körpers TS, und der Höhe der Sonne über dem**

4. Horizonte SVT, die Länge des Schattens TV zu finden.

Auflösung und Beweis.

Weil in dem rechtwinklichten Triangel STV der Winkel V gegeben ist, als der das Maaß der Sonnenhöhe ist; so wisset ihr auch den dritten S (§. 77. Geom.). Derowegen könnet ihr die Länge des Schattens TV (§. 20. Trigon.) finden. W. Z. E. u. Z. E.

Es sey die Sonnenhöhe SVT 37° 45′ TS 187 Schuhe.

Log. Sin. V	9,7869056
Log. TS	2,2718416
Log. Sin. S	9,8980060
	12,1698476
Log. TV	2,3829420

welchem in den Tabellen am nächsten kommet 2415″

Zusatz.

38. Wenn euch die Höhe TS und die Länge des Schattens TV gegeben wird; so könnet ihr (§. 26. Trigon.) die Sonnenhöhe TVS finden.

Zusatz.

39. Wenn ihr den Schatten TZ kürzer annehmet als TV; so ist der Winkel TZS den beyden Winkeln ZVS und ZSV zusammen gleich (§. 74. Geom.). Und demnach ist der Schatten eines Körpers kürzer, wenn die Sonne (oder ein anderes Licht) hoch, als wenn sie niedrig stehet.

Aufgabe.

5. 40. Aus der gegebenen Länge des Schattens zweyer Körper AB und DB, und der Höhe des einen DE, die Höhe des andern zu finden.

Auf-

Auflösung.

Wenn der Körper DB dergestalt hinter dem Körper AC stehet, daß beyder Schatten in B aufhöret; so ist, wegen der rechten Winkel bey D und A, die Linie DE mit AC parallel (§. 73. Geom.), folgends: wie der kurze Schatten DB zu der kleinen Höhe DE, so der lange Schatten AB zu der grossen Höhe AC (§. 149. Geom.) Derowegen könnet ihr diese durch die Regel Detri finden. 5.

Anmerkung.

41. Wegen der sehr großen Entfernung der Sonne von der Erde, sind alle Strahlen, welche von einem gewissen Punkte der Sonne ausfließen, auf der ganzen Erde für parallel zu nehmen. Derowegen bleibt der Winkel B von einerley Größe, wenn der Stab DE auch nicht hinter dem Körper AC selbst, sondern an jedem andern Orte eingesteckt worden wäre, der mit A in derselben Horizontalfläche läge. Nur versteht sich, man muß in demselben Augenblicke, da man des Gegenstandes AC Schatten mißt, auch des Stabes DE Schatten messen, damit man beyde Schatten für einerley Sonnenhöhe bekomme. (M.)

Zusatz.

42. Derowegen wenn ihr auf dem Felde einen Stock DE nach Belieben einstecket, seine Höhe und die Länge seines Schattens DB messet, über dieses die Länge des Schattens eines Baumes, oder Thurmes, oder einer andern Höhe AB erforschet; so könnet ihr nach gegenwärtiger Aufgabe dieselbe Höhe finden. 5.

Es sey DB 7′ DE 5′ AB 45′.

$$\frac{7 - 5 - 45}{\quad 5 \quad}$$

$$225$$

$$\begin{array}{r|l} 21 & \\ 228 & 32\frac{1}{7} = AC \\ 22 & \end{array}$$

42a) Da die Sonne in den bisherigen Aufgaben nicht für einen leuchtenden Punkt zu halten ist, sondern dieselbe, wie die Astronomie lehret, einem Beobachter auf der Erde, ohngefähr einen halben Grad an dem Himmel einzunehmen
7. scheint, so sey (Fig. 7.) ZS ein von dem obern Sonnenrande herkommender Strahl, und VS ein anderer von dem untern Sonnenrande, so ist leicht einzusehen, daß jeder Punkt innerhalb des Raumes zwischen Z und V schon von einem **Theile der Sonnenscheibe** beschienen werden kann, und daher schon einigen Grad der Erleuchtung haben muß, da hingegen der ganze Raum zwischen T und Z von gar keinem Sonnenstrahle unmittelbar getroffen werden kann, und daher ganz im Schatten des Gegenstandes TS liegen muß. Diesen Raum TZ heist man den **ganzen Schatten**, oder auch den **Kernschatten**, da hingegen der Raum ZV, in welchen schon einiges Sonnenlicht gelangen kann, der **Halbschatten** genannt wird. Dieser Halbschatten wird immer schwächer und schwächer von Z nach V zu, und über V hinaus findet gar kein Halbschatten mehr statt. Einen solchen Halbschatten kann man hinter jedem Körper sehen, der nicht blos von einem leuchtenden Punkte, sondern von einem beträchtlich großen leuchtenden Körper beschienen wird.

42b) Die Länge dieses Halbschattens ZV auf einer Horizontalfläche kann man aus den Winkeln TZS, TVS oder
7. aus der Höhe des obern und untern Sonnenrandes über der Horizontalfläche und der Höhe des Gegenstandes, oder dem Perpendikel ST finden. Denn man hat in dem rechtwinklichten Dreyecke TZS, die Seite TS und den Winkel Z, und in dem Dreyecke VTS, ebenfalls die Seite TS, und die Winkel V, der ohngefähr um einen halben Grad kleiner ist als Z, daraus findet man TZ und TV, folglich $ZV = TV - TZ$, oder die Länge des Halbschattens, welchen man denn desto größer finden wird, je kleiner die Winkel Z und V sind, je niedriger also die Sonne steht, daher denn auch die wahre Länge des Kernschattens TZ, durch unmittelbare Beobachtung nicht recht sicher anzugeben ist, weil er sich zu sehr in den Halbschatten verliehrt, dessen wahre Gränze sich nur berechnen, aber nicht messen läßt. Die vorhergehenden Aufgaben verstatten also wegen des Halbschattens in der Ausübung keine große Genauigkeit, und gar keine, wenn die Sonne tief steht.

Lehr-

Lehrsatz.

43. **Wenn der dunkle Körper kleiner ist, als das Licht; so wird der Schatten immer schmäler, je weiter er vom Körper wegkommet. Ist er grösser, so wird der Schatten immer breiter. Wenn aber beyde Körper von gleicher Grösse sind; so behält der Schatten überall eine Breite.**

Beweis.

Die Axe gehet mitten durch das Licht und den erleuchteten Körper, und der äussere Strahl berühret sowohl das Licht, als den erleuchteten Körper. Wenn nun das Licht grösser ist, als dieser; so ist der Strahl in diesem der Axe näher, als in jenem. Derowegen kommet der Schatten hinter dem Körper der Axe immer näher, je weiter er von ihm weg ist. **Welches das erste war.**

Hingegen wenn das Licht kleiner ist, als der erleuchtete Körper; so ist der äussere Strahl in jenem der Axe näher, als in diesem, und dannenhero gehet der Schatten immer weiter von der Axe weg, je weiter er von dem Körper wegkommet. **Welches das andere war.**

Wenn die beyden Körper von gleicher Grösse sind, so sind die beyden äussersten Strahlen parallel. Derowegen bleibet der Schatten beständig von einer Breite (§. 22. Geom.). **Welches das dritte war.**

Lehrsatz.

44. **Wenn das Licht und der erleuchtete Körper Kugeln von gleicher Grösse sind; so ist der Schatten cylindrisch. Wenn das Licht eine grössere Kugel ist, als der erleuchtete Körper; so hat der Schatten die Figur eines Kegels. Endlich wenn das Licht eine kleinere Ku-**

gel ist, als der erleuchtete Körper; so hat der Schatten die Figur eines Bechers.

Beweis.

Die äussersten Strahlen berühren ringsherum den erleuchteten Körper. Derowegen, wenn dieser eine Kugel ist; so ist die Grundfläche des Schattens ein Circul. Da nun in dem ersten Falle der Schatten einerley Breite behält, in dem andern aber immer schmäler, und in dem dritten immer breiter wird; so muß die Figur im ersten ein Cylinder (§. 179. Geom.), im andern ein Kegel (§. 185. Geom.), und im dritten ein Becher seyn. W. Z. E.

44 a) Umständlichere Berechnungen hierüber, so wie auch über die Halbschatten in diesem Falle findet man in Kästners angew. Mathem. (Opt. 10.)

Zusatz.

45. Wenn man in allen drey Fällen den Schatten mit der Grundfläche parallel zerschneidet; so kommt überall ein Circul heraus, und zwar sind im ersten Falle alle Circul einander gleich; im andern aber werden sie immer kleiner, und im dritten immer gröſſer, je weiter man von dem Körper hinauskommt (§. 181. 186. Geom.).

Erfahrung.

46. Man lasse Sonnenstrahlen durch eine kleine kreisrunde Oeffnung in ein verfinstertes Zimmer hineinfallen, und fange sie mit einem dreyeckichten gläsernen Prisma dergestalt auf, daß sie auf eine von den Seitenflächen des Prisma senkrecht auffallen, so werden sie dadurch nicht allein von ihrem Wege abgelenkt, sondern auch hinter dem Prisma, wo man sie mit einem Blatt Papiere auffangen kann, sich mit den schönsten Farben des Regenbogens darstellen, und nicht mehr die gewöhnliche weise

und

und helle Farbe des Sonnenlichtes haben. Fängt man diese farbichten Strahlen, in welche das weiße Sonnenlicht vermittelst seiner Brechung in dem Prisma, gleichsam zerlegt wird, mit einem Spiegel auf, so werden sie wie das gewöhnliche Licht zurückgeworfen, läßt man sie aber auf ein Brennglas fallen, so werden sie durch dasselbe wiederum vereinigt, und stellen dann in dem Brennpunkte des Glases, wieder das gewöhnliche weiße Sonnenlicht dar. Vor ihrer Vereinigung sind sie noch gefärbt, wiewohl schon nahe vor dem Brennpunkte, die einzeln Farben nicht mehr so gut unterschieden werden können. Hinter dem Brennpunkte laufen sie wieder gefärbt aus einander. Auf dem Papiere, womit man die farbigten Strahlen hinter dem Prisma auffängt, unterscheidet man, und zwar immer in derselben Ordnung, von unten nach oben, folgende Farben, mit ihren Schattirungen in einander: Roth, orangegelb, hellgelb, grün, hellblau, dunkelblau, violet. Es ist aber schwer, die Gränze einer jeden einzeln Farbe genau anzugeben, weil sie gleichsam in einander fließen, oder durch unmerkliche Abstuffungen in einander übergehen. Läßt man einen Theil des gefärbten Lichtes, so weit es einerley Farbe hat, z. B. Bloß rothes, durch ein kleines rundes Loch, was man an der Stelle, wo sich diese Farbe auf dem Papiere zeigt, gemacht hat, hindurch fallen, so wird das dahinter gehaltene Auge, die Empfindung der rothen Farbe haben. Läßt man aber diesen rothen Strahl auf ein zweytes Prisma fallen, so bleibt er auch nach dieser zweyten Brechung noch roth, und wird nicht weiter in andere Farben zerlegt. Es wird aber dieser rothe

the Strahl durch das zweyte Prisma, weniger aus seiner Lage gebrochen, als der gelbe, blaue, und anders gefärbte Strahl (M.)

Zusatz.

47. Diese Erfahrungen berechtigen uns anzunehmen, daß das weißlichte Sonnenlicht, also die weiße Farbe aus einer Vermischung verschiedener in Absicht auf ihre Brechbarkeit ungleichartiger Farben zusammengesetzt sey, daß man vermittelst des Prisma diese weiße Farbe in ihre farbichten Bestandtheile, wegen ihrer verschiedenen Brechbarkeit, zerlegen, und diese durch Hülfe eines Brennglases wiederum zur weisen Farbe vereinigen könne. (M.)

Anmerkung.

48. Eben dergleichen Strahlen entstehen, wenn ihr den
3. Strahl des Sonnen: Lichtes L M in ein mit Wasser gefülltes conisches Glas einfallen lasset. Und wenn dieses in einem verfinsterten Gemache geschiehet, formiren sie einen großen, zuweilen doppelten Regenbogen. Man muß aber das Glas mit Wasser, eben als wie das geschliffene prismatische Glas so lange erhöhen und erniedrigen, bis die Strahlen unter dem rechten Winkel einfallen.

Zusatz.

49. Da demnach in der weisen Sonnenfarbe gleichsam alle übrigen Farben schon vereinigt sind, so folgt, daß wenn ein Körper die Eigenschaft hat, alles auffallende Sonnenlicht, ohne weitere Aenderung zurück zu werfen, derselbe weiß aussehen müsse, daß wenn er aber z. E. nur den rothen Bestandtheil des Sonnenlichtes zurückwürfe, die übrigen aber etwa verschluckte, oder sonst zurückhielte, daß sie nicht reflectirt würden, derselbe auch nicht anders als in dieser rothen Farbe erscheinen könne, und so liegt denn der Grund, warum die Körper diese oder jene Farbe zeigen, sobald sie von der Sonne, oder sonst einem leuchtenden Körper beschienen werden, theils in dem Lichte selbst, in so ferne es schon die Farben enthält,

hält, theils in einer besondern Beschaffenheit der Körper, vermöge der sie entweder nur diesen oder jenen gefärbten Bestandtheil des auffallenden Lichtes zurückzuwerfen vermögen, welches weiter zu untersuchen aber nicht hieher, sondern in die Naturlehre gehört.

49a) Ein Körper, auf den entweder kein Licht fällt, oder das sämmtlich auffallende Licht verschluckt, wird im gemeinen Leben **schwarz** genannt. Man sieht aber leicht, daß die schwarze Farbe eigentlich keine Farbe genannt werden sollte. Sie ist vielmehr Mangel alles Lichtes (§. 7.) So ist denn die weiße Farbe eigentlich eine zusammengesetzte aus mehrern, welche man **einfache Farben** nennt. Es ist wahrscheinlich, daß selbst nicht alle Farben, welche das Prisma hervorbringt, einfache sind, daß die grüne z. B. schon ein Gemisch aus Gelb und Blau ist. Einige nehmen nur 3 **Hauptfarben, roth, gelb und blau an**, und zeigen, daß durch Mischungen derselben alle übrigen hervorgebracht werden können. Alles hieher gehörige ist aber gleichfalls ein Gegenstand der Naturlehre. M. s. indessen hierüber Tob. Mayeri Comment. de affinitate colorum in dessen opp. ineditis.

49b) Die bisherigen Entdeckungen über die Farben, haben wir vorzüglich **Neuton** zu verdanken, welcher solche in seinen lectionibus opticis Cambridge 1669—71 und in seiner (von Clark ins Lateinische übersetzten) Optice . . Lond. 1706. gelehrt hat.

Lehrsatz.

50. Ein Körper sieht von weitem dunkeler aus als in der Nähe.

Beweis.

Von jedem Punkte eines jeden erleuchteten Körpers fließen unzählig viel Strahlen aus (§. 18.): sie fahren aber immer weiter von einander, je weiter man von dem Körper wegkommt (§. 9.) Derowegen können in der Nähe mehr Strahlen in die Augen fallen, als in der Weite, und also siehet er in der Nähe heller, in der Weite dunkeler aus. W. Z. E.

Anmer-

Anmerkung.

51. Weil die kleinen Sachen kleiner (§. 23.) in großen Theilen undeutlicher (§. 26.) und dabey dunkeler (§. 50.) aussehen, als die nahen; so kann man auf einer Fläche verschiedene Dinge mahlen, deren eines weiter weg zu seyn scheinet, als das andere. Und auf diesem Grunde nebst dem Schatten, den die Körper werfen, beruhet die ganze Mahlerkunst, als welche die körperlichen Dinge auf einer Fläche dergestalt vorstellet, wie sie dem Auge in der Natur erscheinen.

Erklärung.

51 a) **Unter der scheinbaren Größe, oder dem optischen Winkel** einer Sache AC (Fig. 5.) versteht man
5. den Winkel CBA, welchen die äussersten Strahlen CB und AB, von den Enden des Gegenstandes nach dem Auge B gezogen, an dem Auge mit einander machen. Unterweilen wird dieser Winkel auch der **scheinbare Durchmesser** des Gegenstandes, auch wohl der **Sehewinkel** genannt.

51 b) Verlängert man diese Lichtstrahlen in das Auge hinein, so daß sie sich in der Mitte B der Crystall-Linse durchkreuzen, so machen sie hinter derselben, eben den Winkel, wie vor ihr, und die Bilder von den Punkten C und A auf der Netzhaut, liegen allemahl in den geraden Linien CB, AB selbst. Wenn daher mehrere Sachen AC, DE an dem Auge einerley Winkel machen, so machen sie auch auf der Netzhaut gleich große Bilder. Denn es ist kein Grund vorhanden, warum ein Lichtstrahl von D, auf einen andern Punkt der Netzhaut fallen sollte, als der von C, sobald CEB eine einzige gerade Linie ausmachen.

Lehrsatz.

52. **Was unter einerley Winkel gesehen wird, siehet gleich groß aus: was unter einem grösseren gesehen wird, siehet grösser aus, und was unter einem kleineren gesehen wird, kleiner.**

Beweis.

5. Wenn zwey oder mehrere Sachen AC und ED unter einem Winkel ABC gesehen werden, so ist das Bild im Auge von einerley Grösse. (§. 51 b). Und eben so ist

es

es klar, daß das Bild der Sache grösser ist, welche unter einem größeren Winkel gesehen wird, hingegen derjenigen kleiner, die man unter einem kleinern siehet. Derowegen müssen in dem ersten Falle die Sachen gleich groß aussehen: in dem andern aber siehet die erste grösser, und die andere kleiner aus (§. 23.). W. Z. E.

Lehrsatz.

53. **Wenn zwey Körper von verschiedener Grösse DE und AC gleich groß aussehen; so verhalten sie sich gegen einander wie ihre Weiten von dem Auge DB und AB.** 5.

Beweis.

Wenn zwey Körper gleich groß aussehen; so sind ihre Bilder im Auge von gleicher Grösse (§. 23.), und also machen die beyden äußersten Strahlen AB und CB in dem Auge B einerley Winkel. Da nun bey D und A rechte Winkel sind, so ist DE mit AC parallel (§. 73. Geom.), und daher DE : AC = DB : AB (§. 149. Geom.) W. Z. E.

Lehrsatz.

54. **Wenn die Bilder zweyer Sachen im Auge zusammenstossen; so scheinen sie uns nahe bey einander zu stehen.**

Beweis.

Wenn zwey Sachen neben einander stehen, so sind auch ihre Bilder im Auge neben einander: welches ihr auch leicht auf dergleichen Weise erfahren könnet, wie oben angewiesen worden (§. 20. 30.) Alsdenn aber sehen wir auch die Sachen neben einander. Wenn nun das Auge auf eben eine solche Art afficiret wird, als von neben einander stehenden Sachen geschiehet; so müssen sie uns auch neben einander zu stehen scheinen. Derowegen wenn die Bilder zweyer Sachen im Auge zusammen-

menstoßen, so scheinen uns dieselben nahe bey einander zu stehen. W. Z. E.

Anmerkung.

55. Die Bilder zweyer Sachen stehen in dem Auge neben einander, wenn von denen andern, die zwischen ihnen liegen, keine Strahlen ins Auge fallen können. Dannenhero kommet es uns vor, als wenn alle Sterne gleich weit von der Erde weg wären: als wenn einer, den wir von weitem sehen, an einem Walde gienge, da er doch einen ziemlichen Weg davon weg ist: als wenn zwey Thürme an einer Kirche wären, da sie doch in verschiedenen Dörfern sind, u. s. w.

Lehrsatz.

56. **Eine brennende Fackel, oder ein ander brennendes Licht, siehet in der Weite gröſſer aus als in der Nähe.**

Beweis.

Wenn ihr einen Sonnenstrahl durch ein kleines Loch in einen verfinsterten Ort fallen lasset; könnet ihr wahrnehmen, daß die Luftstäublein von dem Lichte einen Glanz bekommen. Derowegen ist nicht zu zweifeln, und man kann es auch mit Augen sehen, daß die Luft um das Licht einen starken Glanz bekommt. In der Nähe könnet ihr ihn von der Flamme unterscheiden. Weil aber die Flamme schwächer aussiehet, wenn ihr von dem Lichte weit wegkommt (§. 9.); so haltet ihr den Glanz der Luft mit für einen Theil der Flamme, dannenhero siehet euch die Flamme des Lichtes von weitem gröſſer aus, als in der Nähe.

Zusatz.

57. Da nun die glänzende Luft um und um die Flamme des Lichtes umgiebet; so siehet sie uns auch von Weitem rund aus, unerachtet sie in der Nähe wie eine Pyramide zugespitzet ist.

Lehrsatz.

58. **Wenn die scheinbare Gröſſe des Raumes, dadurch sich ein Körper in einer merklichen**

chen Zeit beweget, unmerklich ist; so kann seine Bewegung nicht gesehen werden, sondern er scheinet stille zu stehen.

Beweis.

Wenn wir die Bewegung eines Körpers sehen sollen; so muß sein Bild im Auge nicht auf Einer Stelle bleiben (§. 24.). Wenn aber die scheinbare Grösse des Raumes; dadurch sich der Körper in einer merklichen Zeit beweget, unmerklich ist, das ist, kaum einige Minuten, oder auch wohl gar Secunden hält, so muß das Bild im Auge auf einer Stelle bleiben (§. 25.). Derowegeu können wir in diesem Falle keine Bewegung verspüren. W. Z. E.

Zusatz.

59. Darum scheinen uns die Sachen, welche sich in der Nähe sehr langsam, als der Zeiger an einer Uhr, oder auch in einer großen Weite sehr geschwinde, als die Sterne am Himmel, bewegen, stille zu stehen.

Zusatz.

60. Wenn die Bewegung der Körper von weitem gleich gemerket werden kann, so muß sie doch viel langsamer scheinen, als sie ist (§. 25.).

Zusatz.

61. Dannenhero wenn zwey Korper sich gleich geschwinde bewegen, der eine aber weiter weg ist, als der andere; so wird der weitere sich langsamer zu bewegen scheinen.

Zusatz.

62. Und also gewinnet es das Ansehen, als wenn der weitere zurückbliebe; hingegen der nähere scheinet sich geschwinder zu bewegen, als würklich geschiehet.

Anmerkung.

6. 63. Es sey das Auge in O, der erste Körper anfangs in V, der andere in T; so sehet ihr beyde in S (§. 55.) Der Körper V beweget sich aus V in u, und der andere T aus T in t; so scheinet sich V aus S in N, und T nur aus S in M beweget zu haben.

Lehrsatz.

6. 64. **Wenn das Auge O mit einem Körper V sich nach einer Gegend beweget, aber geschwinder als er; so kann er ihm zurück zu gehen scheinen.**

Beweis.

Es sey das Auge Anfangs in O, und der Körper in V; so sehet ihr ihn in S. Das Auge beweget sich aus O in P, und der Körper aus V in u, also das Auge geschwinder als er. Wenn ihr nun zurück sehet; so erscheinet euch der Körper in Q, und gewinnet demnach das Ansehen, als wenn er aus S in Q zurücke gegangen wäre. W. Z. E.

Lehrsatz.

65. **Wenn das Auge in Ansehung unsers Leibes, und der Leib in Ansehung eines andern Körpers unbeweglich ist, beyde aber mit diesem schnell fort beweget werden; so scheinen sich die zu beyden Seiten unbewegliche Körper uns entgegen zu bewegen.**

Beweis.

Wenn ihr auf einem Schiffe fahret, so scheinen sich die Ufer und Bäume an den Ufern euch entgegen zu bewegen. Eben so scheinen auch die Bäume euch entgegen zu kommen und vorbey zu gehen, wenn ihr schnell auf einem Postwagen fahret. Man soll die Ursache sagen, woher dieses komme.

Indem ihr auf dem Schiffe oder Wagen schnell fahret; so wird die Lage des Auges gegen die zu den Seiten

ten liegende Körper geändert. Dannenhero kann das Bild davon nicht immer auf einer Stelle im Auge bleiben, und weil die Bewegung des Leibes geschwinder geschiehet, muß auch das Bild von einer Stelle geschwinde auf die andere fortrücken, ja die alten Bilder müssen immer verschwinden, und neue in deren Stellen kommen. Derowegen scheinen sich die im Auge abgebildeten Sachen, das ist, die zu beyden Seiten unbeweglich stehende Körper, uns entgegen zu bewegen und vorbey zu gehen (§. 24.). W. Z. E.

Anmerkung.

66. Es kann auch zuweilen scheinen, als wenn ein unbeweglicher Körper euch entgegen käme. Z. E. ihr gehet auf dem Felde gegen einen Wald zu, und weit davon zu euch her stehet ein Baum. Weil ihr zwischen dem Baume und dem Walde nichts sehet, kommet es euch vor, als wenn er mit zu dem Walde gehörete (§. 55.) Wenn ihr aber näher hinkommet; fallen Strahlen von darzwischen gelegenen Sachen ins Auge, und bilden sie sich in ihm ab, und zwar immer mehrere, je näher er kommt. Derowegen wird das Bild des Baumes in dem Auge immer weiter von dem Walde weggerücket, und also scheinet er euch entgegen zu kommen (§. 24.).

Ende der Optik.

Anfangs-Gründe der Katoptrik.

Erklärung.

1.

Die Katoptrik ist eine Wissenschaft der sichtbaren Dinge, in so weit sie durch Hülfe der Spiegel gesehen werden.

Erklärung.

2. Durch den Spiegel verstehen wir eine jede Fläche, die oben glatt oder poliret ist, hinten aber einen schwarzen oder undurchsichtigen Grund hat.

Erklärung.

3. Die Fläche der Spiegel ist entweder eben, oder erhaben, oder hohl. In dem ersten Falle heisset es ein platter Spiegel; in dem andern ein erhabener Spiegel; in dem dritten ein Hohlspiegel. Die Spiegel von der andern Art sind insgemein entweder sphärische, oder cylindrische, oder conische.

Aufgabe.

4. Eine große gläserne Tafel zu poliren.

Auflösung.

1. Befestiget eine gläserne Tafel mit Gips auf einer hölzernen, die mit einem etwas erhabenen Rande umgeben, und unbeweglich stehet.

2. Auf

2. Auf eine etwas kleinere befestiget gleichfalls mit Gips eine etwas kleinere gläserne. Auf der andern Seite der hölzernen muß ein offener Kasten gemacht werden, damit ihr ihn mit Steinen beschweren könnet.
3. Bestreuet die untere Tafel mit Sande, der durch ein Sieb vorher gesiebet worden, damit die Körper fein gleich sind, und feuchtet ihn mit Wasser an.
4. Dann reibet die kleine gläserne Tafel an der grossen, und wenn sie sich beyde gleich abgerieben, nehmet etwas feinern Sand. Zulezt reibet die Tafeln ohne Sand, oder mit etwas geschlemmeten Schmergel, bis sie ganz eben werden und einigen Glanz bekommen.
5. Wenn sie nun zum Poliren geschickt sind; so schleifet auf der eisernen Scheibe mit Sande die Ränder.
6. Endlich befestiget die hölzerne Tafel daran die gläserne angegypset, an einem Tische, und nehmet ein viereckichtes, viel länger als breites Holz, überziehet es mit Leder, das Leder bestreichet mit Tripel oder Zinnasche, und reibet damit das Glas, bis es recht helle und klar wird.

Aufgabe.

5. Einen platten gläsernen Spiegel zu machen.

Auflösung.

1. Leget auf eine hölzerne Tafel Löschpapier, und überstreuet es mit geschabeter Kreite. Darüber aber leget ein Blatt von Englischem Zinne, und breitet es fein eben aus, damit nirgend eine Runzel bleibe.
2. Giesset auf das Englische Zinn Queckſilber, und breitet es durch dasselbe mit Baumwolle aus, damit es davon durchfressen wird.

3. Leget ein weisses Papier darauf, nachdem ihr es abgekehret, und wenn ihr die gläserne polirte Tafel mit einem reinen leinenen Tuch abgewischet, so leget sie auf das Papier.

4. Drücket mit der linken Hand auf das Glas, und ziehet mit der rechten das Papier darunter weg. Decket es oben mit reinem Papiere zu: darauf leget eine Pappe, und beschweret sie mit einem Gewichte.

5. Lasset das übrige Queckfilber abfliessen, und hernach den Spiegel ein wenig stehen; so wird sich das Zinn mit dem Queckfilber feste anhängen, und geschehen, was man verlangete.

5a) Das bisher gesagte giebt nur einen allgemeinen Begriff, wie die gläsernen Spiegel geschliffen, polirt und belegt werden. Die würkliche Ausübung erfordert viel Handgriffe, die man aus besondern Büchern, über das Glasschleifen, am besten aber in den Spiegelfabriken selbst sehen kann.

Erfahrung.

6. Haltet einen Stab perpendicular an einen Spiegel; so wird sein Bild im Spiegel mit ihm eine gerade Linie machen, er mag platt, oder erhaben, oder hohl seyn.

Zusatz.

7. In dem Spiegel siehet man jeden Punkt in der Linie, die von ihm auf die Spiegelfläche perpendicular gezogen wird.

Zusatz.

8. Man siehet ihn aber auch in dem zurückgezogenen reflectirten Strahle, und also da, wo dieser Strahl die gedachte Perpendicularlinie durchschneidet.

Lehrsatz.

9. **Wenn man eine Sache in einem platten Spiegel siehet; so erscheinet jeder Punkt A so weit hinter dem Spiegel in F, als er vor dem Spiegel wegstehet.** 1.

Beweis.

Ziehet AF auf den Spiegel DE perpendicular. Man soll erweisen (§. 8.) daß AG = FG. Bey G sind rechte Winkel, und weil o = x (§. 12. Optic.) und y = x (§. 40. Geom.); so ist auch y = o (§. 22. Arithm.). Derowegen ist FG = AG (§. 150. Geom.) W. Z. E.

Zusatz.

10. **Dannenhero muß die Sache in ihrer wahren Gestalt und Grösse hinter dem Spiegel erscheinen.**

Zusatz.

11. **Wenn der Spiegel DE horizontal lieget; so muß der Punkt A so tief unter dem Spiegel erscheinen, als er über ihm stehet. Und darum stehet alles in ihm umgekehret. Eben dieses geschiehet, wenn er an der Decke horizontal befestiget ist.** 1.

Zusatz.

12. **Wenn ihr den Rücken gegen einen Spiegel kehret, hingegen einen andern Spiegel dergestalt haltet, daß die von dem ersten Spiegel reflectirte Strahlen, so von eurem Rücken hineingefallen, mit ihm aufgefangen, und wieder in euer Auge reflectiret werden; so könnet ihr in dem andern Spiegel euch von vorne und hinten zugleich sehen.**

12 a) Eigentlich sieht man jeden Punkt A einer Sache hinter einem Spiegel DE, an derjenigen Stelle F, von der alle zurückgeworfenen Strahlen, wie BC, herzukommen scheinen.

So wie nemlich z. E. der von A auf den Spiegel fallende Strahl AB, in der Richtung BC zurückgeworfen wird, und dieser zurückgeworfene Strahl die Lage hat, als wenn er von einem Punkte F hinter dem Spiegel herkäme, welcher so weit hinter dem Spiegel liegt, als A davor liegt, und auf gleiche Weise alle übrigen von A auf den Spiegel fallenden Strahlen, nach ihrer Zurückwerfung solche Lagen bekommen, als wenn sie von einem und demselben Punkte F hinter dem Spiegel vorkämen, so ist klar, daß wenn ein Auge solche zurückgeworfene Strahlen wie BC empfängt, in ihm die Empfindung entstehen muß, als wenn in F selbst ein strahlender Punkt wäre, den man daher das **Bild** des vor dem Spiegel befindlichen Punktes A nennt. So hat ein jeder anderer Punkt des Gegenstandes hinter dem Spiegel, sein Bild, und folglich der ganze Gegenstand selbst, welches denn bey einem ebenen Spiegel, dem Gegenstande selbst gleich und ähnlich ist.

12b) Hieraus ergiebt sich nun auch die Ursache, warum die Fläche DE kein bestimmtes Bild von einem Punkte A eines Gegenstandes formiren kann, wenn sie nicht Spiegelglatt, sondern rauh wäre. Eine **rauhe Fläche** kann nemlich betrachtet werden, als wenn sie aus einer unzähligen Menge sehr kleiner ebener Theilchen, in sehr unterschiedenen Lagen gegen einander zusammengesetzt wäre. Hier könnte nun z. E. ein solches Theilchen bey B einen zurückgeworfenen Strahl BC von dem Punkte A des vor dem Spiegel befindlichen Gegenstands in das Auge bringen, aber zu gleicher Zeit könnte ein anderes Theilchen um B herum nach Beschaffenheit seiner Lage, einen Lichtstrahl von einem ganz andern Punkte des Gegenstandes, **in derselben Richtung** BC nach dem Auge reflectiren, und so könnten von mehreren Theilchen, Lichtstrahlen von so **unterschiedenen Punkten** des Gegenstandes **in derselben Richtung** BC nach dem Auge reflectiret werden, daß das Auge in dieser Richtung keinen Punkt einzeln deutlich empfinden, und jeden von den andern bestimmt unterscheiden könnte, es wird also in der Richtung BC zwar Lichtstrahlen empfangen, aber nicht angeben können, von welchen Punkten des Gegenstandes sie nach der Zurückwerfung eigentlich herkommen, d. h. die rauhe Fläche DE wird zwar Licht reflectiren, was auf sie fällt, aber nicht so ordentlich, daß das Auge den Gegenstand in ihr erkennen könnte, von dem sie durch die Zurückwerfung Licht in das Auge brachte. So erhellt auf gleiche Weise, warum

auf

auf der Oberfläche des Wassers sich keine Gegenstände abspiegeln können, sobald diese Oberfläche durch kleine Wellen uneben wird.

Aufgabe.

13. **Einen gläsernen sphärischen Spiegel zu machen.**

Auflösung.

1. Schmelzet einen Theil Zinn, und einen Theil Markasit in einem kleinen Tiegel, und wenn es in Fluß gebracht worden, so werfet zwey Theil Queckfilber hinein.

2. Sobald es zu rauchen anfänget, giesset die geschmolzene Materie in reines Brunnenwasser, und so bald sie abgekühlet, giesset das Wasser wieder ab.

3. Drücket die abgekühlte Materie durch ein reines doppeltes leinenes Tuch, und was durchgehet,

4. schüttet in eine hohle gläserne Kugel, die inwendig ganz rein ist.

5. Wendet die Kugel fein sanfte herum; so wird sich die Materie allenthalben anlegen. Das übrige giesset wieder heraus.

Anmerkung.

14. Wenn ihr grüne, rothe, gelbe oder von anderer Art Farbe Kugeln nehmet; so bekommet ihr auch Spiegel, darinnen alles grün, roth, gelb, oder von einer andern Farbe aussiehet.

Lehrsatz.

15. **In einem sphärischen Spiegel EBG wird jeder Punkt einer Sache A zwischen dem Mittelpunkte C und der Fläche der Kugel gesehen.** 2.

Beweis.

Wenn ihr von dem Punkte A eine Perpendicularlinie AH auf den sphärischen Spiegel ziehet; so gehet sie durch den Mittelpunkt der Kugel C. Ziehet eine gerade Linie IK, welche den Circul EBG im Einfallspunkte B berühret. Mit dieser macht der Radius CB einen rechten Winkel (§. 40. Mechan.): hingegen wenn der Einfallswinkel ABI ein spitziger Winkel ist, so machet auch der reflectirte Strahl DB mit BK einen spitzigen Winkel (§. 12. Optik.). Da nun der Vertikalwinkel FBI ihm gleich ist (§. 40. Geom.); so fället der reflectirte Strahl BD, wenn er über den Punkt B continuiret wird, zwischen die Seiten des rechtwinklichten Triangels CBI, und muß endlich an seine grösste Seite CI in F stossen. Und dannenhero sieht man den Punkt A innerhalb dem Mittelpunkte C und der Kugelfläche EHBG (§. 8.) W. Z. E.

Zusatz.

16. Derowegen kann die Linie AH, sie mag so groß seyn, wie sie will, nicht grösser als die Linie FH aussehen (§. 8.); und also ist das Bild im Spiegel viel kleiner als die Sache; auch viel kleiner als der halbe Diameter CH.

Zusatz.

17. Wenn man mit dem Radio BO aus dem Mittelpunkte O einen Circul beschreibet, der die Linie AC in L durchschneidet; so ist klar, daß das Bild FL von der Linie LA in einem kleinen Spiegel kleiner ist, als in einem grossen.

Zusatz.

3. 18. Wenn ein cylindrischer Spiegel AB aufgerichtet stehet; so siehet in demselben alles sehr lang, aber überaus schmal aus. Wenn er aber horizontal gehalten wird; so muß die

die Sache in ihm breit, aber sehr kurz aussehen.

Beweis.

Nach der Länge AD herunter kann man auf der cylindrischen Spiegelfläche lauter gerade Linien ziehen (§. 179. Geom.), und also stellet er nach der Länge einen platten Spiegel vor. Nach der Breite aber sind lauter Circulperipherien (§. 181. Geom.), und dannenhero stellet er nach der Breite einen sphärischen Spiegel vor (§. 177. Geom.) Da nun die platten Spiegel die Sachen in ihrer rechten Größe darstellen (§. 10.), die sphärischen aber sie verkleinern (§. 6.); so sehen die Sachen in einem cylindrischen Spiegel lang, aber überaus schmal aus. **Welches das erste war.**

Auf gleiche Art wird erwiesen, daß sie in dem andern Fall kurz und breit aussehen müssen. **Welches das andere war.**

Lehrsatz.

19. **In einem conischen Spiegel GFH, wenn er aufgerichtet ist, sehen alle Sachen lang, aber dabey schmal, oben sehr zugespitzet, und unten viel breiter aus: wenn aber seine Axe mit dem Horizonte parallel, oder gegen denselben schief gehalten wird, sehr kurz, und auf einer Seite viel kleiner, als auf der andern.** 4.

Beweis.

Nach der Länge lassen sich auf einer conischen Fläche lauter gerade Linien ziehen, nach der Breite aber sind lauter Circulperipherien, die von der Grundfläche GH an gegen die Spitze F immer abnehmen (§. 186. Geom.) Derowegen hat ein conischer Spiegel nach der Länge die Eigenschaft eines platten, nach der Breite aber verschiedener sphärischer Spiegel. Da nun die platten Spiegel die Grössen unverändert lassen (§. 10.), die sphärischen

schen aber sie um so viel mehr verkleinern, je geringer ihr Diameter ist (§. 17.); so müssen in einem aufgerichteten conischen Spiegel GFH die Sachen lang und schmal, und zwar oben viel schmäler als unten aussehen.

Aufgabe.

20. Einen gläsernen Hohlspiegel zu machen.

Auflösung.

Nehmet ein Glas, so auf einer Seite eben, auf der andern erhaben geschliffen ist, und überleget es auf der erhabenen Seite; so habet ihr einen Hohlspiegel.

Anmerkung.

21. Sie werden auch aus 8 Theilen Kupfer, einem Theile Englischen Zinn und 5 Theilen Markasit gegossen, und auf der hellen Seite polliret. Diese Spiegel pfleget man **stählerne Spiegel** zu nennen.

21 a) Ueber die Verfertigung der metallnen Spiegel sehe man **Smiths** Optik. 3 Buch 2 Kap. Die beste Anweisung dazu giebt **John Mudge**, ein Engelländer, in den Phil. Transact. Vol. LXVII. P. I. pag. 196. Eine Uebersetzung davon findet sich in den Leipz. Samml. zur Phys. und Naturgesch. I. B. 5. St. (S. 584.) **Edwards** Verfahren s. m. im nautical Almanac 1787. und auszugsweise in **Tralles** phys. Kalender 1786.

Lehrsatz.

22. Wenn ein Strahl BD mit der Axe des Spiegels AX parallel einfället, und unter 60 Graden von der Axe weg ist; so wird er nach der Reflexion in B mit der Axe in F vereiniget, in einer geringeren Weite von dem Spiegel, als der vierte Theil des Diameters oder der halbe Radius ist.

Beweis.

Weil der halbe Diameter BC auf dem Spiegel perpendicular stehet (§. 40. Mech.); so ist $x = y$. Denn y machet mit dem Reflexionswinkel, und x mit dem Einfalls-

fallswinkel 90 Gr. (§. 12. Optik und §. 25. Arithm.) Da nun BD und AX parallel sind; so ist o = x (§. 72. Geom.), folgends auch o = y (§. 22. Arithm.) Derowegen ist FC = FB (§. 81. Geom.) Nun ist CX = BC (§. 27. Geom), BF + FC aber grösser als BC (§. 26. Geom.), folgends auch grösser als CX, und demnach FC grösser als FX. Also ist FX kleiner als der halbe Radius oder der vierte Theil des Diameters. W. Z. E.

Zusatz.

23. Weil m = n, wie aus dem Beweise des gegenwärtigen Lehrsatzes erhellet, so ist n = 60 Gr., wenn der Bogen EX 60 Gr. ist (§. 16. Geom.). Derowegen ist der zurückgeworfene Strahl EX dem Radio CX gleich (§. 82. Geom.), und fället der zurückgeworfene Strahl wieder auf den Spiegel in X.

Zusatz.

24. Da die Sonnenstrahlen dem Augenschein nach parallel sind; so werden auch alle, die hin und wieder auf die Spiegelfläche fallen, in einem engen Raum in F zusammengebracht. Weil nun hierdurch ihre Kraft vermehret wird, so ist es kein Wunder, daß, ob sie gleich vorhin nur warm machten, sie jetzund gar anzünden, ja wenn der Spiegel groß ist, harte Körper, als Steine und Metalle, schmelzen.

Anmerkung.

25. Daher pfleget man die Hohlspiegel **Brennspiegel** zu nennen, unter welchen aus dem Alterthume des Archimedis seine berühmt, damit er die Flotte der Römer angezündet haben soll. In unsern Zeiten hat niemand grössere Brennspiegel gemachet, als der **Herrn von Tschirnhausen**, dadurch er fast in einem Augenblicke Bley geschmolzen, Eisen glühend gemacht, ja innerhalb 5 Minuten Kupfer und Silber in Fluß gebracht, die Dachziegel, Scherben und Töpfen, Knochen und andere harte Materien in Glas verwandelt. Man machet aber die Brennspiegel nicht gern über 15 Grade (§. 22.)

25a) Umständlichere Betrachtungen und Berechnungen über den Brennraum F, und wie viel mahl daselbst etwa die Sonnenstrahlen verdichtet werden, findet man in Kästners angewandter Mathem. (Katoptr. 32.) Auch daselbst (46) was von Archimeds angeblichen Brennspiegeln zu halten sey.

Zusatz.

26. Weil die Fläche eines Brennspiegels, dessen Höhle von einer größern Kugel ist, mehr Sonnenstrahlen auffangen und in den Brennpunkt zurück werfen kann, als ein kleinerer; so brennet ein großer Brennspiegel besser, als ein kleiner.

Zusatz.

27. Weil der vierte Theil von einem grossen Diameter grösser ist, als eben derselbe Theil von einem kleinen; so muß ein großer Brennspiegel weiter brennen, als ein kleiner (§. 22.).

Zusatz.

28. Daß die Sonnenstrahlen brennen, rühret blos daher, weil sie durch die Reflexion in einem engen Raum zusammengebracht werden (§. 22.) Darum ist es kein Wunder, daß man Brennspiegel aus festem Holze oder Pappe machen kann, so vergoldet und poliret, oder auch mit Stroh beleget werden.

Zusatz.

5. 29. Wenn ein Licht in den Brennpunkt F gesetzet wird; so sind die reflectirten Strahlen alle der Axe, und auch unter einander selbst parallel. Denn der einfallende Strahl ist alsdenn FB, und daher der reflectirte BD (§. 12. Optik.)

Zusatz.

30. Wenn ihr demnach die parallel reflectirte Strahlen mit einem andern Brennspiegel auffanget; so könnet ihr gleichfalls mit demselben brennen.

Zusatz.

Zusatz.

31. Wenn die Strahlen parallel sind; so bleibet das Licht immer gleich stark. Darum könnet ihr einen weit entlegenen Ort (z. E. die Stundenscheibe mit dem Zeiger an einem Thurme aus eurem Fenster) helle erleuchten, wenn ihr ein Licht, oder eine Lampe in den Brennpunkt eines Hohlspiegels setzet.

Anmerkung.

32. Doch lässet sich nicht auf diese Weise das Licht durch viele Meilen ohne den geringsten Abbruch werfen: denn es wird durch den Widerstand der Luft immer nach und nach geschwächet.

Lehrsatz.

33. **Wenn eine Sache in dem Brennpunkte eines Hohlspiegels lieget; so kann sie in ihm gar nicht gesehen werden.**

Beweis.

Wir sehen jeden Punkt einer Sache, wo der reflectirte Strahl mit der Perpendicularlinie, die von ihr auf den Spiegel gezogen wird, zusammenstösset (§. 8.), das ist, im gegenwärtigen Falle mit der Axe des Spiegels, weil in ihr der Brennpunkt ist, darinnen die Sache lieget (§. 23.). Nun, wenn die Sache im Brennpunkt stehet; so sind die reflectirten Strahlen mit der Axe parallel (§. 22.), und stossen mit ihr nirgends zusammen (§. 22. Geom.) Derowegen kann sie im Spiegel gar nicht gesehen werden. W. Z. E.

Lehrsatz.

34. **Wenn eine Sache ab zwischen dem Brennpunkte P und dem Hohlspiegel stehet; so siehet man das Bild AB hinter dem Spiegel** 6.

ver-

vergrössert und aufgerichtet, und zwar um desto grösser, je näher die Sache dem Brennpunkte ist.

Beweis.

VO sey die Axe des Hohlspiegels, AM und NB mit ihr parallel, und in P der Brennpunkt; so sind aK und bL die beyden äussersten einfallenden Strahlen, und KM und LN die reflectirten. Da nun der von a auf den Spiegel gezogene Perpendicul durch den Mittelpunkt des Spiegels I gehet; so wird der Punkt a in A und b in B (§ 8), folgends das Bild AB hinter dem Spiegel aufgerichtet und grösser als ab gesehen. Da nun auf gleiche Weise erhellet, daß CD das Bild von cd, hingegen cd grösser als ab und CD = AB ist, so ist ferner klar, daß das Bild von cd näher hinter dem Spiegel erscheinet, und, wenn es dem Spiegel näher ist, weniger vergrössert wird. W. Z. E.

Lehrsatz.

6. 35. **Wenn eine Sache ef weiter als der Brennpunkt P von dem Spiegel weg ist; so erscheinet sie in freyer Luft, aber verkehret, und näher bey dem Spiegel, auch kleiner, je weiter sie von dem Brennpunkte stehet.**

Beweis.

Es erhellet, wie in dem vorhergehenden Beweise, daß FE das Bild das ef, und HG das Bild von gh sey, folgends das Bild von ef und gh verkehret in der Luft gesehen werde, und zwar näher bey dem Spiegel, auch kleiner, je weiter die Sache von dem Brennpunkte weg ist. W. Z. E.

35 a) Von allen diesen Dingen genauere und umständlichere Untersuchungen in **Smiths** Lehrb. d. Opt. 2 B. 8 K. und

K. und §. 473. der Anmerkungen daſ. Auch Hrn. H. Käſtners Problematis Alhazeni analyſis trigonometrica in den Comm. Soc. R. Goett. 1776. und eben deſſ. Abh. de objecti in ſpeculo ſphaer. viſi magnitudine apperente in den Gött. Comm ad ann. 1777. Die Theorie von den Bildern der Gegenſtände in Spiegeln überhaupt iſt aber, wenn ſie gründlich behandelt werden ſoll, zu ſchwer und weitläuftig, als daß in Anfangsgründen, wie die gegenwärtigen, mehr davon geſagt weroen dürfte, als von Wolf geſchehen iſt. Die Erſcheinungen der ſphäriſchen Spiegel leitet Wolf alle aus der Erfahrung (§. 6.) her, gegen welches ſich aber noch einiges erinnern läßt, wenn man alles genau nehmen will, zugeſchweigen, daß auch jene Erfahrung ſelbſt, erſt aus den Geſetzen der Zurückwerfung erklärt werden muß.

Ende der Katoptrik.

Anfangs-Gründe der Dioptrik.

Erklärung.

1.

Die Dioptrik ist eine Wissenschaft aller sichtbaren Dinge, in so weit sie durch gebrochene Strahlen gesehen werden.

Aufgabe.

2. Die Grösse der Refraction zu untersuchen, welche die Strahlen leiden, wenn sie aus der Luft in das Glas, und aus dem Glase in die Luft fahren.

Auflösung.

1. 1. Lasset euch nach Keplers Exempel (Diopt. l. 1. prop. 3.) einen gläsernen Würfel BCDEGFHI machen, und ihn auf allen Seiten recht eben schleifen und poliren.

2. Setzet zwey wohlgehobelte Breter ABIN und NIPO rechtwinklicht zusammen. Die Höhe AN muß der Höhe des Würfels CH gleich, die Breite NI aber etwas breiter, als der Würfel seyn.

3. Setzet den Würfel an das aufgerichtete Bret BANI an, und kehret es gegen die Sonne, so wird ausser dem Glase der Schatten bis in ML, in dem Glase aber nur bis KQ fallen.

2. 4. Da nun CL der einfallende, und CK der gebrochene Strahl ist: so ist HCL der Inclinations-

win-

winkel, HCK der gebrochene Winkel, und KCL der Refractionswinkel (§. 16. Opt.) Derowegen weil in dem Triangel CHK und CHL, die Seiten CH, HK und HL gegeben werden, indem ihr sie nach einem subtilen Maaßstabe messen könnet; so werdet ihr die Winkel HCK und HCL (§. 26. Trigon.) finden. Und wenn ihr HCK von HCL abziehet; so bleibet euch der Winkel KCL übrig. W. Z. E. W.

Zusatz.

3. Wenn der Strahl CL aus der Luft in das Glas kommt, so wird er in CK gegen das Perpendicul CH gebrochen, und zwar dergestalt, daß der Sinus des Inclinationswinkels HCL zu dem gebrochenen HCK sich wie 3 zu 2 verhält, und, so lange jener unter 30 Graden ist, der Strahl beynahe um den dritten Theil desselben gegen den Perpendicul gebrochen wird.

3a) Bey andern durchsichtigen Materien ist das Brechungsverhältniß anders, z. E. bey Wasser = 4:3.

Zusatz.

4. Hingegen wenn der Strahl CK aus dem Glase in die Luft fähret, so wird er in CL, und demnach von dem Perpendicul CH weggebrochen, und zwar dergestalt, daß der Sinus des Inclinationswinkels zu dem gebrochenen sich wie 2 zu 3 verhält, und, so lange jener unter 30 Graden ist, der Strahl beynahe um die Hälfte desselben von dem Perpendicul weggebrochen wird. In beyden Fällen gehet der Perpendicularstrahl ungebrochen durch.

4a) Oder vielmehr, wenn ein Lichtstrahl nach der Richtung KC sich in dem Glase bewegte, und bey C aus dem Glase in die Luft gebrochen würde, so würde der gebrochene Strahl in der verlängerten Richtung LC fortgehen.

Erklärung.

5. **Ein** erhabenes Glas (lens convexa) **ist ein solches** (Fig. 6.) **welches auf beyden Seiten nach der Krümmung einer Kugelfläche dergestalt geschliffen ist, daß es in der Mitte dicker, als nach dem Rande A oder B zu ausfällt. Ist die eine Seite von dem Glase eben geschliffen wie** (Fig. 3.) **so pflegt man es auch wohl Plan-convex zu nennen.** (M.)

Anmerkung.

6. Daher nennt man es ein Glas von 3 Schuhen, oder sagt, es halte im Diameter drey Schuhe, wenn die Kugelfläche AKB (Fig. 3.) im Diameter 3 Schuhe hält u. s. w.

Erklärung.

4. 5. 7. **Ein** hohles Glas (Lens concava) **wird genennet, welches entweder auf beyden Seiten, oder nur auf einer ein Stücke von der inneren Fläche einer hohlen Kugel hat, und auf der andern platt ist.**

7a) Alle Gläser von kugelförmigen Oberflächen heisen Hohlgläser, wenn sie in der Mitte dünner als rings an dem Rande herum sind.

Anmerkung.

8. Man nennet die hohlen auch Gläser von drey Schuhen im Diameter, wenn die Kugel, auf deren äussere Fläche ihre Höhlung sich schicket, im Diameter drey Schuhe hält.

Aufgabe.

9. **Durch Zeichnung zu finden, wie ein einfallender Strahl in einem gegebenen Glase gebrochen wird.**

Auflösung.

1. Beschreibet mit den gegebenen Radiis die Bogen der Höhlungen, oder der erhabenen Flächen; oder ziehet

ziehet gerade Linien, wenn die Gläser platt sind, damit ihr den Durchschnitt des Glases bekommt.

2. Ziehet den Strahl auf das Glas nach der Art, wie er einfallen soll.

3. Auf den Einfallspunkt ziehet eine gerade Linie, die auf dem Glase perpendicular stehet, damit ihr den Inclinationswinkel bekommt.

4. Diesen theilet in drey gleiche Theile; so könnet ihr den Strahl ziehen, wie er im Eingange gebrochen wird (§. 3.)

5. Gleichergestalt suchet den Inclinationswinkel im Ausgange, und

6. theilet ihn in zwey gleiche Theile, so könnet ihr den Strahl ziehen, wie er im Ausgange gebrochen wird.

Z. E. das Glas sey auf einer Seite erhaben, auf der andern platt, und die erhabene Seite sey von der Sache abgekehret, auf die platte fallen die Strahlen mit der Axe parallel ein; so ziehet eine gerade Linie AB, und darauf die Axe IF perpendicular. Aus C beschreibet mit dem Radio des Glases den Bogen AKB; so habet ihr den Durchschnitt des Glases. Weil der Strahl DE 3. auf der Linie AB perpendicular stehet; so gehet er bis in E ungebrochen durch (§. 4.) Ziehet aus dem Mittelpunkte C die Linie CG durch E; so ist GEH der Inclinationswinkel (§. 16. Optik.). Diesen theilet in zwey gleiche Theile, und machet den Winkel HEF = ½GEH; so ist EF der gebrochene Strahl (§. 4.).

9a) Eigentlich sollte der Sinus des Winkels GEH zum Sinus des Winkels GEF sich wie 2:3 verhalten, und nicht die Winkel Selbst = 2:3. So lange indessen der Neigungswinkel nicht über 15 bis 20 Grad beträgt (und das ist der gewöhnliche Fall bey Gläsern) so kann man, so genau als hier nöthig ist, die Lage des gebrochenen Strahles nach der von Wolf angegebenen Zeichnungsart bestimmen.

Axe des Glases heist jede Linie, welche durch die Mitte K des Glases gezogen wird. Geht sie zugleich durch die Kugelfläche AKB Mittelpunkt, so heist sie die **Hauptaxe.**

Anmerkung.

10. Wenn ihr in dem Zeichnen genau verfahret: so werdet ihr finden, (1) daß wenn das Glas von beyden Seiten platt ist, der gebrochene Strahl hinter dem Glase, mit dem einfallenden parallel sey; (2) wenn ein Strahl auf ein erhabenes Glas, so auf der einen Seite platt ist, mit der Axe parallel einfället, er nach geschehener Brechung mit der Axe in der Weite des Diametri von der erhabenen Fläche zusammenstößet; hingegen (3) in der Weite des halben Diametri, wenn es von den beyden Seiten gleich viel erhaben ist; und (4) in der Weite des vierten Theiles, wenn es eine ganze Kugel ist.

10a) Man kann überhaupt beweisen, daß wenn auf die Fläche AB eines Converglases mit der Axe CF Strahlen parallel einfallen, sie nach geschehener Brechung hinter dem Glase sich in einem Punkte F (dem **Brennpunkte**) vereinigen, dessen Abstand von dem Glase sich durch die Formel

$$\frac{2\,a\,.\,b}{a+b}$$

berechnen lässet. a bedeutet den Halbmesser derjenigen Kugelfläche des Glases, welche die Lichtstrahlen empfängt, und b den Halbmesser der gegenüberstehenden. Ist die Seite AB des Glases **eben**, so betrachtet man sie, als wäre ihr Halbmesser a **unendlich** groß, in welchem Falle dann statt a + b ohne merklichen Fehler gesetzt werden kann a. Dann wird jener Abstand des Punktes

$$F = \frac{2\,a\,b}{a} = 2\,b$$

wie (§. 10. no. 2.)

10b) Strahlen, welche von einem Punkte eines weit entlegenen Gegenstandes herkommen, kann man als **Parallelstrahlen** ansehen. Wäre demnach C ein solcher Punkt, von dem die Strahlen herkämen, so gedenke man sich durch ihn eine Axe des Glases (§. 9a) (Fig. 6.) Alle diese Strahlen werden dann wieder nach geschehener Brechung sich bey F in dieser Axe vereinigen. Daher heist F das Bild von C. So liegt auf eine ähnliche Art auch das Bild f von je-

dem

dem andern Punkte D des Gegenstandes, in einer durch D gezogenen Axe des Glases, so weit hinter dem Glase als F, und so werden denn die Bilder aller Punkte zwischen C und D, hinter dem Glase zwischen F und f fallen, dergestalt, daß wenn nun der Gegenstand CD z. E. die Sonne wäre, alle Strahlen derselben, die auf das Glas AB fallen können, hinter demselben wiederum in einem kleinen kreisrunden Raume Ff, dem **Bilde der Sonne**, sich vereinigen würden.

Anmerkung.

11. Da nun solchergestalt die erhabenen Gläser die Sonnenstrahlen in einem engen Raume zusammenbringen, und daher ihre Wärme vermehren; so ist kein Wunder, daß sie anzünden, auch wenn sie groß, wie des **Herrn von Tschirnhausen** seine, alles schmelzen und entweder in Glas oder in Kalk verwandeln. Und um dieser Ursache willen werden die erhabenen Gläser **Brenngläser** genennet.

Lehrsatz.

12. **Wenn CD (Fig. 6.) einen Gegenstand in einer beliebigen Weite CH vor dem erhabenen Glase AB vorstellet, so wird sich derselbe** 6.
1) **verkehrt hinter dem Glase abbilden,** 2) **wird das Bild desto weiter hinter das Glas fallen, je näher der Gegenstand CD zu dem Glase rückt,** 3) **wird das Bild unendlich weit hinter das Glas fallen, wenn der Gegenstand in den Brennpunkt des Glases kömmt, und** 4) **wird gar kein Bild hinter dem Glase entstehen können, wenn der Gegenstand dem Glase näher ist, als der Brennpunkt.**

Beweis.

1. Wenn Ff das Bild eines sehr weit entlegenen Gegenstandes CD ist, so liegt jeder Punkt desselben z. E. f allemahl in einer geraden Linie mit der Mitte des Glases H und dem zugehörigen Punkte D des Objekts, und wenn daher F das Bild von C ist, so liegt hier f linker

Hand F, da hingegen D rechter Hand C liegt, also ist das Bild F f verkehrt in Ansehung des zugehörigen Gegenstandes CD.

3. 2. Man gedenke sich (Fig. 3.) einen Lichtstrahl von einem Punkte I der nicht unendlich weit von dem Glase wegläge, nach dem Glase gezogen, und bestimme durch Zeichnung, wie er bey seinem Eingange in das Glas nach dem Perpendikel zu, und bey seinem Ausgange von dem Perpendikel weg würde gebrochen werden, so wird sich zeigen, daß dieser Strahl nach einem entferntern Punkt der Axe I F wird zugebrochen werden, als derjenige F ist, nach welchem ein mit der Axe paralleler, oder von einem weiter als I entlegenem Punkte herkommender Strahl I D E zugebrochen wird, welches alles noch schärfer bewiesen werden kann, wenn man den Ort, wo ein Strahl wie I E nach geschehener Brechung in die Axe einschneiden würde, durch trigonometrische Rechnung bestimmen will, welche Berechnung aber für Anfangsgründe zu weitläuftig ist.

6. 3. Wenn F f (Fig. 6.) das Bild eines unendlich weit, oder doch sehr weit entlegenen Gegenstandes C D ist, so wird umgekehrt, wenn F f ein Gegenstand wäre, C D das Bild desselben seyn, und also unendlich weit, oder sehr weit hinaus fallen. Ist aber C D unendlich weit weg, so ist F f der Brennpunkt, und ist also in diesem ein Gegenstand, so fällt das Bild desselben C D unendlich weit hinaus.

4. Wenn endlich ein Gegenstand F f noch näher als um die Brennweite H F zum Glase gerückt wird, so werden die von jedem Punkte des Gegenstandes auf das Glas fallenden Strahlen, nach geschehener Brechung hinter dem Glase aus einander fahrend, weil sie schon parallel sind, wenn der Gegenstand im Brennpunkte F selbst ist, und es kann sich also in diesem Falle kein ein-

ziger Punkt des Gegenstandes hinter dem Glase abbilden. (M.)

Zusatz.

13. Weil in dem Dreyecke FHf, Ff desto größer werden muß, je größer HF ist, je weiter also das Bild des Gegenstandes CD hinausfällt, so erhellet also, daß das Bild eines Gegenstandes auch immer größer wird, je weiter der Gegenstand zum Glase rückt, und wäre der Gegenstand im Brennpunkte selbst, so wird sein Bild unendlich weit hinausfallen, und unendlich groß seyn. (M.)

13 a) Man kann diese Sätze sich durch Versuche versinnlichen, wenn man in einem finstern Zimmer bey CD eine Kerze ansteckt, und das Bild ihrer Flamme bey Ff auf einem Blatt Papiere auffängt; je näher man die Kerze dem Glase (oder eigentlich seinem Brennpunkte) nähert, desto weiter muß man dagegen das Blatt Papier entfernen, um ein deutliches Bild der Flamme darauf zu erhalten.

13 b) Wenn bisher gesagt worden ist, daß die von einem gewissen Punkte eines Objekts herkommenden Strahlen nach geschehener Brechung hinter dem Glase wiederum vereinigt werden, so muß man diesen Vereinigungspunkt doch nicht für einen vollkommen mathematischen Punkt nehmen. Denn man kann zeigen, daß eigentlich jeder der erwähnten Strahlen nach einem etwas andern Punkte der Axe zugebrochen wird, und insbesondere diese Abweichung beträchtlicher ist, für Strahlen, die weit von der Axe einfallen, als für solche, welche derselben näher sind, und um die Mitte des Glases herum einfallen. Wenn also nicht alle Strahlen in völliger Schärfe sich hinter dem Glase wiederum vereinigen, sondern eigentlich nur innerhalb eines sehr kleinen Raumes wieder zusammen kommen, so können sie daselbst auch kein vollkommen deutliches und scharf begränztes Bild von dem zugehörigen Punkte des Gegenstandes geben, und das ganze Bild von dem Gegenstande wird daher eine gewisse Undeutlichkeit haben, die indessen mit dem bloßen Auge wohl nicht gut bemerkt werden kann. Man heist sie die **Undeutlichkeit wegen der Gestalt des Glases.** Denn Gläser, welche blos kugelförmige Oberflächen haben, sind derselben allemahl unterworfen.

13 c) Mit dieser Undeutlichkeit verbindet sich noch eine andere, welche man **die Undeutlichkeit wegen der Farbenzerstreuung** nennt, und noch erheblicher als jene ist. Da nemlich die Lichtstrahlen durch die Brechung auch in farbichte Theile gespalten werden (§. 46. Optik) und dies zumahl denjenigen Strahlen am meisten begegnen muß, welche weit von der Axe nach dem Rande des Glases zu einfallen, wo der Neigungswinkel (§. 3.) grösser, als um die Mitte des Glases herum ist, so muß daher nothwendig eine gewisse Undeutlichkeit in dem Bilde eines Gegenstandes erfolgen, welche zumahl bey grossen Gläsern oft schon mit dem bloßen Auge wahrgenommen werden kann. Man wird nemlich, wenn man ein solches Bild mit einem Blatt Papiere auffängt, bemerken, daß es nicht recht scharf und begränzt ist, und mit unterschiedenen Regenbogenfarben spielet, und daß dies Bild um ein merkliches deutlicher (wiewohl etwas dunkeler wird) wenn man dem Glase nahe an dem Rande herum, eine **Bedeckung** giebt, so daß nur die Strahlen durch eine mäßig große Oeffnung in der Mitte herum einfallen, und die entferntern abgehalten werden. Betrachtet man ein solches Bild durch ein Vergrösserungsglas, so wird man die Regenbogenfarben noch mehr bemerken.

13 d) Man hat sich sehr viele Mühe gegeben, dieser Undeutlichkeit, welche insbesondere bey der Anwendung der Gläser zu Fernröhren von dem größten Nachtheile ist, abzuhelfen, bis endlich Hr. Euler im Jahre 1747. auf den Gedanken gerieth, ob sich solche etwa heben ließe, wenn man ein Conver-Glas nicht blos aus **einerley Glasart**, sondern aus **verschiedenen** zusammensetzte, die die Eigenschaft hätten, jene Farbenzerstreuung, die nothwendig bey der Brechung in einerley Glasart entstehen muß, wiederum zu vernichten. Er wurde durch die Betrachtung des menschlichen Auges auf jenen Gedanken geleitet. Denn da wir die Gegenstände nicht mit farbichten Rändern sehen, wie doch der Fall seyn müßte, wenn sich durch die Brechung des Lichtes in den verschiedenen Feuchtigkeiten des Auges, ein undeutliches Bild derselben wie (§. 13 c) auf dem Boden des Auges formirte, so muß der Grund wohl darinn liegen, daß die Farbenzerstreuung, welche durch die Brechung in einer der durchsichtigen Materien des Auges hervorgebracht wird, durch die zweyte Brechung in den übrigen wieder aufgehoben wird. Sehr tiefsinnige und feine Berechnungen hierüber lehrten, daß sich würklich die oben angeführte Undeutlichkeit heben

ließe,

ließe, wenn man ein Convexglas aus Glasarten, von solchen Brechungskräften zusammensetzen könnte, daß jene Farbenzerstreuung aufgehoben, und also darinn der Einrichtung des menschlichen Auges nachgeahmt würde. Nur war es schwer, solche Glasarten, als die Theorie sie bestimmte, zu erhalten, bis endlich der berühmte englische Künstler **Dollond** fand, daß das englische **Flint**- und **Crownglas** (statt des letztern auch französisches und böhmisches Glas genommen werden kann) jener Absicht am besten entsprächen. Daher denn Gläser, welche aus zwey unterschiedenen Glasarten dergestalt zusammen gesetzt werden, daß sie keine Undeutlichkeit wegen der Farbenzerstreuung hervorbringen, **farbenlose** oder **achromatische** Gläser heisen. Man gedenke sich z. E. aus Flintglas ein Planconcaves Glas, wie (Fig. 7.) geschliffen, und nun eine Convexlinse aus Crownglas, welche auf beyden Seiten erhaben ist, aber so, daß die eine Seite genau in die Höhlung des Concavglases hineinpaßt, so hat man einen Begriff von der Art der Zusammensezung eines achromatischen Glases. Man verfertigt jetzt auch Gläser, welche aus drey Glasarten zusammengesetzt sind, wodurch die Farbenzerstreuung noch mehr vermindert wird, welche aber wegen der sehr großen Genauigkeit in der Wahl des Glases und der Bearbeitung sehr hoch zu stehen kommen. Durch diese wichtige Entdeckung Eulers haben die Fernröhre einen sehr hohen Grad der Vollkommenheit erhalten. Die Geschichte dieser Erfindung kann man in **Gehlers** phys. Wörterb. unter dem Art. **Achromatisches Fernrohr** nachsehen. Die Theorie davon in **Eulers** Dioptrica Petr. et Lipt. 1771. **Klügels** analytischer Dioptr. Nic. **Fuß** umständliche Anw. aller Arten von Fernröhren in der möglichsten Vollkommenheit zu verfertigen, aus dem Franzöſ. vom Hrn. Prof. Klügel. (M.)

Lehrsatz.

14. Wenn ein Strahl des Lichts in ein Glas, welches entweder auf einer, oder auf beyden Seiten hohl ist, einfället; so werden die Strahlen von der Axe weggebrochen, und weichen nach der Refraction immer mehr von ihr ab, je weiter sie fortgehen.

Beweis.

Beweis.

4. Es falle der Strahl FG mit der Axe parallel ein. Weil er auf DE perpendicular fället, so gehet er bis in H ungebrochen durch das Glas, in H aber wird er von dem Perpendicul CH weggebrochen (§. 4.), und also aus HI in HK. **Welches das erste war.**

5. Wenn das Glas auf beyden Seiten hohl ist, so wird der Strahl LN im Eingange in N gegen das Perpendicul IS (§. 3.), und also von der Axe AB aus NM in NO; in dem Ausgange in O von dem Perpendicul KP (§. 4.), und also aus OR in OQ abermals von der Axe AB weggebrochen. Derowegen muß er immer weiter von ihr weggehen, je weiter er fortgehet. **Welches das andere war.**

Auf gleiche Art kann man zeigen, daß auch in andern Fällen die Strahlen von der Axe weiter abweichen müssen, nachdem sie gebrochen worden.

Zusatz.

15. Dannenhero wird das Sonnenlicht durch die Refraction in hohlen Gläsern geschwächet, und sie können also keine Brenngläser abgeben, noch die Sachen in einem verfinsterten Gemache abbilden, wie die erhabenen Gläser (§. 20. 30. Opt.)

Anmerkung.

16. Dieses lehret auch die Erfahrung. Denn wenn ihr die Sonnenstrahlen mit einem Hohlglase auffanget; so wird der helle Circul hinter dem Glase um so viel größer seyn, je weiter ihr hinter ihm ein weisses Papier haltet. Und werdet ihr finden, daß die Hohlgläser desto mehr die Strahlen zerstreuen, je kleiner ihr Diameter ist.

4. 16 a) Der auf das Concavglaß fallende Strahl FG ist zu betrachten, als wenn er von einem sehr weit entfernten Punkte der Axe BA herkäme. Nach der Brechung bekömmt er die Richtung HK, welche rückwärts verlängert, die Axe in N durchschneidet. Alle gebrochenen Strahlen wie HK haben

also eine solche Lage, als wenn sie von einem näher vor dem dem Glase liegenden Punkt N ausgiengen. Diesen Punkt heist man bey einem Concavglase den **Zerstreuungspunkt.** So wie also die Convexgläser einen Vereinigungspunkt für die gebrochenen Strahlen hinter sich haben, so haben die hinter einem Concavglase aus einander fahrenden gebrochenen Strahlen, **vor dem Glase** einen Zerstreuungspunkt, und ein Auge, welches den Strahl HK empfinge, wird davon eben so gerührt, als wenn näher vor dem Glase bey N ein Objekt sich befände.

16b) Darauf gründet sich die Eigenschaft der Hohlgläser, daß **kurzsichtige Augen** entfernte Gegenstände durch sie deutlich sehen können. Denn, wenn ein Auge ohne solches Glas, einen unendlich oder doch sehr weit in der Axe BA hinaus liegenden Punkt nicht deutlich sehen könnte, so müßte es ihn vermittelst des Glases deutlich sehen, weil es jetzt von jenem Punkte Strahlen nach den Richtungen HK bekömmt, die eine solche Lage haben, als wenn sie von einem **nahen** Objekte N herkämen. Wenn also das Auge nur bis auf die Entfernung deutlich sehen kann, um welche der Zerstreuungspunkt N von dem Glase weg ist, so wird es vermittelst des Glases auch ein sehr weit entferntes Objekt deutlich sehen können. So dienen also die Hohlgläser kurzsichtigen Augen, wie auch die Erfahrung lehret. Je kurzsichtiger ein Auge ist, eines Hohlglases von desto kürzerer Zerstreuungsweite HN muß es sich bedienen, um in der Ferne deutlich zu sehen.

16c) So dienen denn umgekehrt die Convexgläser denjenigen, welche zwar in der Ferne, aber nicht in der Nähe deutlich sehen können, welcher Fehler sehr häufig bey alten Personen statt findet. Denn wäre z. E. F (Fig. 3.) ein Objekt, welches ein Auge bey I oder D wegen der allzugroßen 3.
Nähe IE nicht deutlich sehen könnte, so würde es solches vermittelst des Convexglases deutlich sehen, weil es jetzt von dem nahe liegenden Punkte F nach geschehener Brechung Parallelstrahlen, wie von einem sehr weit entlegenem Punkte, erhalten würde. Denn sobald F in den Brennpunkt des Glases AB gebracht wird, werden alle Strahlen, wie FE nach geschehener Brechung in ED, mit der Axe LF parallel, und diese gebrochenen Strahlen haben eine solche Lage, als wenn sie von einem weit entfernten Punkte der Axe herkämen, daher das Auge vermittelst ihrer auch das nahe Objekt

jekt F deutlich sehen muß. Auf diese Art werden die **Brillen** für alte Personen, welche in der Nähe nicht deutlich lesen können, aus Convexgläsern verfertigt.

16 d) So erhellet denn auch, daß wenn überhaupt ein Gegenstand einem Auge zu nahe ist, als daß er deutlich gesehen werden könnte, man ihn nur in den Brennpunkt oder nahe in den Brennpunkt einer **Convexlinse** bringen darf, so wird er deutlich gesehen werden können. Eine Convexlinse von einer sehr kurzen Brennweite, wird also verstatten, daß man einen Gegenstand auch in einer eben so geringen Nähe bey dem Auge demnach deutlich sehen kann.

Lehrsatz.

6. **17. Wenn das Auge zwischen einem erhabenen Glase AB und dem Brennpunkte F, oder auch in dem Brennpunkte F ist; so siehet es dadurch die Sachen selbst, aber größer als sie sind.**

Beweis.

Denn wenn das Auge zwischen dem Glase AB und dem Orte des Bildes F ist; so sehet ihr den Punkt C in der Linie FC, weil CF ungebrochen durchgehet, als die Axe, so auf beyde erhabene Flächen perpendicular fället (§. 4.). Den Punkt D sehet ihr vermittelst des gebrochenen Strahles FE in der Linie dF durch das Glas. Derowegen sehet ihr CD unter dem Winkel CFd; da ihr sonst CD ohne das Glas unter dem Winkel CFD sehen würdet. Da nun der Winkel CFd grösser ist, als CFD; so müssen die Sachen durch das Glas größer zu seyn scheinen, als sie mit bloßen Augen gesehen werden (§. 52. Optik.). Und da der Strahl von dem Punkte D zur Rechten ins Auge fället, gleich als wenn das Glas nicht da wäre, so müsset ihr auch die Sache recht und nicht verkehrt sehen. W. Z. E.

Zusatz.

18. **Je näher der Punkt F hinter dem Glase ist, je größer wird der Winkel CFd, und je grösser erscheinet**

net

net CD durch das Glas. Da nun der Punkt F immer näher dem Glase kommet, je mehr der halbe Diameter der erhabenen Fläche abnimmet; so vergrössern auch die Gläser mehr, wenn sie von einer kleinen Kugel, als wenn sie von einer grossen sind.

18a) Wäre nun überdem das Objekt auch nur um die Brennweite des Glases von dem Auge entfernt, so würde man es bey dieser **Vergrösserung** auch **deutlich** durch die Linse AB sehen (§. 16d).

Zusatz.

19. Derowegen brauchet man zu den Vergrösserungsgläsern die kleinesten sphärischen Gläser, die man haben kann; ja so kleine Kügelein, welche kaum die Grösse eines Hirsekörnleins haben.

Lehrsatz.

20. **Durch ein hohles Glas erscheinen die Sachen recht, nicht verkehret, aber viel kleiner als sie sind.**

Beweis.

Es sey das Auge in F, und sehe ohne Glas AB unter dem Winkel AFB. Weil durch die Refraction in hohlen Gläsern die Strahlen weiter aus einander gebracht werden (§. 14.); so kann der Strahl BD nicht mehr in F kommen, sondern ein anderer BE, durch welchen der Punkt B von dem Auge in G gesehen würde. Und also sehet ihr B in b, A aber in A, weil der Perpendicularstrahl AF nicht gebrochen wird (§. 4.); folgends AB unter dem Winkel AFb. Da nun dieser kleiner ist, als AFB; so muß auch AB durch das Glas kleiner aussehen, als mit blossen Augen (§. 52. Opt.). **Welches das erste war.** 7.

Weil aber die Strahlen, welche in einem Hohlglase gebrochen werden, kein Bild formiren (§. 15.) so sehet ihr durch dasselbe die Sache selbst, und dannenhero nicht

nicht verkehret, sondern recht. Welches das andere war.

Anmerkung.

21. Je von einer kleinern Kugel die Höhle des Glases ist; je mehr werden die Sachen verkleinert. Und lässet es angenehm, wenn man das eine Auge offen hat, mit dem andern aber durch ein Hohlglas siehet: denn so siehet man jede Sache zweymal, einmal groß, das anderemal kleiner. Z. E. Neben einem Manne stehet ein Knabe, der ihm in allen vollkommen ähnlich ist.

Erklärung.

22. Ein Fernglas oder vielmehr Fernrohr, ist ein solches optisches Werkzeug, wodurch man entfernte Sachen nicht allein deutlich, sondern auch vergrössert sehen kann.

Erklärung.

23. Das Glas, welches gegen die Sache gekehret wird, nennet man das Objectivglas: die andern aber, welche gegen das Auge stehen, die Augengläser.

Aufgabe.

24. Ein Gallilåanisches oder Holländisches Fernglas zu machen.

Auflösung.

1. Um eine hölzerne Welle, deren Diameter der Breite des Objectivglases gleichet, leget ein schwarz gefärbtes Papier, und kleistert es zusammen, damit es eine Röhre wird. Darüber kleistert noch viel anderes Papier, nachdem die Röhre dicke seyn soll, und oben überziehet sie mit Türkischem Papiere. Wenn die eine Röhre trocken ist, so machet über diese noch eine andere auf die vorige Weise; und über die andere noch eine dritte u. s. w. bis die Röhre zu dem Fernglase lang genug wird, wenn man die Stücke aus einander ziehet.

het. Ihr könnet auch die Stücken der Röhren aus Blech machen, wenn eines über dem andern zusammengelöthet wird; oder auch anstatt des mittleren Papiers, so über das schwarze gekleistert wird, hölzerne Späne nehmen, und es oben anstatt des Türkischen Papiers mit Pergament überziehen.

2. Wenn die Röhre auf die erste und dritte Art gemachet worden, so lasset von dem Drechsler für jede eine Einfassung drehen, damit die kleinen Röhren niemals ganz in die weiten fahren, und ihr Verdruß davon habet, wenn ihr die Röhren des Fernglases ausziehen wollet.
3. An das eine Ende der Röhre schraubet das in Holz eingefassete Objectivglas ein, in die daselbst eingeleimte Schraubenmutter, welches ein Stück von einer grossen Kugel, und entweder an einer, oder auf beyden Seiten erhaben seyn soll, und dannenhero das Bild weit hinter sich wirft (§. 10.).
4. An das andere Ende der Röhre schraubet auf gleiche Weise das Augenglas ein, welches auf einer Seite platt, auf der andern hohl ist, und zwar die Höhlung nach einer kleinen Kugelfläche hat.

Wenn ihr die Röhre so aus einander ziehet, daß das Augenglas noch vor dem Bilde des Objektivglases in der Weite des Zerstreuungspunktes (§. 162) zu stehen kommet; so werdet ihr weit entlegene Sachen dadurch in der Nähe und vergrössert sehen können.

Beweis.

Einen vollständigen Beweis findet man in meinen Element. Dioptr. (§. 330.). Er ist aber schwerer, als daß ihn Anfänger fassen können, zumal da alle hierzu nöthigen Gründe im vorhergehenden sich nicht haben erweisen lassen. Derowegen habe ich ihn auch selbst in den deutschen Anfangsgründen weggelassen.

Anmerkung.

25. Hevelins (in Prolegom. Selenogr. c. 2. f. 12.) lobet folgende Proportiones.

Diameter des Objectivglases auf beyden Seiten erhaben.	Augenglases auf beyden Seilen hohl.
Schuhe.	Zoll.
4	$3\frac{1}{2}$
5	$5\frac{1}{2}$
8	$5\frac{1}{2}$
10	$5\frac{1}{2}$
12	$5\frac{1}{2}$

Anmerkung.

26. Unerachtet diese Ferngläser die Sachen nicht allein deutlich, sondern auch groß und aufgerichtet vorstellen, so hat man doch zu astronomischen Betrachtungen des Himmels andere verfertiget, weil man zu wenig auf einmal dadurch sehen kann.

26a) Smiths Optik, 1. B. 4. K. und Hrn. Prof. Klügels anal. Dioptrik 2 Thl. 4. Abschn.

Aufgabe.

27. **Ein astronomisches Fernglas zu machen.**

Auflösung.

1. Machet eine Röhre, die ihr aus einander ziehen könnet, wie in der **vorhergehenden Aufgabe** (§. 24.).
2. Setzet darein ein Objectivglas, welches entweder auf beyden Seiten erhaben, oder nur auf einer erhaben, auf der andern platt ist, und einen großen Diameter hat.
3. An das andere Ende der Röhre befestiget ein Augenglas, welches von einer kleinen Kugel, und zwar auf beyden Seiten erhaben ist, dergestalt,

gestalt, daß der Brennpunkt beyder Gläser in einem Orte bey einander ist.

Wenn ihr die Röhre so ausziehet, daß die Brennpunkte beyder Gläser zusammenstoßen; so werdet ihr die Sache groß, nahe und verkehret sehen.

Anmerkung.

28. Die Erfahrung hat gelehrt, daß wenn man statt eines Augenglases von einer kurzen Brennweite, zwey nimmt, jedes von einer etwas längern Brennweite, die zusammen die Strahlen eben so brechen, wie jenes allein gethan haben würde, die Deutlichkeit etwas grösser wird. Indessen werden doch die meisten astronomischen Fernröhre nur mit einem Augenglase verfertigt. (M.)

Anmerkung.

29. Einige gute Verhältnisse der Objectiv und Oculargläser zeigt folgendes Täfelchen:

Brennweite des Objektivs.	Des Oculars.
Schuhe.	Zolle.
2	0,8
5	1,3
18	3,4
30	5,7

Wenn man achromatische Objectivgläser (§. 13 d) nimmt, so kann man Augengläser von einer sehr viel kürzern Brennweite **ohne Nachtheil der Deutlichkeit**, anwenden, wodurch denn eine viel stärkere Vergrösserung hervorgebracht wird. Denn man kann zeigen, daß die **Vergrösserung eines astronomischen Fernrohres** herauskömmt, wenn man die Brennweite des Objectivglases, mit der des Ocularglases dividirt. Bey Fernröhren, die nicht achromatisch sind, leidet die Deutlichkeit sehr, wenn man sie zu stark vergrössern läßt, weil man alsdann die farbichten Strahlen zu sehr wahrnimmt. (§. 13 c) (M.)

Aufgabe.

30. **Ein Fernglas zu machen, welches die Sachen aufgerichtet vorstellet, wie sie sind.**

Auflösung.

1. Bereitet eine Röhre, wie in der Aufgabe (§. 24.).

2. Setzet darein ein Objektivglas, so entweder auf beyden, oder nur auf einer Seite erhaben, und auf der andern platt ist, und einen großen Diameter hat.

3. Setzet ferner darein drey Augengläser in der Weite ihrer Brennpunkte von einander: die alle beyderseits gleich viel erhaben sind, und einen kleinen Diameter haben.

Anmerkung.

31. Wenn ihr das Fernglas mit vier Gläsern stellen wollet: so nehmet anfangs die zwey Theile der Röhre, darinnen das Objektiv- und erste Augenglas ist, und ziehet sie so weit auseinander, bis ihr die Sache, worauf ihr sie gerichtet, deutlich sehen könnet. Eben dieses thut mit dem andern Theile, in welchem die beyden Augengläser zu finden. Endlich stecket beyde Theile der Röhre wieder in einander, und verschiebet die engere in der weiteren so lange, bis ihr die Sache abermal deutlich sehen könnet.

Zusatz.

32. Wenn ihr die zwey mittleren Augengläser wegnehmet, so bekommt ihr ein astronomisches Fernglas.

Aufgabe.

33. Wie viel ein Fernglas die Sache vergrössert, zu erfahren.

Auflösung.

Richtet das Fernglas nach einer Reihe Ziegel auf dem Dache, und sehet zu, wie viel Ziegel durch das Fernglas so groß als die ganze Reihe aussehen: so wisset ihr, wie viel das Fernglas im Diameter vergrössert.

33 a) Auf diesen Verfahren die Vergrösserung eines astronomischen Fernrohres ohngefähr zu schätzen, hat Hr. **Herschel** sein **Lampenmikrometer** gegründet. Beschreibung

und

und Abbildung davon findet sich in **Schröters** Beyträgen zu den neuesten astron. Entdeckungen. 138. u. f. f. Die Theorie davon von Hrn. Hofr. **Kästner** in dem 5ten Stücke des Götting. Magazins, welches Hr. Hofr. **Lichtenberg** besorgt hat. Gött. 1782.

Genauer kann man die Vergrösserung eines Fernrohres nach §. 29a) berechnen.

Zusatz.

34. **Weil die Circul sich verhalten wie die Quadrate, und die Kugeln wie die Cubi ihrer Diameter (§. 131. 212. Geom.); so könnet ihr leicht finden, wie vielmal die Fläche, imgleichen wie vielmal der Körper selbst vergrössert werde.**

Erklärung.

35. **Durch die Bedeckung verstehen wir den Ring, der an dem Objectivglase bedecket wird, damit keine Strahlen dadurch in das Fernglas kommen können. Hingegen die Eröffnung ist ein Circul, welcher mitten in dem Objectivglase offen bleibet, damit die Strahlen dadurch in die Röhre fallen können.**

Aufgabe.

36. **Die rechte Bedeckung zu einem Fernglase zu finden.**

Auflösung.

1. Schneidet in der Grösse eines Objektivglases verschiedene Scheiben aus schwarzen und etwas dicken Papiere.
2. Aus diesen Scheiben schneidet verschiedene kleinere aus, von denen die kleineste im Diameter einer großen Erbse gleichet, oder beynahe $\frac{1}{4}$ eines Rheinländischen Zolles ist.
3. Leget eine Scheibe nach der andern auf das Objectivglas, und merket, durch welche ihr die Sache am deutlichsten sehen könnet.

So werdet ihr die Bedeckungen für alle Fälle finden können.

36a) Die Ursache, warum man insbesondere den gemeinen Fernröhren eine Bedeckung giebt, liegt in (§. 13b und §. 13c).

Aufgabe.

37. Wie viel ein Vergrösserungsglas die Sachen vergrössert, zu erfahren.

Auflösung.

1. Beschreibet auf einem weissen Papiere eine sehr zarte und ganz kurze Linie, welche ihr durch das Vergrösserungsglas ganz übersehen könnet.

2. Mit dem einen Auge sehet durch das Vergrösserungsglas, und das andere behaltet offen: so werdet ihr das Bild in der Luft unweit dem Auge schweben sehen.

3. Nehmet einen Circul und fasset die Länge der erscheinenden Linie, und traget selbige auf das Papier.

4. Nehmet mit dem Circul die Grösse der Linie (1), und sehet zu, wie vielmal ihr sie auf die gefundene Linie (3) tragen könnet.

So findet ihr, wie vielmal der Diameter der Sache durch euer Glas vergrössert wird, folgends auch wie viel es die Fläche von dem Körper vergrössert (§. 34).

Anmerkung.

38. Es wird eine sonderbare Geschicklichkeit erfordert, wenn ihr das verrichten wollet, was in gegenwärtiger Aufgabe vorgeschrieben worden.

Aufgabe.

39. Ein Vergrösserungsglas aus zwey Gläsern zusammenzusetzen.

Auf-

Auflösung.

Sie werden fast wie die astronomischen Ferngläser gemachet, nur daß das Objektivglas von einer kleinen: und das Augenglas von einer größeren Brennweite ist. Ihre rechte Weite von einander kann die Erfahrung am bequemsten lehren. Und eben deswegen ist ein umgekehrtes astronomisches Ferglas ein zusammengesetztes Vergrösserungsglas. (Microscop.)

Anmerkung.

40. Hier sind einige brauchbare Verhältnisse der Objectiv: und Oculargläser zu Mikroscopen.

I. Für ein Mikroscop mit 2 Gläsern.

Brennweite der Objectivlinse $= \frac{7}{10}$ Zoll, der Ocularlinse $= 2$ Zoll. Abstand der Gläser von einander $= 9$ Zoll. Ist nun das Objekt $\frac{7}{9}$ Zoll von der Objektivlinse entfernt, so ist die Vergrößerung etwa 36 mahl im Durchmesser, wenn das Auge etwa $2\frac{4}{7}$ vom Augenglase weg ist. Die Vergrößerung wächst, wenn man den Gegenstand näher zum Brennpunkte der Objectivlinse rückt, in welchem Falle man aber auch die Ocularröhre herausziehen muß.

II. Für eines mit 3 Gläsern.

Brennweite der Objectivlinse $\frac{1}{2}$ Zoll, des zunächst darauf folgenden Oculargases 1 Zoll, Oeffnung desselben $\frac{1}{2}$ Zoll, Brennweite des zweyten Oculars $\frac{1}{3}$ Zoll, Oeffnung $\frac{1}{6}$ Zoll; Entfernung beyder Oculare $= \frac{1}{3}$ Zoll. Soll nun die Vergrösserung z. E. m mahl seyn, so muß die Ocularröhre so weit herausgeschoben werden, daß die Objectivlinse von dem nächsten Ocularе entfernt ist $\frac{m}{32}$ Zoll, und das Object über den Brennpunkt der Objectivlinse um $\frac{8}{m}$ Zolle hinaus steht. (Euler Dioptr. Tom. III. p. 178.) Z. E. für $m = 160$ müßte das erwähnte Ocular von der Objektivlinse 5 Zoll weit abstehen. Uebrigens kann die stärkere Vergrösserung auch durch Objectivlinsen von kürzern Brennweiten, als die angegebene ist, bewürkt werden. Die Augengläser und ihre Stellung bleiben ohngeändert.

Von Cuff, einem berühmten englischen Künstler, hat man sehr viele Mikroscope von guter Wirkung. Die Abmessungen der Gläser sind gewöhnlich folgende. Das nächste Ocularglas beym Auge, hat 15 Linien Brennweite, das darauf folgende 30 L. Der Abstand beyder Oculare ist auch 30 Lin. Der Abstand der Objektivlinse von dem nächsten Oculare 60 L. In der Fassung der Objectivlinse können Linsen von $\frac{1}{2}$ bis 6 Linien Brennweite angebracht werden.

Die Theorie der Mikroscope s. m. in **Eulers** und **Klügels** bereits angeführten Schriften. Die Objekte bey den Mikroscopen werden gewöhnlich vermittelst eines unter ihnen angebrachten kleinen Hohlspiegels vermittelst des reflectirten **Tageslichtes** erleuchtet.

Anmerkung.

41. Den bisher beschriebenen optischen Werkzeugen können nun auch noch die **Spiegelteleskope** beygefügt werden, das **Gregorianische** besteht 1) aus einem grössern Hohlspiegel, welcher den Objekten zugekehrt wird, und 2) einem kleinern, der seine Höhlung dem Grössern zukehrt, und von ihm um die Summe der Brennweiten absteht, so daß das Bild von einem entlegenen Gegenstande, welches der grössere Hohlspiegel vor sich macht, sich zugleich in dem Brennpunkte des kleinern befinde. Die Parallelstrahlen, die nun solchergestalt der kleinere Spiegel von jenem Bilde reflectiret, gehen 3) durch eine Oeffnung, welche mitten in dem grössern angebracht ist, nach einem paare Augengläsern zu, welche auch um die Summe ihrer Brennweiten von einander abstehen müssen, und sich in einer Röhre befinden, welche vor jener Oeffnung eingeschraubt wird. Diese Spiegeltelescope thun sehr gute Würkung, und vergrössern einen weit entfernten Gegenstand ohngefähr so vielmahl, als so oft die Brennweite des kleinern Spiegels in der des grössern enthalten ist, vorausgesetzt, daß die Oculargläser einerley Brennweite haben. Die Hohlspiegel dürfen aber nicht von Glas seyn, weil solche doppelte Bilder machen. Man verfertigt sie von Metall (m. s. oben §. 21 a) Katoptr.) muß aber bey dem Gebrauche derselben sehr vorsichtig seyn, daß man sie nicht schnell aus der Kälte in die Wärme bringt, weil sie sonst anlaufen, und wenn dies öfters geschieht, leicht Flecken bekommen. Ueber die Anordnung und Berechnung derselben findet man in **Smiths** und **Klügels** bereits öfters angeführten Werken, so wie auch über verschiedene andere Einrichtungen der Spiegeltelescope, hinlänglichen Unterricht. Die Herschelischen

Ilschen und Schraderischen, sind jetzt in Absicht auf ihre Grösse, und der wichtigen Entdeckungen, die bereits an dem Himmel damit gemacht worden sind, die berühmtesten.

Aufgabe.

42. Eine Zauberlaterne zu machen, dadurch man allerhand Bilder mehr als in Lebensgrösse an eine weise Wand im Finstern werfen kann. 9.

Auflösung.

1. Machet eine Laterne von Blech, und befestiget an ihrer hintern Wand einen Hohlspiegel H, dessen Diameter in grossen Laternen höchstens 1 Schuh, in mittelmäßigen $\frac{1}{2}$ Schuh, in kleinen nur 4 bis 5 Zolle hält.

2. In dem Brennpunkt des Spiegels setzet eine Lampe QL mit einem starken baumwollenen Dochte.

3. An die Thüre der Laterne wird eine blecherne Röhre FKG gesetzet mit zwey bis drey Zügen, daß man sie nach Gefallen aus einander ziehen kann.

4. Hinten an der Thüre bekommet die Röhre zwey Schlitze, dadurch ihr ein viereckichtes Bretlein schieben könnet, in welches runde Spiegelglasscheiben PM, im Diameter ohngefehr $\frac{1}{4}$ Schuh, oder auch darunter, eingesetzet werden, darauf Bilder mit dünnen Wasserfarben mit größtem Fleiße gemahlet.

5. In eben diese Röhre kommen zwey erhabene Gläser, welche auch wohl auf einer Seite platt seyn können. Die Breite dieser Gläser ist der Höhe des Bildes PN gleich. Das Glas in I kann im Diameter $\frac{90}{100}$, das andere in K aber 1 Schuh $\frac{20}{100}$ halten; oder der Diameter von dem ersten 1 Schuh und $\frac{77}{100}$, von dem andern aber 2 Schuhe und $\frac{25}{100}$ haben. Dechales machet das erste 5 Zoll, das andere 10 Zoll.

Wenn ihr nun das Bild verkehrt durch die Schlitze in die Röhre schiebet, und die Röhre so aus einander ziehet, daß das Bild von dem Glase in I weiter als der Brennpunkt ist; so werdet ihr es aufgerichtet und vergrössert an der Wand sehen. Denn gleichwie das Bild kleiner ist, als die Sache, wenn diese von dem Glase weit entfernet; so wird das Bild grösser, wenn die Sache dem Glase so nahe, wie sonst das Bild: und stehet dieses so weit von dem Glase, als sonst die Sache, so ein kleines Bild hat. (§. 12.)

42a) Mit der Zauberlaterne ist das **Sonnenmikroscop**, um z. E. kleine Insekten u. d. g. vergrössert in einem finstern Zimmer an einer weisen Wand abzubilden, im wesentlichen einerley, nur daß die kleinen Objekte durch reflectirte Sonnenstrahlen erleuchtet werden, und man daher die ganze Vorrichtung in einem Fensterladen anbringt. Berühmt sind die **Lieberkühnischen, Cuffischen, Branderischen** u. a. Einige Verbesserungen dieser Werkzeuge haben die Hrn. **Euler** und **Aepin** angegeben in den Comment. nov. Petropol. Tom. III. p. 363. Tom. IX. p. 316. Tom. X. p. 299.

Lehrsatz.

43. Durch ein vieleckichtes Glas erscheinet eine jede Sache so vielmal, als das Glas Ecken hat.

Beweis.

8. Denn von C fallen auf jede Seite DA, AB und BE Strahlen. Weil sie nun gegen das Auge O gebrochen werden, so siehet es nicht allein durch den Strahl CO die Sache in C, sondern auch durch die Strahlen FO und GO in c und c, folgends so vielmal, als das Glas Ecken hat. W. Z. E.

Anmerkung.

44. Wenn ihr die wahre Sache greifen wollet; so haltet den Finger dergestalt, daß ihr gegen jedes Bild einen Finger gerichtet sehet. Denn wenn ihr alsdenn gegen die Sache zufahret, so werdet ihr sie unstreitig treffen: imgleichen wird die

wahre

wahre Sache stille liegen bleiben, wenn das vieleckichte Glas herumgewendet wird.

Aufgabe.

45. Tüchtiges Glas zum Schleifen auszulesen.

Auflösung.

1. Leget das Glas auf ein weisses Papier, so werdet ihr sehen, ob das Papier weiß bleibe, oder ob es braun wird, und daraus schließen können, ob es helle sey, oder nicht.

2. Gebet Acht, ob Winden, Sandkörnlein, Bläselein und Adern in dem Glase sind, welches ihr nicht allein mit Augen sehen könnet, wenn ihr es gegen das Licht haltet, sondern auch gar deutlich aus dem Schatten auf dem Papiere wahrnehmet, wenn ihr die Sonnenstrahlen durchfallen lasset. Denn weil sie die Refraction der Strahlen sehr irregulär machen, so habet ihr euch in Acht zu nehmen, daß nichts dergleichen mitten in dem Glase ausserhalb der Verdeckung anzutreffen sey.

Aufgabe.

46. Gläser zu schleifen und zu poliren.

Auflösung.

1. Thut in die Schüssel etwas kleinkörnigen Sand, feuchtet ihn an mit Wasser, und reibet darinnen das Glas, welches ihr auf ein Holz gekittet, daß ihr es bequem halten könnet; die Schüssel aber setzet auf ein Tuch, welches etlichemal über einander geleget.

2. Wenn das Glas die Figur der Schüssel angenommen, so waschet sie rein aus, damit nichts von dem

Sande

Sande zurücke bleibet, und brauchet ferner an statt des Sandes geschlemmeten Schmergel.

3. Nachdem die Grüblein von dem Sande ausgeschliffen, nehmet rothen Uhrsand, und reibet damit in der Schaale das Glas so lange, bis es einigen Glanz bekommet.

4. Da es nun zum Poliren geschickt ist, überkleibet die Schüssel mit zartem Postpapiere, so durchaus von einerley Dicke ist, und keine Ungleichheiten hat. Ihr könnet aber das Papier entweder mit dünnem Gummiwasser, oder einem zarten Kleister von Kraftmehle oder anderem weißenen Mehle, ingleichen mit Oblaten ankleiben, und nachdem es trocken worden, mit Trippel- oder Zinnasche überstreichen, mit einem Probierglase es vorher recht gleich machen, und endlich auf diesem Papiere das Glas so lange reiben, bis es einen recht hellen Glanz bekommet.

46 a) Hertels Unterricht zum Glasschleifen. Smiths Optik 3 B. 1 K. Leutmann vom Glasschleifen.

Anmerkung.

47. **Erfahrung.** Wenn man in einem finstern Zimmer einen Sonnenstrahl an der Oberfläche eines Körpers zumahl, wenn diese scharf und eckicht ist, vorbeyfahren läßt, so wird man finden, daß auch hiedurch derselbe aus seinem geradlinichten Wege gelenkt wird. Man heist dieses die **Beugung** des Lichtes, (inflexio luminis). **Grimaldi** hat zuerst davon geredet. Physico Mathesis de lumine. Bonon. 1665. Nachher **Neuton** Opt. L. 3. **Maraldi** Mem. d. Paris 1723. Die Gesetze dieser Beugung hat Hr. **Joh. Nep. Fischer** in einer Abhandlung über eine diesen Gegenstand betreffende Preisfrage der Götting. Soc. d. W. gegeben, im J. 1779.

Anmer-

Anmerkung.

48. Die vorzüglichsten optischen Bücher sind bey Gelegenheit schon angeführt worden. Ein vollständiges Verzeichniß derselben in Hrn. Prof. **Scheibels** mathem. Bücherkenntniß 9 St. Bresl. 1777.

Abel Burjas Optik ist auch sehr gut zu gebrauchen. **Priestleys** Geschichte d. Opt. mit Hrn. Prof. **Klügels** Anmerkungen.

Essays on the Microscope, by George Adams. London 1788. Hrn. v. **Gleichen** Abhandl. von Sonnenmicrosc. Nürnb. 1781. sind noch einige neuere hieher gehörige Schriften.

Ende der Dioptrik.

Anfangs-

Anfangs-Gründe der Perspectiv.

Erklärung.

1.

Die Perspectiv ist eine Wissenschaft, eine Sache so abzubilden, wie sie in einer gewissen Weite und Höhe in die Augen fället.

1a) Abr. G. Kaestneri Perspectiuae et Projectionum theoria generalis analytica.

Karstens Lehrbegriff d. gesammten Mathem. 7 Thl.

Lamberts freye Perspectiv. Zweyte Ausg. 1774.

Perspective Pratique par un Religieux de la Comp. de Iesus. Paris 1663. 2 Quartbande Seconde Partie Traité V.

Rembolds vollständige Anweisung zur Perspectiv: Reiskunst. Augsp. 1710.

Jacobsz Perspectiv u. a.

Zusatz.

2. Es ist demnach nöthig, daß die von dem Bilde zurückgeworfene Strahlen auf eben eine solche Art in das Auge fallen, als geschehen würde, wenn sie von der Sache selbst in einer gegebenen Höhe und Weite hineinfielen.

Anmerkung.

I. 1. 3. Es sey O das Auge, so wird der Triangel ABC gesehen durch Hülfe der Strahlen OA, OC, OB, und so lange diese Strahlen einerley Winkel in dem Auge mit einander machen, so lange erscheinet der Triangel auf einerley Art. Daher erschiene er noch wie vorhin, wenn die Strahlen Oa, Oc, Ob,

Ob, von einer Tafel HI zurücke geworfen würden. Wenn ihr euch einbildet, HI sey eine durchsichtige Tafel, dadurch die Strahlen von dem Triangel ABC, doch unverändert, durchgehen, indem sie in das Auge O kommen, und sie in den Punkten a, b, c, u. s. w. wo sie durchgehen, durchlöchern; so werdet ihr ein Bild haben, welches dem Auge in O eben so erscheinen wird, als der Triangel ABC selbst. Die Perspectiv nun zeiget, wie ihr die Punkte a, b, c, geometrisch finden könnet.

3 a) Die Figur a b c auf der Tafel nennt man die **Projection** der vorgegebenen A B C, oder auch das **perspectivische Bild** von A B C.

Erklärung.

4. Der Augenpunkt F ist derjenige, in welchen aus dem Auge O auf die Tafel HI das Perpendicul OF gezogen wird. I. 2.

Erklärung.

5. Die Linie MI, auf welchen die Tafel aufstehet, wird Fundamentallinie oder Grundlinie genennet. I. 2.

Erklärung.

6. Die Horizontallinie ist eine gerade Linie PQ, die durch den Augenpunkt F mit der Fundamentallinie NI parallel gezogen wird. I. 2.

Erklärung.

7. Der Distanzpunkt ist ein Punkt der Horizontallinie P oder Q, welcher von dem Augenpunkte F so weit entfernet, als das Auge O von eben demselben. I. 2.

Aufgabe.

8. Eine jede Horizontalfläche perspectivisch zu zeichnen.

Auflösung.

1. Beschreibet die Fläche z. E. den Triangel A B C, wie in der Geometrie gelehret worden. I. 3.

2. Zie-

2. Ziehet über derselben die Fundamentallinie DE in der Weite des Triangels von der Tafel.

3. Mit derselben ziehet die Horizontallinie HK parallel, in der Weite der Höhe des Auges.

4. Lasset aus allen Winkeln der geometrischen Fläche auf die Fundamentallinie DE Perpendicularlinien A 1, C 2, B 3, fallen.

5. Nehmet in der Horizontallinie HK den Augenpunkt V an, und traget aus ihm, gegen welche Seite ihr wollet, den Distanzpunkt K in der gegebenen Weite des Auges.

6. Traget aus 1 in A aus 2 in C, und aus 3 in B die Prrpendicularlinien A 1, C 2, B 3.

7. Ziehet aus dem Augenpunkte V gegen 1. 2. 3. Linien, und aus dem Distanzpunkte K gegen B, A und C andere Linien.

8. Wo diese Linien einander durchschneiden, nemlich in b, a und c; da präsentiren sich die Punkte B, A und C. Wenn ihr demnach die Linien ba, ac und cb ziehet, so ist der perspectivische Riß fertig.

Anmerkung.

9. Diese Regel ist allgemein, und könnet ihr nach eurem Gefallen Figuren erwählen, und in das Perspectiv bringen, wenn ihr euch in diesen Zeichnungen oder sogenannten ichnographischen Rissen üben wollet. Den Beweis findet man in meinen Element. Perspect. §. 33. In besonderen Fällen kann man sich einiger Vortheile bedienen, aus welcher Absicht ich noch folgende beyde Aufgaben hieher setze.

Aufgabe.

I. 4. 10. **Ein Quadrat ABCD ins Perspectiv zu bringen, darein ein anderes IMGH beschrieben ist.**

Auflösung.

1. Nachdem ihr die Horizontallinie LK, und die Fundamentallinie DE gezogen, so traget aus dem Au-

gen-

genpunkte V auf die erstere Weite des Auges von der Tafel VL und VK.

2. Ziehet die Linien VA und VB, imgleichen die Linien KA und LB, so ist AcdB der Riß von dem Quadrate ABDC.

3. Verlängert die Seite des eingeschriebenen Quadrats HI bis an die Fundamentallinie in I, und ziehet die Linien KI und KM; so ist ihgM das eingeschriebene Quadrat.

Aufgabe.

11. Einen Circul ins Perspectiv zu bringen.

Auflösung.

1. Beschreibet auf der Fundamentallinie DE einen halben Circul AGB, und lasset nach Gefallen aus willkührlich angenommenen Punkten der Peripherie C, F, G, H, I, u. s. w. Perpendicularlinien C 1, F 2, C 3, H 4, I 5, u. s. w. darauf fallen. II. 5.

2. Aus den Punkten A, 1, 2, 3, 4, 5, B ziehet gerade Linien in den Augenpunkt V, imgleichen aus B die Linie LB in den Weitenpunkt L, und aus A die Linie AK in den Weitenpunkt K.

3. Ziehet durch die Punkte, wo sie die Linien V 1, V 2, V 3, u. s. w. durchschneiden, gerade Linien; so geben sich die Punkte i, h, g, f, u. s. w. durch welche die krumme Linie gezogen wird, welche den Circul im Perspectiv vorstellet.

Anmerkung.

13. Auf eben diese Art kann man eine jede andere krumme Linie in das Perspectiv bringen.

Aufgabe.

13. Einen Körper nach der Perspectiv zu zeichnen.

Auflösung.

I. 6. 1. Bringet die Grundfläche des Körpers bacd in das Perspectiv (§. 8.).

2. Richtet auf der Fundamentallinie ED in einem beliebigen Punkte H die Höhe des Körpers HI perpendicular auf, und ziehet in ein beliebiges Punkt V in der Horizontallinie HR aus H und I die geraden Linien VI und VH.

3. In den Winkeln b, a und c richtet die Perpendicularlinien bg, ah und ce auf.

4. Ziehet aus den Winkeln der Grundfläche die Linien b 1, d 2, mit der Fundamentallinie DE parallel.

5. Richtet in 1, 2 die Perpendicularlinien 1 L, 2 M darauf auf.

6. Machet endlich af = HI, bg = ce = 1 L und dh = 2 M; so könnet ihr die obere Fläche ghef ziehen.

Anmerkung.

14. Den Beweis findet man in meinen Element. Perspectiv. §. 35. Es wird aber dienlich seyn, wenn ich diese allgemeine Regel durch einige besondere Fälle erläutere.

Aufgabe.

15. Eine abgekürzete Pyramide ins Perspektiv zu bringen.

Auflösung.

II. 7. 1. Wenn man von allen Winkeln der oberen Grundfläche auf die untere Perpendicularlinien zöge, so würde man in unserem Falle ein Fünfeck innerhalb der unteren Grundfläche erhalten, dessen Seiten ihren Seiten parallel sind. Derowegen bringet dieses doppelte Fünfeck lmnop und abcde ins Perspectiv (§. 8.).

2. Richtet in H die Höhe der abgekürzten Pyramide HI auf, und ziehet aus dem Punkte V die Linien

HV

HV und VI, und determiniret (§. 13.), wie die Figur ausweiset, die Höhen, welche man auf die inneren Winkel abcde aufrichten muß.

3. Die oberen Punkte fghik ziehet mit geraden Linien zusammen, und
4. endlich ziehet die Linien 1k, fm, gn; so ist geschehen, was man verlangete.

Zusatz.

16. Wenn man zwey Circul, die aus einem Mittelpunkte beschrieben worden, ins Perspectiv bringet (§. 11.); so wird durch gegenwärtige Aufgabe ein abgekürzeter Kegel ins Perspektiv gebracht.

Aufgabe.

17. **Wände und Pfeiler ins Perspektiv zu bringen.**

Auflösung.

1. Bringet den Boden AFH3 ins Perspektiv, zugleich mit den Grundflächen der Säulen und Pfeiler, wenn einige vorhanden (§. 8. 11.). III. 8.
2. Auf die Fundamentallinie A 3 traget die Dicke der Mauer AB und 3. 1.
3. In A und B, imgleichen in 3 und 1, richtet Perpendicularlinien AD und BC, imgleichen 3. 6. und 1. 7. auf (§. 70. 89. Geom.).
4. Aus D und 6 ziehet Linien VD und V 6 gegen den Augenpunkt V.
5. Auf FH richtet EF und GH perpendicular auf; so habet ihr die Wände ADEF, FEGH und HG 6. 3. nebst der Decke DEG 6.
6. Wenn Pfeiler oder Säulen auf dem Boden AFH 3 zu stehen kommen, so müsset ihr aus ihren perspectivischen Grundflächen Perpendicularlinien aufrich-

ten, auf AD die wahre Höhe tragen, und aus ihrem obersten Punkte D die Linie DV ziehen, so geben sich, wie in der vorhergehenden Aufgabe, die wahren Höhen.

Anmerkung.

18. Der geometrische Grund mit dem Grunde der Pfeiler und Säulen wird nach den Regeln der Baukunst gezeichnet.

Aufgabe.

19. Eine Thür ins Perspectiv zu bringen.

Auflösung.

III. 8. I. Wenn eine Thüre in die Wand ADEF zu zeichnen ist; so

1. traget aus A in N ihre Weite von der Ecke, aus N in I und L in M die Breite der Pfosten, aus I in L die Breite der Thüre.

2. In den Punkt der Entfernung des Auges K ziehet die Linien NK, IK, LK, MK, so bekommet ihr im Perspective die Breite der Thüre il und der Pfosten in und lm.

3. Aus A in O traget die Höhe der Thüre AO, und aus A in P die Höhe der Pfosten, oder aus O in P die Breite der Oberschwelle.

4. Ziehet in den Augenpunkt V die Linien PV und OV.

5. Richtet in n, i, l und m Perpendicularlinien auf, die an PV und OV anstossen; so giebet sich die Thüre.

6. Die Dicke der Mauer bey l wird durch die Dicke der Mauer AB gefunden, wenn ihr aus B in den Augenpunkt V eine gerade Linie ziehet.

II. Wenn man die Thüre an der Wand FEGH zeichnen soll, so

1. traget aus A in R ihre Weite von der Wand zu Seiten, und aus R in T ihre Breite.

2. aus

2. aus R und T ziehet in dem Augenpunkte V die Linien RV und TV; so habet ihr ihre Breite im Perspective rt.
3. In r und t richtet Perpendicularlinien auf FH auf.
4. Aus A in P traget wie vorhin die wahre Höhe der Thüre AP.
5. Ziehet aus P in V die Linie PV, so ist Fz die perspectivische Höhe.
5. Machet rr und tt = Fz; so giebet sich die Thüre tt rr.

Aufgabe.

20. Fenster ins Perspectiv zu bringen.

Auflösung.

1. Traget aus 1 in 2 die Dicke der Mauer vor dem Fenster, aus 3 in 4 seine Weite von der Ecke, und aus 4 in 5 seine Breite. III. 8.
2. Aus 4 und 5 ziehet in den Punkt der Weite des Auges L die Linie L 5 und L 4; so bekommet ihr die Breite im Perspektive 9. 10.
3. Aus 9 und 10 richtet auf dem Boden die Perpendicularlinien auf, das ist, ziehet Linien mit 3. 6. parallel.
4. Aus 3 in 11 traget die Weite des Fensters von dem Boden 3. 11, und aus 11 in 12 seine Höhe 11. 12.
5. Endlich ziehet in dem Augenpunkte V aus 11 und 12 gerade Linien, so giebet sich das Fenster 13. 13. 14. 16.
6. Die Dicke der Mauer vor dem Fenster könnet ihr wie in der vorigen Aufgabe finden.

Aufgabe.

21. Eine aufgemachte Thür ins Perspectiv zu bringen.

Auflösung.

II. 9. Weil die Thüren, wenn sie aufgemacht werden, einen halben Circul beschreiben, so

1. beschreibet zuerst die Thüre im Lichten (§. 19).
2. Darnach bringet einen halben Circul ecd ins Perspectiv, dessen Mittelpunkt in a ist, der halbe Diameter aber die Breite der Thüre ad (§. 11.).
3. Merket darinnen den Punkt c, wo die Thüre stehet, und ziehet die Linie cf gegen die Fundamentallinie perpendicular.
4. Durch c und a ziehet die Linie ca, welche die Horizontallinie V O in O durchschneidet.
5. Endlich aus O durch b ziehet die Linie bf; so ist die offenstehende Thüre bfca gezeichnet.

Anmerkung.

22. Auf eben solche Art werden die offenen Fenster gezeichnet. Auch ist nicht nöthig, daß der ganze halbe Circul ins Perspectiv gebracht wird; sondern man darf nur den Punkt c durch die allgemeine Regel, wie es die Aufgabe (§. 8.) an die Hand giebet, determiniren.

Aufgabe.

23. **Den Schatten eines Körpers im Perspectiv zu zeichnen, wenn das Licht mit Strahlen, die aus einander fahren, sich ausbreitet, wie bey einer Lampe, einer Fackel, einem Wachslichte u. s. w. geschiehet.**

Auflösung.

II. 1. Suchet den Punkt M im perspectivischen Risse,
II. wo die Linie hinfället, die aus dem Mittelpunkte des Lichtes L auf den Boden, da der Körper stehet, perpendicular gezogen wird (§. 8.).

2. Von allen obern Ecken des Körpers lasset gleichfalls Perpendicularlinien auf den Boden fallen: wel-

welches in unserem Falle nicht nöthig ist, weil die Linien AD, BE, CF, die verlangten Linien sind.

3. Durch das unterste Ende dieser Perpendicularlinien F, E, D ziehet aus M gerade Linien MG, MH, durch die oberen aber A, C, B, aus L andere LG, LH, welche die vorigen in G und H durchschneiden, und den Schatten DEGH enden.

Aufgabe.

24. Den Schatten eines Körpers zu zeichnen, der an eine Wand RQ oder einen anderen Körper fället. I. 12.

Auflösung.

1. Suchet erstlich den Schatten BCM wie in der vorhergehenden Aufgabe (§. 23.).

2. Im Punkte T, wo die Linie NM, die durch N und den Punkt E, darauf die Perpendicularlinie aus der Spitze des Körpers fället, die Wand RQ durchschneidet, richtet die Linie TO auf den Boden, darauf der Körper ACB stehet, perpendicular auf, so habet ihr die Höhe des an die Wand geworfenen Schattens. Die Breite giebet sich unten von selbsten.

Aufgabe.

25. Aus der gegebenen Höhe der Sonne den Schatten eines Körpers im Perspektiv zu finden, wenn die Strahlen auf dem Boden, darauf der Körper stehet, parallel sind.

Auflösung.

1. Durch alle untere Ecken des Körpers E, H, G, F, ziehet Linien HL, FGK, FI mit der Fundamentallinie parallel. II. 13.

2. Durch die obern Ecken A, B, D ziehet gerade Linien BL, AK, DI, welche mit den Perpendicularli-

nien BH, AG, DF, einen Winkel machen, so der Weite der Sonne von dem Scheitel gleich ist, und die vorigen in L, K und I durchschneiden; so giebet sich der Schatten FIKL.

Aufgabe.

26. Aus der gegebenen Weite der Sonne hinter der Tafel von der Verticalfläche, und ihrer Höhe über dem Boden, darauf der Körper stehet, den Schatten desselben zu finden.

Auflösung.

III. 14. 1. In dem Augenpunkte V richtet die Linien VA auf die Horizontallinie HR perpendicular auf, und machet sie der Weite des Auges VL gleich.

2. Machet in A einen Winkel VAB, welcher der Weite der Sonne von der Verticalfläche gleich ist.

3. In B richtet die Linie BD perpendicular auf, machet BC = BA' und den Winkel DCB der gegebenen Sonnenhöhe gleich.

4. Wenn ihr nun den Schatten von IH finden wollet, so ziehet durch I aus B die Linie BK, und durch H aus D die Linie DK, so ist IK der verlangte Schatten.

Anmerkung.

27. Die Verticalfläche nennet man diejenige, welche auf dem Boden oder dem Grunde im Perspective perpendicular stehet.

Aufgabe.

28. Aus der gegebenen Weite der Sonne vor der Tafel von der Verticalfläche und ihrer Höhe über dem Boden, darauf der Körper stehet, den Schatten desselben zu finden.

Auflösung.

III. 15. 1. Richtet in dem Augenpunkte V auf die Horizontallinie HR die Linie VA perpendicular auf, und machet sie der Weite des Auges gleich.

2. Ma-

2. Machet in A einen Winkel VAB, welcher der Weite der Sonne von der Verticalfläche gleich ist.
3. In B richtet die Perpendicularlinie BD auf, machet BC = BA, und den Winkel BCD der gegebenen Sonnenhöhe gleich; so könnet ihr, wie in der vorigen Aufgabe, durch Hülfe der Punkte B und D den Schatten des Körpers finden.

Aufgabe.

29. **Den Schatten eines Körpers zu zeichnen, den er wegen des durch ein Fenster einfallenden Lichtes wirfet.**

Auflösung.

1. Aus dem Mittel des Fensters E lasset die Linie EF perpendicular herunter auf den Boden fallen, imgleichen aus den Ecken A und B die Linien AB und BG. III. 10.
2. Verlängert EF bis in D, damit ihr die Höhe des Fensters ED bekommet; so sind C, F und G die Punkte, daraus die Linien des Schattens durch die untern Punkte der Perpendicularlinien gezogen werden; hingegen E und D die Punkte, daraus die Linien durch die obern Ecken beschrieben werden.

Nemlich die drey Punkte C, F und G sind hier so viel, wie oben (§. 23.) der Punkt M, und die beyden E und D, wie daselbst der Mittelpunkt des Lichtes I. II. 11.

Anmerkung.

30. Von allem, was bisher gelehret worden, findet man gründlichen Beweis in meinen Elementis Perspectivae.

Aufgabe.

31. Eine jede Sache genau abzuzeichnen.

Auflösung.

1. Machet aus vier Leisten einen viereckichten Rahmen DE, und theilet den Raum darzwischen durch Faden in lauter gleiche kleine Quadrate ein. II. 16.

2. Befestiget den Rahmen mit dem Netze rechtwinklicht an einer Tafel G und innerhalb einem Loche F die Scheibe H, darinnen mitten ein kleines Löchlein ist.

3. Theilet das Papier, darauf die Sache abgezeichnet werden soll, in eben so viele und so grosse Quadrate, als das Netz eingetheilet worden.

4. Stellet das Netz vor die Sache, die ihr abzeichnen sollet, und sehet darnach durch das Löchlein in H.

5. Zeichnet jedes in sein Quadrat auf dem Papiere, wo ihr es in dem Netze DE erblicket.

Wer nun im Zeichnen geübet ist, wird solchergestalt die Sache sehr wohl treffen.

Ende der Perspectiv.

Anfangs-Gründe der Astronomie.

Der erste Theil, von der Betrachtung des Weltgebäudes, wie es in unsere Sinnen fällt.

Erklärung.

1.

Die Astronomie ist eine Wissenschaft von dem grossen Weltgebäude, und den darinnen sich ereignenden Veränderungen.

1 a) Sie lehrt, was bey den Gestirnen in Absicht auf ihre Bewegungen, Grössen und Entfernungen ausgemessen werden kann. Durch Geometrie, Mechanik und Analysis hat man es hierin zu einer sehr hohen Vollkommenheit gebracht, wenn wir gleich von der innern Natur der himmlischen Körper nur mangelhafte Kenntnisse haben. Ich führe hier nur einige von der grossen Menge astronomischer Schriften an, aus welchen man sich von dem Zustande der ganzen Wissenschaft unterrichten kann. Schriften über einzelne Gegenstände werden bey Gelegenheit in der Folge vorkommen. Claudii Ptolomaei *μεγαλη σύνταξις* cum commentationibus. Theonis alexandrini Basil. 1538. ist als die Quelle der ältesten Kenntnisse auch wegen astronomischer Beobachtungen wichtig. Eiusdem omnia quae exstant opera praeter Geographiam castigata ab Erasmo Schrekenfuchsio. Bas. 1551. Nic. Copernici de revolutionibus orbium coelestium libri VI. Basil. 1566. Dav. Gregorii Astronomiae Physicae et geometricae elementa.

Gene-

Genevae 1727. Caſſini Elemens d' Aſtronomie. Paris 1740. De la Caille leçons d' Aſtronomie à Paris 1746. Die vierte Ausgabe dieſes vortreflichen Lehrbuchs iſt 1780. erſchienen mit Anmerkungen vom Hrn. Lalande. Weidleri inſtitutiones Aſtron. Wittenbergae 1754. De la Lande Aſtronomie 4 Quartbände die neueſte Ausgabe 1792. Das vorzüglichſte Werk über die ganze Aſtronomie. Der Verf. hat einen Auszug daraus gemacht, wovon eine deutſche Ueberſetzung: Aſtronomiſches Handbuch des Hrn. de la Lande Leipzig 1775. erſchienen iſt. **Köhls** Einleitung in die aſtronomiſchen Wiſſenſchaften. Greifsw. 1768. 79. Zwey Theile. V. **Segners** aſtronomiſche Vorleſungen. Halle 1775. 76. 1 und 2. Theil. **J. E. Bode** Erläuterung der Sternkunde und der dazu gehörigen Wiſſenſchaften. Berlin 1778. **Röslers** Handbuch der Aſtronomie 2 Theile. Tübingen 1788. **Schmid** von den Weltkörpern zur gemeinnützigen Kenntniß der großen Werke Gottes, 3. Auflage Leipz. 1789. Sehr dienlich die erſten Begriffe der Aſtronomie zu geben. Dahin gehöret auch **Hellmuths** erſte Gründe der Sternwiſſenſchaft Braunſch. 1776. **Tuttenbergs** unterhaltende Betrachtung der Himmelskörper. Gött. 1782. V. **Fontenelle** über die Mehrheit der Welten nach Hrn. Bodens Ausgabe. **Fergusons** Aſtronomie und mehrere andere — Hrn. **Hofrath Käſtners Aſtronomiſche Abhandlungen** ſind ſehr wichtig für die praktiſche Sternkunde, und dienen zur weitern Ausführung der Aſtronomie, welche deſſen Anfangsgründen der angewandten Mathematik (neueſte Ausg. Göttingen 1792.) vorgetragen iſt.

Anmerkung.

2. Man theilet die Aſtronomie in zwey Theile. In dem erſten wird gezeiget, wie das Weltgebäude ſich unſeren Sinnen vorſtellet, wenn wir auf dem Erdboden ſtehen. In dem anderen Theile unterſuchet man die Natur und Eigenſchaften der Weltkörper, die wahre Beſchaffenheit des Weltbaues, und die wahren Geſetze der Bewegung. Der erſte Theil iſt bisher Sphaerica, der andere aber Theorica genennet worden.

Erfahrung.

3. Wenn ihr des Nachts den geſtirnten Himmel anſehet, ſo ſcheinen alle Sterne von euch in gleicher Weite weg zu ſeyn.

Anmer-

Anmerkung.

4. Hütet euch aber, daß ihr nicht schliesset, alle Sterne sind gleich weit weg. Denn ihr wisset, daß Sachen neben einander zu stehen scheinen, da die eine euch viel näher ist, als die andere (§. 55. Optik.)

Zusatz.

5. Derowegen siehet die Welt wie eine hohle Kugel aus, in deren Mittelpunkt ihr stehet, und in deren Fläche die Sterne als helle Punkte angeheftet sind (§. 178. Geom.).

Zusatz.

6. Weil ihr in dem ersten Theile der Astronomie nur zu wissen verlanget, was für Erscheinungen sich in dem Weltgebäude in Ansehung der Einwohner des Erdbodens ereignen (§. 2.), die Haupterscheinung aber diese ist, daß es euch wie eine Kugel vorkommt (§. 5.); so nehmet an, die Welt sey eine hohle Kugel, in deren Mittelpunkte ihr stehet, und forschet nach, was aus diesem Satze folge; so werdet ihr die Ursache der übrigen Erscheinungen wahrnehmen.

Zusatz.

7. Weil ihr in dem Mittelpunkte der Weltkugel stehet, so könnet ihr auch nur auf einmal einen Theil derselben sehen, der andere aber ist vor euren Augen verborgen.

Erfahrung.

8. Wenn ihr des Nachts auf die Sterne Acht gebet; so werdet ihr wahrnehmen, daß keiner seine Weite von dem andern, hingegen alle zusammen ihren Stand gegen die Erde ändern. Denn die bey eurem Scheitel standen, sind von ihm in einer Stunde weg, und andere, an ihrer Stelle, die vorhin nicht bey ihm waren. Einige sind gar verschwunden, und

hinge-

hingegen an einem andern Orr sehet ihr die Sterne, die vorher nicht da waren.

Zusatz.

9. Weil ihr immer auf einer Stelle des Erdbodens bleibet, so scheinet es, als wenn die ganze Weltkugel mit allen Sternen sich um die Erde herum bewegete.

Zusatz.

10. Da ihr euch nun in dem ersten Theile der Astronomie nur um Erscheinungen bekümmert (§. 2.); so könnet ihr abermals in demselben ohne Verletzung der Wahrheit annehmen, als wenn die Weltkugel sich mit allen Sternen um die Erde herum bewegete.

10a) Dies will nemlich so viel sagen, daß wir uns den Himmel als eine hohle Kugel gedenken, die sich um eine gewisse Axe drehet, ist nur Wahrheit der Erscheinung, und man ist nie in Gefahr zu irren, wenn man aus ihr nichts weiter schließt, als wie uns die Sachen aussehen, und von ihr abgeht, wo die Sachen nicht mehr so aussehen. (Kästners Anfangsgr. d. Astron. 27.) daß übrigens jeder Stern vom Aufgange bis zum Untergange wirklich einen Kreisbogen am Himmel zu beschreiben scheint, davon kann man sich durch leichte Erfahrungen, so genau als hier nöthig ist, versichern.

I. Es sey (Tab. V. Fig. 23.) O ein Punkt auf einer Horizontalfläche (unten §. 22a) z. E. O an dem Rande eines horizontal gestellten Tisches. In diesem Punkte O befinde sich eine Diopter mit einem Loche, wodurch man nach einem Sterne visire. Man ziehe auf dem Tische ein paar gerade Linien nach dem Sterne, in dem Augenblicke da er auf- und untergeht, Oa, Ob, und halbire den Winkel aOb, durch Oi. In einem Punkte i dieser Halbirungslinie errichte man lothrecht einen Stift iK von hinlänglicher Höhe, und bemerke an einem der folgenden Abende, wenn der Stern bey c hinter diesem lothrechten Stifte ik erscheinet, auf iK den Punkt c, und spanne in der Richtung Oc einen Drath oder Faden aus. Man nehme auf den Richtungen Oa, Oc, Ob, die Weiten OA, OC, OB, einander gleich, und biege einen Drath in einen Kreisbogen, so daß dieser durch die drey gegebenen Punkte A, C, B, gehen, so wird man finden, daß

wenn

wenn man das Auge hinter die Diopter O hält, und nach dem Sterne visiret, derselbe während seiner Bewegung von Osten nach Westen, immer hinter dem kreisförmig ausgespannten Drate ACB erscheinen wird.

II. Man könnte auch aus Pappendeckeln ein Kreissegment ACB dergestalt ausschneiden, und es über AB auf dem Tische befestigen, daß der Bogen ACB dieses Segments durch die drey Punkte A, C, B, gehe, so wird der Stern, wenn man hinter O visiret, immer dem Bogen ACB folgen.

III. Damit man diesen Bogen gehörig auf dem Pappendeckel beschreiben könne, so fasse man die Weiten AC, BC, AB, (I) mit einem Zirkel, und verzeichne auf dem Pappendeckel das Dreyeck ABC; so hat man die drey Punkte A, B, C, durch welche man nach (§. 97. Geom.) den gehörigen Bogen beschreiben kann.

IV. Man muß zu dieser Versinnlichung der täglichen Bewegung einen Stern der ersten Größe wählen, den die Dünste vom Horizonte nicht unkenntlich machen, auch schon vorläufig wissen, wenn der Stern aufgeht, damit man sich zur Beobachtung rüsten kann. Man kann indessen auch, ohne daß man sich der Linien Oa, Ob, nach dem Auf- und Untergange des Sterns bedient, die tägliche Bewegung nach dem gewiesenen Verfahren zeigen, wenn nur Oa, Ob, Oc, überhaupt drey hinlänglich von einander entfernte Richtungen nach dem Sterne sind, deren jede wie OC (I) durch Hülfe eines verticalen Stiftes gezogen worden seyn muß. Ja es ist auch nicht einmal nöthig, daß die Stiften genau vertical stehen. So bekömmt man immer drey Punkte wie A, B, C, durch welche sich der Kreisbogen beschreiben läßt.

V. Wegen der Brechung der Lichtstrahlen in unserem Luftkreise wird nun freylich der Stern nicht immer genau hinter dem Bogen ABC erscheinen, wenn man ihn auch mit der größten Genauigkeit gezogen hätte. Indessen ist doch das bisherige Verfahren zur Versinnlichung der täglichen Kreisbewegung immer zureichend. Ueberhaupt muß man sich im Anfange der Astronomie nur mit einer beyläufigen Bestimmung dieser oder jener Dinge begnügen, damit die Aufmerksamkeit nicht von dem Hauptgegenstande, nemlich erst eine Uebersicht des Ganzen zu erhalten, angezogen werde.

Erklä-

Erklärung.

11. Man machet Kugeln aus Kupfer, Messing oder Papier, darauf die Sterne in so proportionirter Weite von einander gezeichnet sind, wie sie an dem Himmel erscheinen, nebst einigen Circuln, die man sich auf der Fläche der Weltkugel einbildet, damit man alles dasjenige, was aus der Bewegung der gesammten Sterne erfolget, auf eine leichte Art denen zeigen kann, die entweder nicht nachdenken können, oder nicht wollen. Dergleichen Kugeln nennet man Himmelskugeln (Globos coeleſtes.).

11 a) Es würde etwas beschwerlich seyn, wenn man diejenigen Sterne und Kreise, welche auf die Kugel kommen sollen, auf ihr selbst verzeichnen wollte. Bequemer werden sie auf schmale Papierstreifen oder sogenannte **Segmente** gezeichnet, oder in Kupfer gestochen, so daß man mit den Abdrücken davon die Kugeln überziehen kann, und alle Sterne und Kreise die gehörigen Lagen erhalten. Vorschriften zur Entwerfung solcher **Kugelnetze** gehören aber nicht für Anfangsgründe. Wer Unterricht hierüber verlangt, der findet solchen in **Bions** mathematischer Werkschule, in Herrn Hofrath **Käſtners** Abhandlung de faſciis globis obducendis in den Comment. Soc. R. Goetting 1778. und in dem IVten Theile von **Mayers** practischer Geom.

In Nürnberg werden gegenwärtig dergleichen Kugeln in vorzüglicher Güte von den Herrn **Klinger** und **Beringer** verfertigt, und um die billigsten Preise geliefert.

Erklärung.

I. 1. 12. **Die beyden Punkte P und Q, an welchen sich die Weltkugel um die Erde herum zu bewegen scheinet, nennet man die Weltpole: und zwar insbesondere denjenigen, welcher in dem uns sichtbaren Theile des Himmels ist, P den** Nordpol (Polum Arcticum); **den ihm entgegengesetzten Q aber, den Südpol (Polum Antarcticum.)**

Erklä-

Erklärung.

13. Die Linie PQ, welche von einem Pole P bis zu dem andern Q gezogen wird, ist die Welttare (Axis mundi.) I. 1.

Erklärung.

14. Der Aequator AD ist ein Circul, welcher auf der beweglichen Fläche der Weltkugel in Gedanken beschrieben wird, und von jedem Pole P und Q überall 90 Grade entfernet ist. I. 1.

14a) Der Aequator ist ein größter Kreis auf der Kugel. Je näher ein Punkt einem der beyden Pole ist, um die sich die Kugel drehet, desto kleiner ist der Kreis, den er bey der Umdrehung der Kugel beschreibt, und die Pole selbst beschreiben gar keine Kreise.

Erklärung.

15. Das Zenith ist ein Punkt Z über eurem Scheitel in der unbeweglichen Fläche der Weltkugel; das Nadir aber der entgegengesetzte Punkt N unter den Füssen in eben dieser Fläche. I. 1.

15a) Man gedenke sich an dem Orte des Beobachters eine Verticallinie, d. h. die Richtung die ein Faden hat, an dem ein schwerer Körper ruhig hängt, und um diese Verticallinie auf- und niederwärts bis an die Himmelskugel verlängert, so bestimmt sie über den Beobachter an der Himmelskugel das Zenith Z und gegen über das Nadir N.

Zusatz.

16. Also hat ein jeder auf dem Erdboden sein besonderes Zenith und Nadir. Und wenn er seine Stelle ändert, so bekommet er ein anderes Zenith und Nadir.

Anmerkung.

17. Weil die Weltkugel in Ansehung der Erde sehr groß ist, so wird das Zenith nicht merklich verändert, wenn man gleich ein wenig seine Stelle ändert. Dannenhero giebt man einer ganzen, obgleich großen Stadt nur Ein Zenith.

Erklärung.

I. 18. Der Meridianus ist der Circul PZQNP,
1. welcher durch die Weltpole P und Q, und durch das Zenith und Nadir Z und N in der unbeweglichen Fläche der Weltkugel beschrieben wird.

Anmerkung.

19. Gleichwie man einer ganzen Stadt nur Ein Zenith zueignet; so eignet man ihr auch nur einen Meridianum zu. Bey den Himmelskugeln machet man den Meridianum entweder aus Messing oder aus Holz, theilet jeden Quadranten in 90 Grade ein, und hänget innerhalb demselben die Kugel beweglich auf in ihren Polen. Wenn man nun an das Mittel des Meridiani zwischen den Polen einen Stift hält, und die Kugel herumwendet: so beschreibet er darauf den Aequator (§. 14.). Daher unterscheidet man auch diesen Circul, wenn er beschrieben worden, von den übrigen, die auch darauf stehen, daß er, wenn die Kugel gewendet wird, beständig durch den neunzigsten Grad von dem Pole gehet.

Erklärung.

I. 20. Der wahre Horizont HR ist ein Circul in
1. der unbeweglichen Fläche der Weltkugel, welcher von dem Zenith in allen Punkten 90 Grad weg stehet.

Anmerkung.

21. Zu den Himmelskugeln wird der Horizont von Holze etwas breit gemacht und von dem Gestelle getragen. Man kann die Kugeln innerhalb demselben mit dem Meridiano nach Gefallen verschieben, und dadurch den Pol erhöhen und erniedrigen.

Erklärung.

I. 22. Der scheinbare Horizont hr ist ein Circul,
1. welcher den Theil der Himmelskugel hZr abschneidet, so auf der Erdfläche in M gesehen werden kann.

22a) Die **Horizontalfläche** eines Beobachters ist an der Stelle, wo er sich befindet, eine ebene Fläche, worauf die Richtung der Schwere (§. 15a) senkrecht stehen würde. Dergleichen ist z. E. die Oberfläche des Wassers in einem Gefäße, wenn das Wasser ruhig steht, oder auch die Oberfläche der Erde, so weit man sie an einem Orte ringsumher übersehen kann, und als ein kleines Stückchen einer vollkommen glatten Kugelfläche betrachten darf. Gedenkt man sich diese Horizontalfläche als eine ebene Fläche, ohne Ende hinaus bis an die Himmelskugel erweitert, so schneidet sie auf derselben eben den Kreis ab, welchen man den **scheinbaren Horizont**, oder den **Gesichtskreis** nennt, weil alles an der Himmelskugel, was über diesem Kreise liegt, von dem Beobachter gesehen werden kann; was aber unter demselben liegt, wegen der Undurchsichtigkeit der Erde dem Auge des Beobachters entzogen wird. Weil aber jeder Ort auf der Erde einen andern Horizont, folglich auch einen andern Gesichtskreis an der Himmelskugels hat, so können Gegenstände an dem Himmel unter dem Gesichtskreise eines gewissen Beobachters liegen, die in eben dem Augenblicke über dem Gesichtskreise eines andern Beobachters sich befinden.

22b) Es ist zu mehrerern Aufgaben in der Astronomie sehr wichtig, eine ebene Fläche horizontal stellen zu können. Man bedient sich dazu entweder der **Setzwaagen**, d. h. Vorrichtungen, wodurch man vermittelst der Richtung eines Fadens, woran ein Bleygewicht hängt, den horizontalen Stand untersucht, oder der **Wasserwaagen** d. h. cylindrischer mit Weingeist oder Wasser angefüllter Gefässe, welche mit einem ihrer Grundfläche parallelen Glasdecket versehen sind, unter dem die Oberfläche jener Flüßigkeiten in Gestalt einer kleinen Luftblase hin und herspielen, und dadurch den horizontalen Stand einer Fläche, worauf man das Gefäß setzt, anzeigen kann. (**Mayers** pract. Geom. §. 113.)

Erklärung.

23. Die Ebene des **Meridians oder Mittagskreises** PZQNP, (§. 18.) heißt die Mittagsfläche, und ihre Durchschnittslinie hr mit der scheinbaren Horizontalfläche des Orts M, die Mittagslinie. I. 1.

Erklärung.

24. **Wenn ein Stern in dem Horizont erscheinet, da er vorher unter ihm verborgen war, so gehet er auf. Hingegen wenn er in dem Horizont verschwindet, da er vorher über ihm gestanden, gehet er unter.**

Erklärung.

25. **Der Ort, wo die Sterne aufgehen, heisset** Morgen, **und insbesondere führet diesen Namen der Punkt des Horizonts, welcher von dem Meridiano** 90 Grad **weg ist. Der ihm entgegengesetzte Punkt in dem Theile des Horizonts, wo die Sterne untergehen, wird der Abend genennet. Wenn ihr den Morgen zur Rechten, und den Abend zur Linken habet, so zeiget die Mittagslinie vor euch den Punkt im Meridiano, den man** Mitternacht **heisset: hinter dem Rücken aber den Punkt im Meridiano, den man** Mittag **nennet. Alle zusammen bekommen den Namen der vier Hauptgegenden der Welt.**

Erklärung.

26. Die Tage-Circul (Circuli diurni) **sind Circul, welche die Sterne in ihrer Bewegung um die Erde in der unbeweglichen Fläche der Weltkugel beschreiben.**

26 a) Diese Tagekreise sind sämmtlich mit einander parallel, und heisen deswegen auch **Parallelkreise.** Sie werden von dem Mittagskreise halbirt, und wenn der Tagekreis eines Sterns den Horizont durchschneidet, so liegt die Mittagslinie zwischen den beyden geraden Linien, die man sich nach dem Auf- und Untergangspunkte des Sterns hingezogen vorstellet.

26 b) Gedenkt man sich den Tagekreis eines Sterns in seine 360 Grade eingetheilt, so sind diejenigen Punkte des Tagekreises, welche um gleich viel Grade nach Osten oder Westen

Westen zu von dem Mittagskreise wegliegen, auch gleich hoch über dem Horizonte erhaben; und umgekehrt, hat ein Stern nach seinem Durchgange durch den Meridian eben die Höhe über dem Horizonte, die er vor seinem Durchgange hatte, so wird er auch in beyden Fällen um gleich viel Grade seines Tagekreises vom Meridian abstehen.

26c) Auch lehrt die Erfahrung, daß die scheinbare Bewegung eines Sterns in seinem Tagekreise **gleichförmig** ist, d. h., daß gleiche Bogen in gleichen Zeiten beschrieben werden.

Erklärung.

26d) Die Zeit, in der sich die ganze Himmelskugel einmahl herumzudrehen scheint, und in der folglich jeder Stern seinen Tagekreis beschreibt, heist man einen **Sterntag**. Man theilt ihn in der Astronomie in 24 gleiche Theile, welche **Sternstunden** heisen. Jede Stunde wird wieder in 60 **Minuten** u. s. w. abgetheilt.

25e) In jeder Sternstunde beschreibt also ein Stern 15 Grade seines Parallels, und braucht also zu einem jeden einzeln Grade 4 Zeitminuten, zu einer jeden Minute seines Parallels, 4 Zeitsecunden u. s. w.

26f) Wenn ein Stern also z. E. 20 Grade ostwärts vom Meridian abstände, so würden 1 Stunde 20 Minuten verfließen, bis er in den Meridian käme, und nach Verfluß von noch 1 Stunde und 20 Min. würde er 20 Grade westwärts vom Meridiane abstehen.

26g) Die Zeit, wenn ein Stern in den Meridian kömmt, liegt demnach allemahl in der Mitte zwischen den beyden Zeiten, in welchen der Stern auf- und untergeht, oder auch gleiche Abstände von dem Meridian, folglich auch gleiche Höhen über dem Horizonte hat (§. 26b), vorausgesetzt, daß der Stern ausser seiner Bewegung, die er mit der scheinbaren Umdrehung der Himmelskugel gemein hat, nicht noch eine eigene Bewegung habe, wie z. E. Sonne, Mond, und die Planeten, in welchem Falle denn auch auf diese eigene Bewegung Rücksicht genommen werden muß. Hierauf gründet sich in der praktischen Astronomie das Verfahren, die Durchgangszeit eines Sterns oder auch der Sonne durch den Meridian, aus den Zeiten zu finden, in denen vor und nach dem Durchgange, der Stern oder die Sonne gleiche Höhe über dem Horizonte hatten, die Zeit des Mit-

tags aus correspondirenden Sonnenhöhen zu finden, oder anzugeben, was der Zeiger einer Uhr weiset, wenn die Sonne im Meridiane ist.

Erklärung.

26 h) Die Zeiten in der Astronomie anzugeben und abzutheilen, dienen diejenigen Maschinen, welche man **Uhren** heist. Sie müssen aus Rädern und Getrieben dergestalt zusammengesetzt seyn, daß sie ausser **Stunden** und **Minuten** auch **Secunden** angeben. Sie werden gewöhnlich durch Gewichte getrieben. Da aber Gewichte mit einer beschleunigten Bewegung fallen, wodurch der Gang des Räderwerks nicht gleichförmig erhalten werden kann, so müssen Vorrichtungen angebracht werden, welche den Gang der Räder und Getriebe dergestalt mäßigen, daß die Bewegung derselben beständig gleichförmig bleibt. Hierzu dient das sogenannte **Perpendikel**, welches hin und her schwingt, und der mit ihm verbundene **englische Haaken**, der bey jedem Schwunge des Perpendikels in das sogenannte **Steigrad** einfällt, und dadurch das Räderwerk verhindert, der beschleunigenden Bewegung der Gewichte zu folgen. Man nennt solche Uhren **Perpendikeluhren**, und hat sie in neuern Zeiten auf einen sehr hohen Grad der Vollkommenheit gebracht, nachdem man auch Mittel gefunden hat, die Perpendikel so einzurichten, daß ihr Schwung keinen Veränderungen der Wärme und Kälte unterworfen ist. Aber sowohl dieses als die innere Einrichtung der Uhr selbst, muß aus besondern Schriften, z. E. aus Paute Traité de l'horlogerie 1755, aus Berthoud essai sur l'horlogerie Paris 1763, aus **Alexanders** Abhandlung von den Uhren. Lemgo 1763. und **Geislers** Uhrmacherkunst 3 Theile 1794. erlernt werden. Gegenwärtig werden auch Uhren in sehr großer Vollkommenheit verfertigt, welche blos durch Federn getrieben werden, wie die gewöhnlichen Taschenuhren, aber Einrichtungen haben, daß ihr Gang mehrere Monate hindurch ungeändert bleibt. Hieher gehören **Harrisons** Seeuhren, und die **Taschenchronometer**, welche **Mudge**, **Emery**, u. a. vorzüglich zum Gebrauche auf der See, wo Perpendikeluhren, wegen der Schwankung des Schiffs nicht gebraucht werden können, gegenwärtig verfertigen. Auch dienen sie vortheilhaft bey geographischen Reisen zu Lande, die Längen der Oerter zu bestimmen u. s. w.

Eine

Eine Uhr, welche Theile des Sterntages (§. 26 d) angiebt, wird eine **Sternuhr** genannt. Man muß dem Perpendikel derselben diejenige Länge geben, daß es in einem Sterntage genau 24. 60. 60. oder 86400 Schwingungen macht, da denn auf jeden Schwung eine Secunde Sternzeit kommen wird. Da es aber etwas schwer hält, dem Perpendikel genau diese Länge zu geben, so begnügt man sich, wenn die Uhr nur beynahe Sternzeittheile angiebt, ihr Gang aber sonst gleichförmig ist. Wenn man dann nur weiß, um wie viel 24 Stunden der Uhr von 24 wahren Sternstunden unterschieden sind, so finden sich leicht Vorschriften, Zeittheile der Uhr, oder **Uhrzeit**, auf Sternzeittheile, oder **Sternzeit** zu reduciren. Hieher gehörige Formeln in Hrn. Hofr. **Kästners** Anfangsgründen der Astronomie, u. a. astronomischen Schriften.

Aufgabe.

27. Die Mittagslinie zu finden.

Auflösung.

1. Beschreibet auf einer Horizontalfläche aus einem Punkte C etliche Circul. I. 2.
2. Richtet in C einen Stift winkelrecht auf, in der Grösse eines halben, oder auch ganzen Schuhes.
3. Vormittags von 9 bis 11 Uhr, und Nachmittags von 1 bis 3 Uhr gebet Acht, in welchen Punkten vor und nach Mittage eines jeden Circuls der Schatten des Stiftes aufhöret, und merket die Punkte H und I, E und G, D und E.
4. Theilet die Bogen DE, EG, HI in zwey gleiche Theile in L, K und B (§. 94. Geom.) und
5. ziehet durch den Mittelpunkt C und die Punkte L, K und B eine gerade Linie.

Wenn dieses angehet, so habt ihr die verlangte Mittagslinie.

Beweis.

Weil der Stift im Mittelpunkte C stehet; so sind die Schatten von Einer Länge, welche sich in der Peri-

pherie eines Circuls endigen (§. 27. Geom.) und dannenhero stehet die Sonne in beyden Fällen gleich hoch, folgends stehet die Sonne gleich weit von dem Meridiano weg. Nun fället der Schatten jederzeit dem Ort der Sonne gegenüber (§. 24. Optik); darum sind die Punkte D und E, imgleichen E und G, H und I von der Mittagslinie AB gleich weit entfernet. W. Z. E.

27a) Wegen der eigenen Bewegung der Sonne (§. 26g) erfordert dieses Verfahren eine kleine Verbesserung, welche aber beynahe verschwindet, wenn man den längsten oder kürzesten Tag, oder die benachbarten, dazu wählt.

Anmerkung.

28. Es wäre zwar an einem Circul genug. Allein wenn ihr viel Circul beschreibet, so könnet ihr desto mehr gewiß seyn, daß ihr recht observiret, wenn die Linie durch alle Theilungs-Punkte und den Mittelpunkt der Circul gehet. Weil man aber das Ende des Schattens nicht wohl wahrnehmen kann, und doch die Mittagslinie der Grund zu den meisten astronomischen Observationen ist; so pfleget man sie noch auf andere Weise zu finden.

28a) Von solchen Methoden, die Mittagslinie zu ziehen, findet man umständliche Belehrung in Röslers Handbuch der praktischen Astronomie 1. Theil VII. Kapitel.

Zusatz.

29. Wenn ihr mit einer Perpendicularlinie die Mittagslinie durchschneidet (§. 70. Geom.), so zeiget dieselbe Morgen und Abend (§. 25.)

Anmerkung.

30. Wenn der Schatten die Mittagslinie decket, und ihr habet an andern Orten Stifte eingeschlagen, so dürfet ihr nur in ihrem Schatten zwey Punkte merken, und ihr könnet durch dieselben auch die Mittagslinie ziehen.

Zusatz.

31. So oft der Schatten des Stifts auf die Mittagslinie fället, ist Mittag (§. 34. Optik).

Anmer-

Anmerkung.

32. Daher brauchet man die Mittagslinie, die Uhren zu stellen, damit sie mit dem Laufe der Sonne übereinkommen.

32a) Man pflegt auf Sternwarten über der Mittagslinie eine Mauer lothrecht aufzurichten, und an dieser einen großen Quadranten, d. h. einen in seine 90 Grade eingetheilten Vierthelskreis, oder auch wohl einen ganzen Kreis zu befestigen, um dessen Mittelpunkt sich ein Fernrohr dergestalt auf- und nieder drehen läßt, daß die Axe desselben beständig mit der Mauer, und also mit der Mittagsfläche gleichlaufend bleibe. Man nennt solche Vorrichtungen **Mauerquadranten**, und sie dienen sowohl zur Messung der Sonnenhöhe, wenn sie im Meridiane ist, als auch zur Beobachtung der Mittagszeit selbst.

Läßt man den Quadranten weg, und gedenkt sich nur ein in der Mittagsfläche auf- und nieder bewegliches Fernrohr, so hat man das sogenannte **Mittagsfernrohr** oder **Passageinstrument**, von ebenfalls häufigem Gebrauche. Von vorzüglicher Güte sind diejenigen Mauerquadranten, welche der berühmte englische Künstler **Bird** verfertigt hat. Die Beschreibung davon s. m. in de la Lande Astron. §. 2328.

32b) Ein hoher lothrechter Stift über der Mittagslinie, durch dessen Schatten man den Augenblick des Mittags angeben kann, heist auch ein **Gnomon**. Hat man in einem Saale oder Zimmer eine Mittagslinie gezogen, so kann man den Augenblick des Mittags auch angeben, wenn ein Sonnenstrahl durch eine kleine Oeffnung, lothrecht über der Mittagslinie, in das Zimmer auf die gezogene Mittagslinie fallen kann. Da aber die durch die Oeffnung einfallenden Sonnenstrahlen auf dem Boden des Zimmers, wo die Mittagslinie gezogen ist, eigentlich ein kleines ovales Sonnenbild formiren, so beobachtet man, um den wahren Augenblick des Mittags zu erhalten, an der Uhr die Zeiten, wenn der vordere und hintere Rand dieses Bildes die Mittagslinie berühren, und nimmt zwischen beyden Zeiten das arithmetische Mittel.

Zusatz.

33. Wenn der Schatten der Sonne auf die Linie fället, die Abend und Morgen zeiget, so gehet sie recht im Morgen auf.

Zusatz.

34. Der Schatten des Stiftes auf der Mittagslinie bleibet nicht beständig von einer Länge, sondern eine Weile nimmt er zu, darnach wieder ab. Derowegen stehet die Sonne nicht alle Mittage gleich hoch über dem Horizont (§. 39. Opt.), welches ihr auch an der Sonne selbst mit bloßen Augen wahrnehmen könnet.

Zusatz.

35. Wenn also die Sonne sich würklich alle Tage um die Erde bewegen sollte, so beschriebe sie nicht wie die andern Sterne ihre Tagecircul mit dem Aequator parallel, sondern müßte sich in Schraubengängen um die Erde bewegen.

Anmerkung.

36. Eben dergleichen nehmet ihr von dem Monde wahr, als von der Sonne (§. 34.) angemerket worden. Derowegen müßte auch dieser sich in Schraubengängen um die Erde bewegen, wenn er würklich alle Tage um sie herumgienge.

Erklärungen.

36 a) I. Wenn man vermittelst einer sehr gleichförmig gehenden Uhr den Augenblick des **Mittags**, d. h. wenn der Mittelpunkt der Sonne in dem Meridiane ist (§. 32. u. f.) beobachtet, und nun eben diese Beobachtung die folgenden Tage wieder anstellt, so wird man finden, daß jedes Zeitinterval von einem Mittage zum andern, oder der **wahre Sonnentag** nicht das ganze Jahr hiudurch von gleicher Grösse ist.

II. Dieser wahre Sonnentag ist allemahl länger als der Sterntag, weil die Sonne eine eigene scheinbare Bewegung von Westen nach Osten hat; die ungleiche Grösse der wahren Sonnentage rührt daher, weil jene eigene scheinbare Bewegung nicht gleichförmig und gleichlaufend mit der täglichen Umdrehung der Himmelskugel ist.

III. Der **mittlere Unterschied** zwischen einem wahren Sonnentage und Sterntage beträgt 3 Minuten 56 Secunden, und 32 Terzien Sternzeit.

IV. Zu manchen Zeiten des Jahres ist dieser Unterschied etwas grösser, zu andern etwas kleiner.

V. Es

V. Gedenkt man sich nun eine Uhr, deren 24 Stunden so viel betragen, als 24 Stunden 3 Min. 56 Sec. 32 T. an der Sternuhr, so sagt man von jener Uhr, daß sie **mittlere Sonnenzeit** weise, und ihre 24 Stunden heissen dann **ein mittlerer Sonnentag**, so wie die Stunden, Minuten ꝛc. derselben **mittlere Sonnenstunden, mittlere Sonnenminuten** ꝛc.

VI. Hieraus lassen sich sehr leicht Vorschriften herleiten, Zeittheile des mittlern Sonnentages auf Zeittheile des Sterntages, und umgekehrt, zu reduciren. Formeln dazu in **Käſtners** astron. Abhandl. I. Samml. III. Abh. 58. u. f.

VII. Wegen der ungleichen Grösse der wahren Sonnentage kann keine Uhr so eingerichtet werden, daß sie das ganze Jahr hindurch von einem wahren Mittage zum andern allemahl 24 Stunden wiese. Aber wenn sie mittlere Sonnenzeit weiset, so werden 24 Stunden derselben, nie viel von einem wahren Sonnentage abweichen.

VIII. Indessen gedenkt man sich doch jeden wahren Sonnentag, d. h. die Zeit zwischen zween nächsten Durchgängen der Sonne durch den Meridian in 24 gleiche Theile, oder **wahre Sonnenstunden** getheilt. Weiß man nun um wie viel zu einer gewissen Jahreszeit der wahre Sonnentag von dem mittlern unterschieden ist, so kann man Theile des wahren Sonnentages in Theile des mittlern, oder **wahre Sonnenzeit in mittlere** und umgekehrt verwandeln.

IX. Den Unterschied zwischen dem wahren und mittlern Sonnentage, heist man die **Zeitgleichung**. Man findet sie für jeden Tag in den astronomischen Kalendern angegeben, und man muß sie wissen, wenn man die **wahre Zeit** einer Beobachtung berechnen will, wozu ebenfalls in den astronomischen Kalendern die Anweisung zu finden ist. Den 11ten Febr. 14. May, 26. Jul. und 1. November ist die Zeitgleichung ohngefähr $= 0$, also der wahre Sonnentag dem mittlern gleich. Am grösten ist sie ohngefähr den 21. Dec. wo sie jedoch nicht viel über 30 Sec. betragen wird.

Erfahrung.

37. **Wenn ihr des Nachts Acht gebet, bey welchen Sternen der Mond stehet, und sehet die folgende Nacht wieder nach, so werdet ihr ihn nicht mehr bey den gestrigen Sternen, son-**

dern

dern bey andern stehen sehen, die in der vorhergehenden Nacht weiter von ihm gegen Morgen standen, und nach ohngefähr 27 Tagen werdet ihr ihn abermals bey den ersten Sternen antreffen.

Zusatz.

38. Demnach scheinet der Mond innerhalb 27 Tagen um den ganzen Himmel herumzulaufen.

Zusatz.

39. Daher geschiehet es auch, daß er bald mit der Sonne auf- und untergehet, bald wieder aufgehet, wenn sie untergehet, und untergehet, wenn sie aufgehet.

Erfahrung.

40. Gebet Acht auf die Sterne, welche in dem Horizont gegen Abend stehen, wenn die Sonne erst untergegangen, und gegen Morgen, kurz vor ihrem Aufgange. Wenn ihr diese Betrachtung des Himmels eine Zeitlang fortsetzet, so werdet ihr wahrnehmen, daß nach einiger Zeit die Sterne nach dem Untergange der Sonne an dem Abendhorizont stehen, die vorher weiter gegen Morgen standen; hingegen vor der Sonnen Aufgang um den Morgenhorizont Sterne sind, die man vorher nicht sehen konnte. Nach Verlauf eines Jahres werdet ihr an dem Abend- und Morgenhorizont wieder die vorigen Sterne antreffen.

Zusatz.

41. Also scheinet sich auch die Sonne von Abend gegen Morgen innerhalb einem Jahre um die Erde zu bewegen.

Erfahrung.

42. Ausser der Sonne und dem Monde werdet ihr auch noch fünf Sterne antreffen, wel-

welche nicht immer bey einerley Sternen stehen bleiben, sondern nach einiger Zeit bey Sternen gesehen werdtn, die vorhin weit von ihnen gegen Morgen standen. Sie heissen Saturnus, Jupiter, Mars, Venus und Mercurius; und werden mit folgenden Zeichen geschrieben: ♄ ♃ ♂ ♀ ☿; der Mond und die Sonne aber ☾ ☉. Saturnus kommt beynahe in 30; Jupiter in 12; Mars in 2 Jahren; Venus und Mercurius mit der Sonne in einem Jahre um den Himmel herum.

42a) Ausser diesen 5 sogenannten **Planeten** findet sich an dem Himmel noch ein sechster, nemlich **Uranus**, welcher ohngefähr in 83 Jahren seinen Umlauf vollendet. Die wichtige Entdeckung dieses Planeten machte Hr. **Friedr. Wilhelm Herschel** (geb. zu Hannover 1738. und im Jahre 1781. Musikdirektor zu Bath in Engeland) den 13. März 1781. des Abends vermittelst eines von ihm selbst verfertigten sehr großen und vortreflichen Spiegeltelescopes, welches er bey einer gewissen Beobachtung gerade nach der Gegend des Himmels gerichtet hatte, wo sich damals dieser Planet befand. Es war dies zwischen den Hörnern des Stieres und den Füssen der Zwillinge. Hr. H. war wenigstens der erste, welcher diesen Stern für einen Planeten erkannte, indem Hr. Bode in Berlin gezeigt hat, daß ihn nicht allein schon **Tobias Mayer** in Göttingen um das Jahr 1756, sondern sogar schon **Flamsteed** in Engeland im J. 1690. beobachtet, daß aber beyde Astronomen diesen Stern blos als einen Fixstern in ihre Sternverzeichnisse eingetragen hatten. Hr. Herschel nannte ihn anfänglich georgium Sidus, nachher **Georgsplaneten**. Der von Hrn. **Bode** vorgeschlagene Nahme **Uranus** ist jetzt der gebräuchlichste. Die Franzosen nennen diesen Planeten nach dem Nahmen seines Entdeckers, **Herschel**. Er erscheint ohngefähr als ein Stern der sechsten Grösse, kaum dem bloßen Auge sichtbar. Selbst durch ziemlich starke Fernröhre, hält man ihn für einen Fixstern, welches ausserdem, daß man ihn nicht öfter beobachtet, und daher sein Fortrücken bemerkt hat, mit die Ursache ist, daß man ihn nicht schon eher für einen Planeten erkannte. In Deutschland hat ihn Hr. Bode zuerst wahrgenommen

men den 1. Aug. 1781, und das Zeichen der Platina ♁ für ihn eingeführt. Eine vollständige Geschichte dieser Entdeckung, nebst dem, was weitere Beobachtungen ergeben haben, findet man in Hrn. Bodens Schrift von dem neu entdeckten Planeten. Berlin 1784. und Hrn. Wurms Geschichte des neuen Planeten Uranus sammt Tafeln für dessen heliocentrischen und geocentrischen Ort herausgegeben und berechnet. Gotha 1791. Was sonst noch in Absicht auf diesen Planeten merkwürdig ist, wird in der Folge vorkommen.

Erklärung.

43. **Die Bewegung, welche von Morgen gegen Abend innerhalb 24 Stunden um die Erde zu geschehen scheinet, nennet man die gemeine Bewegung; die andere aber, welche von Abend gegen Morgen in verschiedener Zeit um den Himmel herum zu geschehen scheinet, heisset die eigene Bewegung.**

Zusatz.

44. **Weil die gemeine Bewegung von Morgen gegen Abend, und die eigene von Abend gegen Morgen geschiehet; so können unmöglich beyde zugleich wirklich geschehen.**

Erklärung.

45. **Der Weg, welchen die Sonne in ihrer eigenen Bewegung durchzulaufen scheinet, wird die Ecliptik genennet. Da nun die Sonne des Jahres zweymal in den Aequator kommt, die übrige Zeit aber entweder über den Aequator in die Höhe, oder wieder unter den Aequator niedersteiget, und beynahe eben so lange über ihm, als unter ihm sich aufhält; so bildet man sich die Ecliptik als einen Circul in der unbeweglichen Fläche der Weltkugel ein, welcher den Aequator in zwey Punkten durchschneidet, und zwar in zwey halbe Circul theilet.**

Anmer-

Anmerkung.

46. Es wird zwar die Ecliptik wie alle andere Circul in 360 Grade getheilet: doch mit diesem Unterschiede, daß man die Grade nicht in einem fortzählet, wie sonst gewöhnlich. Denn man theilet die Ecliptik in zwölf Theile ein, welche man die **zwölf himmlischen Zeichen** zu nennen pfleget. Und zwar führet jedes Zeichen einen besonderen Nahmen von dem Gestirne, welches vor Zeiten ihm nahe war. Sie heissen nemlich: **Widder, Stier, Zwillinge, Krebs, Löwe, Jungfrau, Wage, Scorpion, Schütze, Steinbock, Wassermann, Fische,** welche Namen man in folgende Verse gebracht, um sie leichter zu behalten.

Sunt Aries, Taurus, Gemini, Cancer, Leo, Virgo,
Libraque, Scorpius, Arcitenens, Caper, Amphora, Pisces.

Man schreibet sie auch auf besondere Art, nemlich:

♈ ♉ ♊ ♋ ♌ ♍ ♎ ♏ ♐ ♑ ♒ ♓.

Jedes Zeichen hat dreyßig Grade.

Erklärung.

47. Die Sterne, welche immer Eine Weite von einander behalten, heissen die Fixsterne: die übrigen aber, welche bald bey diesem, bald bey jenem gesehen werden, die Planeten (§. 42.)

Erklärung.

48. Weil man wahrgenommen, daß die Planeten sich nicht in der Ecliptik bewegen, sondern nur zuweilen einmal hineinkommen, gleichwie die Sonne in den Aequator, sonst aber bald über die Ecliptik weiter herauf gegen den Nordpol, bald unter die Ecliptik weiter hernieder gegen den Südpol steigen; so hat man beyderseits in der Weite von 10 Graden zwey Circul mit der Ecliptik parallel gezogen, welche den Raum einschließen, in welchem die

Pla-

Planeten sich beständig befinden. Diesen Streifen um die Weltkugel nennet man den Thierkreis (Zodiacum) und theilet ihn, wie die Ecliptik, in 12 himmlische Zeichen.

Erklärung.

I. 1. 49. Durch den Anfang des Krebses L und den Anfang des Steinbockes O werden auf der unbeweglichen Fläche der Weltkugel mit dem Aequator AD zwey Circul LI und KO parallel gezogen, welche man die Wendekreise (Tropicos) nennet, und zwar LI den Tropicum cancri, KO den Tropicum capricorni.

Zusatz.

50. Es sind also die Tropici Tagecircul, welche die Sonne um die Erde zu beschreiben scheinet, wenn sie in den Krebs und Steinbock tritt (§. 26.).

Anmerkung.

51. Diese Circul sollten von rechtswegen nicht auf die bewegliche Fläche der Himmelskugel gezeichnet werden. Weil sie aber auf den Erdkugeln nothwendig seyn müssen; so hat man sie auch bloß zu dem Ende auf die Himmelskugel gebracht, damit man sie desto besser gegen die Erdkugel halten kann, welches auch von der Ecliptik zu merken.

Erklärung.

52. Die Tagecircul, welche die Pole der Ecliptik um die Weltpole in der unbeweglichen Fläche der Weltkugel beschreiben, heissen die Polarcircul, und zwar der um den Nordpol beschrieben wird, der arctische Polarcircul; der aber um den Süderpol beschrieben wird, der antarctische Polarcircul.

Anmerkung.

53. Was von den Tropicis erinnert worden (§. 51.) das gilt auch von den Polarcirculn.

Erklä-

Erklärung.

54. Ein Verticalcircul ist, welcher durch das Zenith Z und Nadir N um die Weltkugel beschrieben wird. I. 3.

Erklärung.

55. Die Höhe eines Sterns ist der Bogen des Verticalcirculs TS, welcher zwischen dem Sterne T und dem Horizonte HR enthalten ist. I. 3.

Zusatz.

56. Derowegen ist die Mittagshöhe eines Sterns der Bogen des Meridians, welcher zwischen dem Mittelpunkte des Sternes M und dem Horizonte HR enthalten ist, in dem Augenblicke da der Stern in in dem Meridiane selbst ist. I. I.

Erfahrung.

57. Wenn ihr die Sonne recht im Morgen aufgehen sehet (§. 33.), und nach einer guten Uhr die Zeit merket, welche von ihrem Aufgange bis zu ihrem Untergange vorbey streichet: so werdet ihr inne werden, daß sie völlig 12 Stunden über dem Horizonte gewesen. Ihr werdet gleichergestalt befinden, daß die Sterne, welche im Aequator sind, 12 Stunden über dem Horizont bleiben.

Zusatz.

58. Derowegen kommen in Ansehung der Fixsterne und der Sonne der scheinbare Horizont hr und der wahre HR mit einander überein; folgends ist der halbe Diameter der Erde TM, ja der ganze Diameter, und also die ganze Erde in Ansehung der Weite der Sonne und der Fixsterne für einen Punkt zu halten. I. I.

Zusatz.

I. 1. 59. Wenn ihr demnach die Sonne und die Fixsterne, folgends auch die Planeten, so nicht näher als die Sonne stehen, von der Fläche der Erdkugel ansehet, so ist es eben so viel, als wenn ihr sie aus dem Mittelpunkte T sehen solltet.

59a) Dies erhellet auch daraus, weil wenigstens Sonne und Fixsterne sich in demselben Augenblicke allen Bewohnern der Erde in einerley Lagen gegen einander zeigen. Drey Fixsterne z. E. die in einer geraden Linie, oder in den Winkelpunkten eines gleichseitigen Dreyecks zu stehen scheinen, stellen sich in eben dieser Lage dar, von welchem Standpunkte auf der Oberfläche der Erde man sie auch betrachtet. Daher muß in Vergleichung mit ihrer Weite von uns, die Grösse der Erde für nichts zu achten seyn, und wo wir uns auch auf der Erde befinden, sind wir gleichsam in dem Mittelpunkte der Fixsternkugel.

Aufgabe.

60. Die Höhe eines Sternes zu messen.

Auflösung.

I. 4. 1. Richtet den Quadranten QCN dergestalt, daß die Linie CN horizontal stehet.

2. Verschiebet ihn hin und her, und erhöhet die an seinem Mittelpunkte C befestigte Regel CM so lange, bis ihr durch die an ihr befestigten Dioptern den Stern A erblicket.

Ich sage, der Bogen NM zeiget die Höhe des Sternes.

Beweis.

Wenn der Mittelpunkt des Quadrantens C im Mittelpunkte der Erde T stünde, so hätte der Bogen AR so viel Grade als der Bogen NM (§. 28 Geom.). Nun ist es aber in Ansehung der Sonne und Fixsterne gleichviel, ob ihr auf der Fläche der Erde in C, oder in ihrem

Mit-

Mittelpunkte T stehet (§. 59.). Derowegen muß auch in diesem Falle der Bogen AR so viel Grade haben, als der Bogen NM. Der Bogen AR aber ist die Höhe des Sternes (§. 55.). Also wisset ihr, wie viel Grade der Stern über den Horizont erhaben ist. W. Z. E.

Zusatz.

61. Wenn ihr die Mittagshöhe eines Sternes verlanget, müsset ihr den Quadranten QCN auf der Mittagslinie perpendicular aufrichten: so stehet er im Meridiano.

61 a) Man vergleiche hiemit §. 32 a).

Lehrsatz.

62. **Die Höhe des Aequators AR machet mit der Polhöhe PH 90 Grad.** I. 1.

Beweis.

Denn HZR hält 180 Gr. (§. 20.) und PA = 90 Gr. (§. 14.) Derowegen ist HZR — PA = HP + AR = 90 Gr. W. Z. E.

Aufgabe.

63. **Die Polhöhe an einem Orte zu finden.**

Auflösung.

1. Wenn des Winters die Nacht länger als 12 Stunden ist, und also der Polarstern zweymal in dem Meridiano gesehen werden kann, nemlich einmal über dem Pole in H, das anderemal unter demselben in K (§. 9. 12.), messet (§. 60.) so wohl die grosse Höhe IH als die kleine IK. I. 4.
2. Ziehet diese von jener ab, und
3. was übrig bleibet, HK, dividiret durch 2; so kommet die Weite des Polarsternes von dem Pole PK heraus.
4. Diese addiret zu der kleinen Höhe des Polarsternes KI.

Die Summe PI ist die verlangte Polhöhe. Z. E. es hat Couplet der jüngere zu Lissabon 1697 gegen das Ende des Decembers observiret

HI =	41°	5′	40″
KI =	36	28	0
HK =	4	37	40
PK =	2	18	50
KI =	36	28	0
Polhöhe zu Lissabon. PI =	38	46	50

63 a) Man braucht zu dieser Aufgabe nicht gerade den **Polarstern**, (m. s. unten §. 91.) sondern überhaupt nur einen Stern zu nehmen, der nicht untergeht. Uebrigens müssen die beobachteten Höhen des Sterns allemahl erst durch die Refraction verbessert werden, ehe man sie braucht, um daraus die Polhöhe zu finden. (Von der Refraction s. unten §. 129. u. f.) Andere Verbesserungen, auf die man auch noch Rücksicht nehmen muß, wenn die Polhöhe in der größten Schärfe erhalten werden soll, gehören nicht für die ersten Anfangsgründe.

Zusatz.

64. Wenn ihr die Polhöhe von 90 Gr. abziehet, bleibet die Höhe des Aequators übrig (§. 62.)

	89°	59′	60″
Polhöhe PI =	38	46	50 (§. 63.).
Höhe d. Aeq. =	51	13	10

Aufgabe.

65. Einen Stern im Meridiano zu observiren.

Auflösung.

I. 1. Richtet auf der Mittagslinie BC aus einem Punk-
5. te A einen Faden perpendicular auf, und aus D ziehet einen andern Faden DE bis an die Mittagslinie, so ist der Triangel ADE im Meridiano.

2. Hal-

2. Haltet hinter ihm das Auge, daß der Faden DE den andern AD decket, so ist es gleichfalls im Meridiano.

Derowegen, sobald die Fäden den Stern eurem Auge verdecken, nehmet ihr wahr, daß der Stern in den Meridianum kommet, welches man verlangete.

65 a) Man vergleiche hiermit §. 32 a).

Erklärung.

66. **Der Bogen A ⊙ des durch die Pole und den Stern beschriebenen Circuls ANHZ, welcher zwischen dem Punkte des Aequators A und dem Sterne ⊙ enthalten ist, heisset die Declination des Sternes.** I. 3

Aufgabe.

67. **Die Declination eines Sternes zu finden.**

Auflösung.

1. Messet die Mittagshöhe eines Sternes ⊙R oder MR (§. 61.). I. 3.
2. Suchet zwischen ihr und der Höhe des Aequators AR (§. 64.) durch die Subtraction der kleineren von der grösseren den Unterscheid A⊙, oder AM; dieser ist die verlangte Declination.

Z. E. Tycho hat zu Uranienburg die Höhe des Schwanzes im Löwen observiret.

	50°	59′	0″
die Höhe des Aequat.	34	5	20
Declinat. d. Sternes	16	53	40

Auf der Himmelskugel führet man den Stern unter den Meridianum, und zählet daran die Grade von dem Aequator bis zu dem Sterne.

67 a) I. Wenn der Stern nordwärts des Aequators stehet, so heist die Declination nördlich, im entgegengesetzten

ten Falle südlich. Uebrigens nennt man den Declinationskreis auch den Stundencircul, weil er sich mit dem Sterne zugleich, innerhalb einer ganzen Umdrehung der Himmelskugel, d. h. in einem Sterntage, oder 24 Sternstunden, herumbewegt, und man aus dem Bogen des Aequators welcher zwischen dem Stundencircul und dem Mittagskreise enthalten ist, finden kann, wie viel Stunden und Minuten Sternzeit von einem gegebenen Augenblicke an, verfließen werden, bis der Stern in den Meridian kömmt, oder wenn er in dem Meridiane gewesen ist, wie viel Stunden ꝛc. verfließen, bis er einen gegebenen Abstand von dem Meridiane erhält.

II. Da nemlich innerhalb 24 Sternstunden sich 360 Grade des Aequators durch den Meridian bewegen, so bewegen sich in 1 Stunde 15 Grade des Aequators (oder auch des Tagekreises eines Sterns) durch den Meridian, folglich gehen in 1 Zeitminute 15 Bogenminuten, und in einer Zeitsecunde 15 Bogensecunden des Aequators durch den Meridian.

Gesetzt also in einem gewissen Augenblicke vor dem Durchgange eines Stern durch den Meridian, stehe der Stundenkreis des Sterns um 15 Grade des Aequators vom Meridiane ab, so wird 1 Stunde Zeit verfließen, bis (von jenem Augenblicke an) der Stern in den Meridian kommen wird, und nach Verfluß von abermahls einer Stunde Zeit, wieder 15 Grade westwärts vom Meridiane abstehen, und so kann man für jeden andern Abstand des Stundenkreises vom Meridian, oder für jeden **Stundenwinkel**, die zugehörige **Zeit** berechnen.

Hiezu sind **Tafeln für die Verwandlung von Bogen des Aequators in Zeit**, und umgekehrt, **von Zeit in Bogen des Aequators**, sehr nützlich. Man findet dergleichen in den astronomischen Kalendern. Z. E. in dem Berliner astron. Jahrbuche für das J. 1776. S. 102. I. und II. Tafel.

Man kann durch Hülfe dieser Tafeln auch berechnen, um wie viel Zeit ein Stern eher in den Meridian kömmt, als ein anderer. Man darf nur den Bogen des Aequators, der zwischen den beyden Stundekreisen der Sterne enthalten ist, in Zeit verwandeln.

Hieraus folgt denn auch, daß wenn man die Zeit an einer Uhr beobachtet, wenn ein Stern sich in dem Meridiane befin-

befindet, man auch den Augenblick berechnen kann, wenn jeder andere Stern, dessen Abweichungskreis gegeben ist, in den Meridian kommen wird.

Zusatz.

68. Wenn ihr die Observationen der alten Astronomen mit den neuern vergleichet, so werdet ihr finden, daß die Declinationen der Fixsterne veränderlich sind.

Zusatz.

69. Wenn euch die Declination eines Sternes bekannt ist, und ihr seine Mittagshöhe observiret (§. 61.), so könnet ihr daraus die Höhe des Aequators (§. 67.), und folgends die Polhöhe (§. 62.) finden.

Aufgabe.

70. Die größte Declination der Ecliptik zu finden.

Auflösung.

1. Wenn die Sonne in den Krebs treten soll, so observiret etliche Tage nach einander ihre Mittagshöhen.
2. Von der größten ziehet die Höhe des Aequators ab, so bleibet (§. 60.) die größte Declination der Ecliptik, oder der Winkel, den sie mit dem Aequator machet, und der die Schiefe der Ecliptik genennet wird, übrig.

Z. E. Ricciolus hat 1646. die Mittagshöhen der Sonne observiret

d. 20. Jun.	68°	59′	45″
21. —	69	0	0
22. —	68	59	45
Also war die größte Mittagshöhe			69°
	69°	0′	0″
die Höhe des Aequat.	45	31	30
größte Declin. d. Sonne	23	29	30

Anmerkung.

71. Die heutigen Astronomen machen sie nur 23° 29′. Insgemein nimmt man 23° 30′ an. Derowegen, wenn man von dem Weltpole im Meridiano, darein die Himmelskugel hänget 23° 30′ gegen den Aequator zu zählet: so kann man die Pole der Ecliptik darauf verzeichnen. Wenn man nun die Kugel in den gefundenen Polen der Ecliptik einhänget, so lässet sich darauf die Ecliptik eben so wie der Aequator (§. 19.) beschreiben.

71 a) Aeltere Beobachtungen geben nach der Ordnung ihres Alters fast durchgehends die Schiefe der Ecliptik größer an, als neuere. Man kann nach Hrn. de la Lande die **Abnahme der Schiefe der Ecliptik** in 100 Jahren auf 1′. 28″ setzen. In gegenwärtigem Jahre ist die Schiefe der E. = 23°. 28′. 0″. Sie erleidet aber in jedem einzeln Jahre, wegen der anziehenden Kraft des Mondes auf unsere Erde, eine periodische Aenderung von einigen Secunden, indem jene Abnahme überhaupt eine Wirkung der anziehenden Kraft der Planeten ist. **De la Lande** Astronom. §. 2728. II. Ausg.

Aufgabe.

72. Eines jeden Punkts der Ecliptik Declination zu finden.

Auflösung.

Führet den Grad der Ecliptik auf der Himmelskugel unter den Meridian, so zeiget sich seine Declination wie bey den Sternen (§. 67.).

Zusatz.

73. Wenn ihr die nördliche Declination der Sonne von ihrer observirten Mittagshöhe abziehet, so bleibet die Höhe des Aequators übrig (§. 67.), und folgends könnet ihr auch die Höhe des Poles (§. 62.) finden. Ihr müsset aber den Ort der Sonne in der Ecliptik wissen. Die südliche Declination wird addiret.

Zusatz.

74. Hingegen wenn euch die Declination der Sonne gegeben ist, und die Höhe des Aequators AR, so könnet

net ihr die Mittagshöhe der Sonne MR oder ⊙R finden, wenn ihr die nördliche Declination zu der Höhe des Aequators addiret, oder die südliche von ihr subtrahiret. Z. E. Höhe des Aequators zu Bononien

		45°	30′	30″
Declination der ⊙ im	29° ♑	20	24	57
Mittagshöhe der Sonne		25	5	33

Aufgabe.

75. Aus der gegebenen Höhe des Aequators und der Mittagshöhe der Sonne ihren Ort in der Ecliptik zu finden.

Auflösung.

1. Zählet in dem Meridiane von dem Aequator an gegen den Pol zu, gegen welchen die Sonne von ihm abstehet, so viel Grade ab, als ihre Declination gefunden wird.

2. Wendet die Himmelskugel, bis ein Grad der Ecliptik in dem letzten abgezählten Grade zu stehen kommet. Dieser ist der Ort der Sonne.

75 a) Man kann diese, so wie mehrere der folgenden Aufgaben, wozu sich Wolf eines Globi bedient, viel genauer durch die sphärische Trigonometrie auflösen. Da aber hier nur von den ersten Anfangsgründen der Astronomie die Rede ist, so reicht es hin sich blos vermittelst eines Globi zu versinnlichen, wie diese oder jene Dinge einander bestimmen, und das Unbekannte aus dem Bekannten gleichsam durch eine Construction sphärischer Dreyecke auf der Kugel gefunden werden kann, wie in der praktischen Geometrie das Gesuchte, durch Zeichnung ebener Dreyecke, wenn nicht die größte Schärfe erforderlich. Solche Constructionen auf der Kugel bereiten den Lehrling vor, selbst die trigonometrischen Auflösungen nachher mit mehr Einsicht anzuwenden. Hiezu können nun vorzüglich Hrn. Hofr. Kästners astronomische Abhandlungen gebraucht werden, wo denn zugleich den trigonometrischen Formeln die bequemste Gestalt zur Ausübung und würklichen Berechnung gegeben wird. Ich begnüge mich daher, bey den folgenden Aufgaben nur auf jene Abhandlun-

gen zu verweisen. Die trigonometrische Auflösung der gegenwärtigen Aufgabe findet sich in der III. Abhandlung der erwähnten Schrift §. 530. IV. so wie die der vorhergehenden eben daselbst (I.) zu finden ist.

Erklärung.

76. Der Punkt des Aequators, welcher mit der Sonne oder einem Sterne durch den Meridian gehet, heisset die gerade Ascension.

76 a) Es werden in der Astronomie die geraden Ascensionen oder Aufsteigungen längs des Aequators, allemahl von Westen gegen Osten, und zwar von demjenigen Durchschnittspunkte der Ecliptik mit dem Aequator angerechnet, in welchem sich die Sonne im Frühjahre befindet, wenn Tag und Nacht einander gleich sind, welchen Punkt man den **Aequinoctialpunkt**, oder den **Anfangspunkt des Widders** (o ♈) nennet. Befindet sich nun ein Stern in dem Meridiane, und mit ihm zugleich der 50ste Grad des Aequators, von jenem Aequinoctialpunkte an gezählt, so sagt man des Sterns gerade Aufsteigung sey 50 Gr.

Aufgabe.

77. Die gerade Ascension der Sonne zu finden.

Auflösung.

Führet den Grad der Ecliptik auf der Himmelskugel, darinnen die Sonne ist, unter den Meridian, so stehet der Grad des Aequators, den ihr zu wissen begehret, mit darunter.

77 a) Kästners astr. Abh. III. Abh. (§. 533. I. II.)

Erklärung.

78. Die schiefe Ascension eines Sternes ist der Punkt des Aequators, welcher mit einem Sterne durch den Horizont gehet. Hingegen die schiefe Descension ist der Punkt des Aequators, mit welchem der Stern untergehet.

Erklä-

Erklärung.

79. Die Ascensionaldifferenz ist der Unterscheid zwischen den beyden Ascensionen. Die Descensionaldifferenz ist der Unterscheid zwischen der geraden Ascension und schiefen Descension.

Aufgabe.

80. Aus der gegebenen Polhöhe und dem Orte der Sonne ihre schiefe Ascension zu finden.

Auflösung.

Führet den Grad der Ecliptik auf der Himmelskugel, in welchem sich die Sonne befindet, in dem Morgenhorizont, und darauf in dem Abendhorizont; so zeiget sich im ersten Falle die schiefe Ascension, im andern die schiefe Descension, wenn ihr vorher den Pol über den hölzernen Horizont so viel erhöhet, als er über eurem Horizonte erhaben ist.

Aufgabe.

81. Aus dem gegebenen Orte der Sonne in der Ecliptik die Länge des Tages und der Nacht, wie auch den Auf- und Untergang der Sonne zu finden.

Auflösung.

1. Erhöhet den Pol der Himmelskugel so viel Grade über dem hölzernen Horizont, als er über eurem Horizont erhaben ist.
2. Führet den Grad der Ecliptik, darinnen die Sonne ist, unter den Meridian, und stellet den Zeiger auf 12. Nachdem also die Kugel auf 12 Uhr zu Mittage gestellet,
3. führet eben diesen Grad in den Morgenhorizont; so zeiget der Stundenzeiger die Zeit, wenn die Sonne aufgehet, und zugleich die halbe Nachtlänge.

4. Füh-

4. Führet ihn gleichfalls in den Abendhorizont, so weiset der Stundenzeiger die Zeit, wenn die Sonne untergehet, und zugleich die halbe Tageslänge.

81 a) Der Bogen des Tagekreises, den die Sonne (oder sonst ein Stern) an einem gewissen Tage von dem Punkte des Aufgangs bis zum Untergange beschreibt, heist man den Tagebogen des Gestirns. So viel Grade dieser Bogen faßt, so viel wird auch ein Bogen des Aequators enthalten, den man sich zwischen zweyen Stundenkreisen gedenkt, die durch die erwähnten Punkte des Auf- und Untergangs gezogen werden, und die Sonne (oder der Stern) wird so lange über dem Horizonte seyn, so viel Zeit jenem Bogen des Aequators nach (§. 67 a II.) entsprechen würde, z. E. 10 Stunden, wenn dieser Bogen 150 Grade enthielte. Von der Bestimmung dieses Tagebogens hängt die trigonometrische Auflösung der gegenwärtigen Aufgabe ab, worüber Kästners astron. Abh. III. Abh. §. 17.

Erklärung.

82. Das Azimuth ist der Bogen des Horizonts HS oder SR, welcher zwischen dem Vertikalcircul ZS, darinnen die Sonne oder ein anderer Stern sich befindet, und dem Meridiane eines Ortes HZR enthalten. Die Weite aber des Punktes, da die Sonne aufgehet oder untergehet, SO, von dem wahren Morgen oder Abend O, wird amplitudo ortiva oder occidua genennet.

Zusatz.

83. Daher findet ihr zugleich die Amplitudinem ortivam und occiduam, nebst dem Azimuth mit der schiefen Ascension und Descension (§. 80.).

Aufgabe.

84. Aus der gegebenen Polhöhe und dem Orte der Sonne ihre Höhe auf jede gegebene Stunde des Tages zu finden.

Auf-

Auflösung.

1. Stellet die Kugel auf 12 Uhr zu Mittage, wie oben (§. 81.).
2. Wendet sie, bis der Zeiger die gegebene Stunde zeiget.
3. Schraubet an das Zenith, das ist, den neunzigsten Grad des Meridiani, von dem Horizonte an gerechnet (§. 20.), den Höhen Quadranten, und wendet ihn, bis er durch den Grad der Ekliptik gehet, darinnen sich die Sonne befindet.
4. Zählet die Grade in dem Quadranten, zwischen dem Orte der Sonne und dem Horizont.

Wenn man keinen Höhen-Quadranten hat, darf man nur einen Faden dafür nehmen, und den Theil des Fadens zwischen dem Orte der Sonne und dem Horizont auf dem Aequator messen.

84a) Kästner a. a. O. §. 9. und 41.

Aufgabe.

85. **Aus der gegebenen Polhöhe, dem Orte der Sonne und ihrer Höhe, die Stunde des Tages zu finden.**

Auflösung.

1. Stellet die Kugel auf 12 Uhr zu Mittage (§. 81.).
2. Befestiget an das Zenith den Höhen-Quadranten.
3. Wendet sowohl die Kugel als den Quadranten, bis er durch den Ort der Sonne gehet, so weiset der Zeiger die verlangte Zeit.

85a) Kästner a. a. O.

Erklärung.

86. **Die Weite zweyer Sterne ist ein Bogen eines größten Circuls der Weltkugel, welcher**

zwi-

zwischen ihren beyden Mittelpunkten enthalten.

Aufgabe.

I. 6. 87. **Die Weite zweyer Sterne S und N zu messen.**

Auflösung.

1. Hänget einen Octanten oder Sextanten, dessen Bogen AB der achte oder sechste Theil von einem Circul, dergestalt vertical auf, daß er sich um seinen Mittelpunkt C bewegen lässet, und der Bogen ADB gegen den Horizont gekehret ist.

2. Schiebet den Octanten oder Sextanten fort, bis ihr durch die Dioptern an dem Radio BC den Stern S erblicket.

3. Schiebet gleichfalls die bewegliche Regel CD mit ihren Dioptern fort, bis ihr dadurch den Stern N erblicket.

Der Bogen BD ist die verlangte Weite der Sterne S und N.

87 a) Zu dieser Aufgabe dienen vorzüglich die **Hadleyischen Spiegeloctanten** und **Sextanten**, welche jetzt in sehr großer Vollkommenheit von dem berühmten englischen Künstler **Ramsdrn** verfertigt werden. Man findet eine Beschreibung derselben in **Bohnenbergers** Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung, vorzüglich vermittelst der Spiegelsextanten, Götting. 1795. Auch über die Theorie solcher Werkzeuge, welche man **katoptrisch-dioptrische** nennt in meiner pract. Geom. §. 122. M.

Aufgabe.

88. **Die gerade Ascension der Fixsterne zu finden.**

Auflösung.

Führet den Stern unter dem Meridian, so siehet ihr den Grad des Aequators, mit dem er darunter kommet, das ist, seine gerade Ascension.

88 a) Die gerade Aufsteigung eines Sterns durch unmittelbare Beobachtung am Himmel zu finden, so messe man an einem gewissen Tage die Mittagshöhe der Sonne, so hat man ihre Declination (§. 67.) und daraus und aus der Schiefe der Ecliptik ferner die gerade Aufsteigung der Sonne (§. 77 a). Man beobachte zugleich an einer Sternuhr, wenn die Sonne im Meridiane war, und schreibe die Zeit auf, wenn am Abende eben desselben Tages der Stern in den Meridian kömmt, so hat man den Unterschied der Stundenkreise der Sonne und des Sterns in Zeit (§. 67 a) und folglich (ebendas.) auch den zugehörigen Bogen des Aequators, welchen man nur zu der geraden Aufsteigung der Sonne addiren darf, um diejenige des Sternes zu erhalten.

Erklärung.

89. Wenn durch die Pole der Ecliptik H I. und I und den Mittelpunkt eines Sternes S 7. ein Circul um die Weltkugel beschrieben wird, so heisset der Bogen von diesem Circul TS, welcher zwischen dem Sterne S und der Ecliptik EL enthalten ist, die Breite des Sternes; hingegen der Bogen der Ecliptik, welcher von dem Anfange des Widders bis zu dem Punkte T gehet, wo der gedachte Circul die Ecliptik durchschneidet, wird die Länge des Sternes genennet.

Aufgabe.

90. Die Länge und Breite eines Sternes zu finden.

Auflösung.

Leget den Höhenquadranten an den Pol der Ecliptik dergestalt, daß er durch den Mittelpunkt des Sternes gehet, so wird er den Grad der Länge in der Ecliptik abschneiden, und die Breite könnet ihr an dem Quadranten sehen. Hieraus erhellet zugleich, wie man aus der gegebenen Länge und Breite die Sterne auf die Himmelskugel hat zeichnen können.

90a) Aus der Declination und geraden Aufsteigung des Sterns, die Länge und Breite trigonometrisch zu finden s. un. Kästnees astron. Abh. II. Abh. 3 Kap.

Anmerkung.

91. Damit die Sterne in einem Catalogum gebracht, und von den Liebhabern der Sternkunst auch am Himmel unterschieden werden könnten, so hat man das ganze himmlische Heer in verschiedene **Gestirne** vertheilet, und ihnen theils Namen der Thiere, theils gewisser Personen beygeleget. Durch den Thierkreis sind 12 Gestirne getheilet: **der Widder, der Stier, die Zwillinge, der Krebs, der Löwe, die Jungfrau, die Wage, der Scorpion, der Schütze, der Steinbock, der Wassermann, die Fische.** Ausser diesen Gestirnen sind in den nordischen Theilen der Weltkugel anzutreffen: **der kleine und große Bär, der Drache,** Cepheus, Bootes, **die nördliche Krone,** Hercules, **die Leyer, der Schwan,** Cassiopea, Perseus, Andromeda, **der Triangel, der Fuhrmann,** Pegasus, **das kleine Pferd** (Equuleus), **der Delphin, der Pfeil, der Adler, der Schlangenmann** (Ophiuchus), **die Schlange;** worzu hernach noch kommen sind Antinous **und das Haar der Berenices.** In dem südlichen Theile der Weltkugel sind: **der Wallfisch, der Fluß** Eridanus, **der Haase Orion, der grosse Hund, der kleine Hund, das Schiff Jasons** (Argonavis), **die Wasserschlange** (Hydra), **das Gefäß** (Crater), **der Rabe,** Centaurus, **der Wolf, der Altar, die südliche Krone, der südliche Fisch,** Phoenix, **der Kranich, der Indianer, der Pfau, die Indianische Biene, der südliche Triangel, die Fliege,** Chamaeleon, **der fliegende Fisch,** Taucan, **oder die amerikanische Gans, die Wasserschlange** (Hydrus) **und** Dorede. Von diesen Gestirnen sind die letztern 15 mit mit dem größten Theile des Schiffes des Centauri und des Wolfes über unserm Horizonte, wo die Polhöhe nicht viel über 51 Gr. ist, niemals zu sehen.

Anmerkung.

92. Es sind einige Sterne die besondere Namen führen, als Arcturus zwischen den Beinen des Bootis; Gemma der mittlere helle Stern in der Krone; Capella cum hoedis auf der Schulter des Fuhrmanns; Aldebaran oder Palilitium, das Auge des Ochsens; Plejades, oder **das Siebengestirne** auf dem

dem Rücken, und Hyades auf dem Gesichte des Ochsens; Castor und Pollux auf den Köpfen der Zwillinge; Praesepe und Asini auf dem Krebse; Regulus, oder das Herz des Löwens; Spica Virginis, in der Hand der Jungfrauen, und Vindemiatrix auf ihrer Schulter; Antares, oder das Herz des Scorpions, Pomahant in dem Maule des südlichen Fisches; Regel in dem Fuse des Orions, und Alcor, das kleine Sternlein über dem mittleren im Schwanze des grossen Bäres.

Anmerkung.

93. Die Poeten der Griechen und Römer haben von dem Ursprunge der Gestirne viele abgeschmackte Mährchen erdichtet, die ihr in des Hygini Poetico Astronomico und Natalis Comitis Mythologia finden könnet.

93 a) *Memoires sur l origine des Constellations et sur l' explication de la fable par Mr. Dupuis* im 4ten Theile der de la Landischen Astronomie.

Anmerkung.

94. Ausser den Gestirnen der Alten hat man auch einige **unförmige Sterne**, aus welchen die neuen Astronomen neue Gestirne zusammengesetzet. Z. E. **Hevel** setzt zwischen den Löwen und großen Bär, den **kleinen Löwen**, zwischen den grossen Bär und Fuhrmann über die Zwillinge den **Luchs**, unter den Schwanz des großen Bäres die **Jagdhunde**, Asterion und Chara, in die Hand des Herculis bey Medusens Haupt Cerberum, oder **die dreyköpfige Schlange**, bey den Pfeile über dem **Adler** den **Fuchs** mit der **Gans**, zwischen dem Fuß des Pegasi und der Hand der Andromeda, die **Eydexe** (Lacertam), zwischen den Schlangenmann und Antinoum, das **Sobieskische Schild**, Scutum Sobiescianum, unter die Füsse des Löwens Sextantem, den **Sextanten**. Andere haben vor ihm dazu gesetzt Camelopardalum, Monocerotem, oder **das Einhorn**, **den kleinen Triangel**, (Triangulum minus) neben den grossen, **die Carlseiche** (Robur Caroli).

94 a) Neuerdings sind hinzugekommen: *le taureau royal de Poniatowsky*, der *Custos Messium* (Hrn. Messier, einem fleißigen Cometenbeobachter zu Ehren) und die **Friedrichsehre** (zum Denkmahl Friedrichs des Großen vom Hrn. Bode, Berlin 1787.). Der **Georgenpsalter**, und die **zwey Herschelischen Teleskope.**

Anmerkung.

95. Unter die Gestirne rechnet man die **Milchstrasse**, welche man um den ganzen Himmel herum durch die Cassiopeam, den Perseum, Fuhrmann, die Füsse der Zwillinge, die Keule des Orions, den Schwanz des großen Hundes, das Schiff Argus, die Füsse des Centauri, den Altar, den Schwanz des Scorpions, den Fuß des Schlangenmanns, den Bogen des Schützens, und den Schwan gehet, in der Gestalt eines hellen Streifens. Nachdem man den Himmel durch Ferngläser zu betrachten angefangen, hat man gefunden, daß sie von dem Glanze unzähliger kleinen Sterne entstehe, wie vor diesem **Democritus** (bey dem **Plutarcho** lib. 3. de placitis Philos. c. 1.) und **Ptolomäus** (Almag. lib. 8. c. 2.) wohl gemuthmasset.

Anmerkung.

96. Nach der scheinbaren Grösse werden die Sterne eingetheilet in Sterne von der ersten, von der andern, von der dritten, von der vierten, von der fünften und von der sechsten Grösse. Doch kommen nicht alle Sternkundige mit einander darin überein, zu welcher Classe jeder Stern zu rechnen sey. Nach diesen sind die **nebelichten Sterne** (stellae nebulosae) welche einem hellen Flecken gleichen, durch die Ferngläser aber einen Haufen kleiner Sterne bey einander zeigen. So hat z. E. **Galiläus** in dem nebelichten Sterne des Krebses 36 Sterne durch das Fernglas deutlich unterscheiden können.

96 a) Durch die telescopischen Beobachtungen der Hrn. **Bode, Pigot,** und vorzüglich **Herschels**, sind bereits über 2000 solcher Nebelsterne oder Nebelflecken entdeckt. (Berliner astr. Jahrbuch 1794. S. 151.) Umständliche Betrachtungen über diese merkwürdigen Sterne in **Röslers** Handb. d. pract. Astron. II. Thl. S. 382. Ueber die Beschaffenheit dieser Nebelflecke sind die Meynungen sehr getheilt gewesen. Einige haben sie für unförmliche Lichtmassen gehalten. Erhabener ist der Gedanke, welchen **Kant** und **Lambert** bereits geäussert haben, nemlich daß es ausser dem **Fixsternensystem**, wozu unsere Sonne mit allen den einzeln Fixsternen gehöret, noch mehr dergleichen grossen Systeme in dem Weltraume gebe, in denen wir aber die zahllosen einzeln Sterne nicht mehr unterscheiden, sondern nur ihren vereinigten Lichtschimmer unter der Gestalt eines runden oder länglichten Nebelflecks wahrnehmen. **Lamberts** kosmo-

kosmologische Betrachtungen. Kants allgemeine Naturgeschichte des Himmels. Herschel über den Bau des Himmels (aus dem Engl.) Königsb. 1791.

Anmerkung.

97. Wenn ihr den Himmel durch Ferngläser betrachten wollet, so werdet ihr vielmehr Sterne als mit bloßen Augen sehen. So hat **Hugenius** durch ein Fernglas von 23 Schuhen anstatt des mittleren Sternes im Schwerdt des **Orions** 12. (Systema. Saturn. p. 8.) und **Galiläus** im Siebengestirne mehr als 40, in einem kleinen Theile des **Orions** mehr als 400 Sterne wahrgenommen; wovon ihr ein mehreres in seinem Nuncio sidereo findet. Ja **Antonius Maria Schirläus von Rheita** (in Oculo Enochi atque Eliae lib. 4. cap. 1. memb. 7. f. 197.) hat durch ein holländisches Fernglas in dem **Orion** allein bis 2000 Sterne gezählet.

Anmerkung.

98. **Hipparchus** (wie Ptolomaeus Almag. lib. 7. cap. 1. erzählet) muthmassete, daß die Fixsterne ihre Länge ändern, als er mit den Observationen des **Arystilli** und **Timocharidis** die seinen verglich. **Ptolomäus**, der beynahe 300 Jahre nach dem Hipparcho lebete, und daher ältere Observationen vor sich hatte, erwies sie (l. c. cap. 2 u. 3.) unwidersprechlich. Er befand aber, daß sie in 100 Jahren einen Grad fortrücketen. Nach diesem hat man die Grösse der Bewegung noch genauer ausgemachet, und kann man füglich für ein Jahr 50″ zählen, und also für 70 Jahre einen Grad. Die Breite bleibet unveränderlich.

98 a) Da dieses Wachsthum der Länge allen Fixsternen gemein, und bey dem einen so groß wie bey dem andern ist, so ist wohl das natürlichste, anzunehmen, daß nicht die Sterne selbst **vorwärts** gehen, sondern nur der Punkt, von dem man ihre Längen anrechnet, der **Aequinoktialpunkt** (§. 76 a) **rückwärts** gehe (Praecessio aequinoctiorum). Durch dieses Rückwärtsgehen der Aequinoctialpunkte ändern sich nun auch die geraden Aufsteigungen und Abweichungen der Fixsterne, und ihre Angaben in den Fixsternverzeichnissen, auf den Himmelskugeln und Sternkarten, können also nur für eine gewisse Zeit gelten. Verlangt man sie für andere Zeiten, so müssen gewisse Correctionen angebracht werden, wozu man die Vorschriften in größern Werken der Astronomie findet.

Setzt man indessen die mittlere Größe jener Vorrückung der Aequinoctialpunkte mit Hrn. de la Lande auf 1°. 23'. 10'' in 100 Jahren, so würden diese Punkte einen ganzen Umlauf in 25972 Jahren vollenden, welchen Zeitraum man das **große Platonische Jahr** zu nennen pflegt. In eben dieser Zeit muß der Weltpol um den Pol der Ecliptik herumkommen. **Kästners** astr. Abh. erste Samml. III. Abh. §. 473 u. f.

98 b) Um die Stellungen der Fixsterne zu diesem oder jenem Gebrauche genau zu haben, dienen die **Fixsternverzeichnisse**, worinn die Declinationen und Rectascensionen, so wie Längen und Breiten der Sterne mit möglichster Schärfe angegeben sind. Hieher gehören **Hevels**, **Flamsteeds**, **la Cailles**, **Bradleys**, und für die Zodiacalsterne **Tob. Mayers** Fixsternverzeichnisse. Aeltere vom **Ptolomäus** in seinem Almagest, von **Tycho de Brahe**, **Ulugbey** u. a. Eines der vollständigsten Verzeichnisse findet sich in der **Sammlung astronomischer Tafeln unter der Aufsicht d. k. Akad der Wiss.** Berlin 1776. 1 B. S. 83. vom Hrn. Prof. **Bode**. Noch jetzt bemüht man sich diesen Verzeichnissen einen immer höhern Grad von Vollkommenheit zu geben.

98 c) Um einzelne Sterne desto besser zu unterscheiden und kennen zu lernen, werden sie in jedem Sternbilde mit **Buchstaben** bezeichnet. **Doppelmair** in seinem **Himmelsatlas** bediente sich lateinischer Buchstaben. Gewöhnlicher sind jetzt die griechischen und überhaupt diejenigen, welche **Bayer** in seiner **Uranometrie** angegeben hat. Hülfsmittel die Sterne kennen zu lernen, sind die eben erwähnten **Doppelmairischen** und **Bayerischen** Sternkarten, dann **künstliche Himmelskugeln**, worauf die Sterne in ihren gehörigen Lagen verzeichnet sind, **Sternkugel** u. d. g. **Flamsteeds** Atlas hat Hr. **Bode** in seiner Vorstellung der Gestirne auf 34 Kupfert. Berlin 1782. zum Grunde gelegt. Vorschriften überhaupt die Gestirne kennen zu lernen, geben Hrn. **Bode** Anleitung zur Kenntniß des gestirnten Himmels, fünfte Aufl. Berlin 1788. **Rüdigers** Anleitung ꝛc. mit 35 Kupf. Leipz. 1786. **Hellmuths** Gestirnbeschreibung und mehrere andere.

Aufgabe.

99. Die schiefe Ascension und Descension eines Sternes zu finden.

Auflö-

Auflösung.

1. Erhöhet den Pol der Himmelskugel, wie es der gegebene Ort erfordert.
2. Führet den Stern in den Morgen- und Abendhorizont; so sehet ihr seine Ascensionem und Descensionem obliquam (§. 78.).

Aufgabe.

100. Die Zeit zu finden, welche ein Stern über dem Horizont bleibt.

Auflösung.

1. Erhöhet den Pol der Himmelskugel wie vorhin (§. 99.).
2. Führet den Stern in den Morgenhorizont, und richtet den Stundenzeiger auf 12.
3. Wendet die Kugel, bis der Stern in den Abendhorizont kommet, so weiset der Stundenzeiger, wie viel Stunden er über dem Horizont bleibet.

Aufgabe.

101. Aus dem gegebenen Orte der Sonne in der Ekliptik die Zeit zu finden, da ein Stern in den Meridian kommet, und da er auf- und untergehet.

Auflösung.

1. Stellet die Himmelskugel auf 12 Uhr (§. 81.).
2. Führet den Stern unter den Meridian, so zeiget der Zeiger die Zeit, wenn er darein kommet.
3. Führet ihn gleichergestalt in den Morgen- und Abendhorizont, so weiset der Zeiger die Zeit, wenn er auf- und untergehet.

Aufgabe.

102. Den Punkt der Ecliptik zu finden, mit welchem der Stern in den Meridian kommet.

Auflösung.

Führet den Stern auf der Himmelskugel unter den Meridian, so sehet ihr den verlangten Grad der Ecliptik.

Zusatz.

103. Wenn ihr also wisset, zu welcher Zeit die Sonne in diesem Grad der Ecliptik kommet, so wisset ihr auch, wenn der Stern mit der Sonne durch den Meridian gehet. Z. E. in dem 1710ten Jahre war die Sonne den 29. Jul. im 7° 69 anzutreffen. Derowegen ging Sirius diesen Tag um den Mittag durch den Meridian.

Aufgabe.

104. Zu finden, ob der Stern unter einer gegebenen Polhöhe aufgehe oder nicht.

Auflösung.

1. Erhöhet den Pol der Himmelskugel gebührend über den Horizont.

2. Wendet sie herum, so werdet ihr sehen, ob ein Stern auf- und untergehe, oder ob er immer über oder unter dem Horizont bleibe.

Aufgabe.

105. Den Punkt der Ecliptik zu finden, mit welchem der Stern aufgehet.

Auflösung.

Erhöhet den Pol der Himmelskugel gebührend über dem Horizont, und führet den Stern in den Horizont, so sehet ihr den Grad der Ecliptik, mit welchem er aufgehet.

Zusatz.

106. Wenn ihr den Tag in den Ephemeriden oder Calendern aufsuchet, an dem die Sonne in denselben

Grad der Ecliptik tritt, so wisset ihr, wenn sie mit dem Sterne aufgehet.

Zusatz.

107. Suchet ihr aber auf, wenn die Sonne in den entgegengesetzten Grad kommet, so wisset ihr den Tag, an welchem die Sonne untergehet, indem derselbe Stern aufgehet.

Zusatz.

108. Eben so könnet ihr den Punkt der Ecliptik finden, mit welchem der Stern untergehet, und daher auch den Tag wissen, an welchem er mit der Sonne untergehet, imgleichen den Tag, an welchem er untergehet, indem die Sonne aufgehet.

Anmerkung.

109. Der Aufgang eines Sternes mit der Sonne und sein Untergang, indem die Sonne aufgehet, wird ortus und occasus cosmicus genennet. Hingegen der Aufgang und Untergang mit der untergehenden Sonne heisset ortus und occasus acronyctus.

Anmerkung.

110. Weil es nicht bald finster wird, wenn die Sonne untergehet, so können auch die Sterne nicht bald nach ihrem Untergange gesehen werden. Eben so weil es lichte wird, ehe die Sonne aufgehet, werden die Sterne vor ihrem Aufgange unsichtbar. Derowegen wenn gleich ein Stern etwas eher aufgehet, oder etwas später untergehet als die Sonne, nachdem er vorher mit ihr auf- und untergegangen war; kann er deswegen doch nicht bald gesehen werden, sondern die Sonne muß viel oder wenig nach der scheinbaren Grösse des Sternes unter dem Horizont seyn, ehe der Stern gesehen werden kann. Die Tiefe der Sonne erachtet man aus dem Bogen eines Verticalcirculs, welcher zwischen dem Horizont und der Sonne enthalten ist, und nennet man ihn in diesem Falle Arcum Visionis, oder den **Sehungsbogen**. Die kleinesten Fixsterne erfordern 18 Gr., die von der sechsten Grösse 17 Gr., die von der fünften 16 Gr., die von der vierten 15 Gr., die von der dritten 14 Gr., die von der andern 13 Gr., die von der ersten 12 Gr., ♄ 11 Gr., ♂ 11 Gr. 30′, ♃ und ☿ 10 Gr. ♀ 3 Gr. Wenn

der Stern aus den Sonnenstrahlen hervorrücket, oder unter dieselbe sich verbirget, nennet man es ortum und occasum heliacum.

Aufgabe.

111. Aus dem gegebenen Sehungsbogen und dem Punkte der Ecliptik, mit welchem der Stern aufgehet, den Punkt der Ecliptik zu finden, in welchem die Sonne ist, wenn man ihn zuerst im Aufgange siehet.

Auflösung.

1. Erhöhet gebührend den Pol der Himmelskugel, und führet den Stern in den Morgenhorizont.

2. Befestiget den Höhenquadranten an das Zenith, und suchet dadurch den Grad der Ecliptik, der so viel über dem Horizont erhaben, als der Sehungsbogen beträget, als in unserm Exempel 12 Gr. (§. 210.); der entgegengesetzte Grad ist der verlangte.

Zusatz.

112. Wenn euch der Punkt gegeben wird, mit welchem der Stern untergehet, könnet ihr auf gleiche Art finden, in welchem Orte die Sonne ist, indem er sich unter die Sonnenstrahlen verbirget.

Zusatz.

113. Derowegen wenn ihr den Tag in den Ephemeriden oder Calendern aufsuchet, an welchem die Sonne in diesen Ort kommet, wisset ihr auch den Tag, an dem der Stern sich unter die Sonnenstrahlen verbirget, oder auch aus denselben zuerst wieder hervorrücket.

Erklärung.

114. Der Tagesanbruch oder die Morgendämmerung crepusculum matutinum) heist die Helligkeit, die des Morgens vor Aufgange der Sonne schon

schon entstehet, und die Abenddämmerung crepusculum vespertinum) diejenige, welche nach dem Untergange der Sonne in der Luft noch einige Zeit übrig bleibt.

Zusatz.

115. Weil das Licht durch gerade Linien fortgehet (§. 4. Optik); so können keine Sonnenstrahlen auf unsern Erdboden von der Sonne fallen, so lange sie unter dem Horizont ist. Doch können sie unsere Luft erreichen, die über der Erde erhaben ist. Derowegen muß die Luft die Sonnenstrahlen auf unsern Erdboden bringen, die sonst vorbey streichen würden, theils indem sie von ihr gebrochen (§. 14. Opt.), theils indem sie von den Luft- und den Dunsttheilchen zurücke geworfen werden (§. 10. Optik).

Zusatz.

116. Da man erfahren, daß die Sonne höchstens 18 bis 19, nach dem Cassini nur 10 Gr. unter dem Horizont seyn muß, wenn die Abenddämmerung aufhören soll, so folget, daß wenn der Unterscheid zwischen der Höhe des Aequators und der nördlichen Declination der Sonne nicht über 17 bis 18 Gr. ist, der Tag die ganze Nacht durchschimmern muß. Es ist noch eine andere Ursache des Tages und der Abenddämmerung, nemlich der Glanz, der um die Sonne in ihrer Luft erreget wird, gleichwie wir in unserer Luft um jedes Licht einen hellen Glanz antreffen (§. 57. Optik): dieses aber wird sich erst unten erweisen lassen. Daher scheinet uns der anbrechende Tag wie ein heller Circul vor der Sonne über den Horizont zu fahren.

116a) Wolf meynt hier das sogenannte **Zodikallicht**, ein vorzüglich im Frühjahre und Herbste vor dem Aufgange oder nach dem Untergange der Sonne sichtbares weises Licht, das von der Sonne ab am Horizonte schief aufwärts nach der Richtung der Ecliptik fortgeht, und an seinem obern Ende spitzig zuläuft. Hr. v. Mairan erklärt diesen Lichtschim-

mer sehr glücklich, daß er annimmt, die Sonne sey mit einer leuchtenden, oder von ihr erleuchteten Atmosphäre umgeben, welche die Form eines sehr abgeplatteten linsenförmigen Sphäroids habe, dessen grösserer Durchmesser ohngefähr mit der Richtung des Sonnenäquators übereinkomme. Man s. Hrn. von Mairans traité physique et historique de l'aurore borcale in den Mem. de Paris 1731. und 1733.

Aufgabe.

117. Aus der gegebenen Höhe des Aequators zu finden, wie lange an einem Orte der Tag die ganze Nacht durchschimmert.

Auflösung.

Ziehet von der Höhe des Aequators, oder seiner Tiefe an dem nördlichen Theil des Meridians 18 Gr. ab, so bleibet die geringste Declination der Sonne übrig, welche sie haben kann, wenn der Tag die ganze Nacht durchzuschimmern anfänget und aufhöret.

Z. E. in Halle ist die Höhe des Aequators 38 Gr. 22′, und also die verlangte Declination der Sonne 20 Gr. 22′. Nach dem de la Hire (Tab. Astronom. S. 7.) ist die Declination der Sonne 20° 22′ 49″ wenn die Sonne im 1° ♊ und im 29° ♋ ist. Derowegen muß die Zeit über, das ist, von dem 21. Mai bis den 22. Julii, der Tag daselbst die ganze Nacht durchschimmern.

Aufgabe.

118. Aus der gegebenen Polhöhe den Anbruch des Tages und das Ende der Abenddämmerung zu finden.

Auflösung.

1. Richtet die Himmelskugel auf 12 Uhr (§. 81.).
2. Wendet sie so lange, bis der dem Orte der Sonne entgegengesetzte Grad der Ecliptik 18 Grad über den Abendhorizonte erhaben ist, so weiset der Zeiger die Zeit, wenn der Tag anbricht.

3. Wen-

3. Wendet die Kugel bis gedachter Grad über den Morgenhorizont erhöhet ist, so weiset der Zeiger die Zeit, wenn die Abenddämmerung aufhöret.

Zusatz.

119. Wenn ihr den Aufgang der Sonne suchet (§. 81.), so giebet der Unterschied zwischen ihm und dem Tagesanbruche die Länge der Morgenröthe. Und auf gleiche Art könnet ihr die Länge der Abenddämmerung finden.

Aufgabe.

120. Aus der gegebenen Polhöhe, der Höhe eines Sternes, und dem Orte der Sonne, die nächtliche Stunde zu finden.

Auflösung.

Die Auflösung ist wie oben (§. 85.)

Erklärung.

121. Wenn ihr einen Stern S auf der Erdfläche in V ansehet, so sehet ihr ihn in L. Solltet ihr ihn aus dem Mittelpunkte der Erde T sehen, würde er euch in M erscheinen. Der Unterschied der beyden Oerter, nemlich der Bogen LM, wird Parallaxis genennet. I. 8.

Lehrsatz.

122. Der Winkel, den die Linien TS und VS (deren eine aus dem Mittelpunkte der Erde T, die andere von der Erdfläche V in den Mittelpunkt des Sternes gezogen wird,) mit einander machen, ist der Parallaxi gleich. I. 8.

Beweis.

Die Parallaxis LM ist der Unterschied zwischen den Bogen ZM und ZL. Der Bogen ZM ist das Maaß des Winkels MTZ, und weil die Erde in Ansehung der obersten Fläche der Weltkugel, wo ihr euch den

Bogen

Bogen ZH einbilden müsset, ein Punkt ist (§. 58.), so ist der Bogen ZL das Maaß des Winkels LVZ (§. 16. Geom.). Demnach ist der Unterschied dieser Winkel der Parallaxi gleich. Es ist aber TSV der Unterschied der Winkel MTZ und LVZ (§. 74. Geom.). Derowegen ist der Winkel TSV der Parallaxi gleich. W. Z. E.

Zusatz.

123. Wenn ihr demnach die wahre Höhe der Sterne auf eine gegebene Zeit suchet, und sie mit der observirten vergleichet, so könnet ihr ihre Parallaxin finden.

Anmerkung.

124. Z. E. Philipp Lansberg (Observat. Astronom. Thesaur. fol. 90.) hat 1600, d. 1. März nach Mittag um 6 Uhr die Höhe des oberen Randes des Mondes in dem Meridian observiret 64° 7′ 30″. Den halben Diameter des Mondes befand er 16′ 30″. Daher war die Höhe des Mittelpunkts im Monde 63 Gr. 51′. Die wahre Höhe desselben fand er durch Rechnung 64 Gr. 17′ 30″. Derowegen war die Parallaxis 26′ 30″. Die Erfahrung hat gelehret, daß die Fixsterne keine merkliche Parallaxin haben, auch der übrigen Planeten Parallaxis so klein sey, daß man sie auf diese Art nicht ausmachen kann.

Lehrsatz.

125. **Wenn ein Stern von der Erde weiter weg ist, als ein anderer, so muß seine Parallaxis kleiner seyn, als des anderen.**

Beweis.

I. S. Es sey der eine Stern in S, der andere in L; so ist des näheren Parallaxis dem Winkel TSV, des weiteren aber dem Winkel TLV (§. 122.) gleich. Nun ist TSV grösser als TLV (§. 74. Geom.). Derowegen ist die Parallaxis des näheren grösser, als die Parallaxis des weiteren. W. Z. E.

Zusatz.

126. Da nun die Parallaxis immer abnimmet, je weiter der Körper von der Erde weggehet, so muß sie auch

auch endlich unmerklich werden, und ehe dieses geschiehet, so klein, daß man sie auf die (§. 123. vorgeschriebene Art nicht mehr finden kann, nemlich von wenigen Secunden.

Lehrsatz.

127. Wenn ein Stern im Horizont gesehen wird, so hat er die größte Parallaxis, die er haben kann.

Beweis.

Verlängert LV in R, und lasset aus dem Mittelpunkte der Erde T die Perpendicularlinie TR herunterfallen. So verhält sich wie der Sinus totus zu TK, so der Sinus des Winkels K zu TV, und wie der Sinus totus zu TL, so der Sinus des Winkels L zu TR (§. 19. Trig.) Da nun TK = TL, so ist auch der Sinus des Winkels K zu dem Sinu des Winkels L wie TV zu TR. Und weil TV grösser als TR (§. 144. Geom.), so muß der Winkel K grösser als der Winkel L, folgends die Horizontal-Parallaxis die größte seyn (§. 122.) W. Z. E. I. 8.

127a) I. Es sey an dem Orte V der Erdfläche der Halbmesser TV = r. Des Weltkörpers L Weite vom Mittelpunkte der Erde T oder TL = a, und sein Abstand vom Zenith Z des Beobachters, oder der Winkel LVZ = η, die zugehörige Parallaxe, oder der Winkel VLT = π, so hat man in dem Dreyecke LVT, Sin η : Sin π = a : r; demnach für die Höhen-Parallaxe π;

$$\text{Sin } \pi = \frac{r \text{ Sin } \eta}{a}.$$

II. Für η = 90 Gr. d. h. wenn die Höhe des Körpers L über dem Horizonte = o; L also selbst im Horizonte ist, wird für die Horizontalparallaxe, die ich jetzt = p nennen will.

$$\text{Sin } p = \frac{r \text{ Sin tot}}{a}$$

III.

III. Man sieht hieraus, wie die Horizontalparallaxe von des Weltkörpers L Weite vom Mittelpunkte der Erde, und dem Halbmesser der Erde abhängt.

IV. Wüßte man umgekehrt durch irgend eine Beobachtung die Horizontalparallaxe eines Gestirns, so ergäbe sich aus ihr und dem Halbmesser der Erde, die Weite des Gestirns vom Mittelpunkte der Erde, nemlich:

$$a = \frac{r \text{ Sin tot}}{\text{Sin p}}.$$

V. Es ist daher die Kenntniß der Horizontalparallaxen der Weltkörper eine der wichtigsten in der Astronomie, weil man daraus die Entfernungen derselben von der Erde bestimmen kann.

VI. Es giebt mehrere Arten diese Horizontalparallaxen zu finden. Ein Verfahren, welches sich am leichtesten übersehen läßt, ist ohngefähr folgendes:

VII. Es sey (Fig. Astron. Tab. V. Fig. 24.) die Bedeutung der Punkte L, V, T, Z wie in Fig. 8; und v ein anderer Ort auf der Erde, unter eben dem Meridiane, in welchem V liegt. Je weiter v von V entfernt ist, desto besser ist z in der Verlängerung von T v, sey des Orts v Zenith. Beyde Beobachter bey V und v, sollen nun in einem und demselben Augenblicke die Weiten des Weltkörpers L vom Zenith, in dem Augenblicke, da er im Meridiane ist, also die Winkel $LVZ = \eta$; $Lvz = i$ messen.

VIII. Mit dem Weltkörper L gehe zugleich ein Fixstern in der Richtung VN durch den Meridian. Sein scheinbarer Abstand von L, oder der Winkel LVN sey $= \varepsilon$. Da nun der Fixstern als unendlich weit von der Erde anzusehen ist, so wird in eben dem Augenblicke der Beobachter bey v den Fixstern nach einer mit VN parallelen Richtung v n, und den Weltkörper L von dem Fixsterne um den Winkel $Lvn = e$ abstehen sehen. Sind nun diese beyden Winkel ε, e nebst den obigen η, i an den Standpunkten v, V gemessen worden, so findet sich daraus des Weltkörpers L Horizontalparallaxe, auf folgende Art.

IX. Weil

IX. Weil aus (II.)

$$\frac{r}{a} = \frac{\text{Sin } p}{\text{Sin tot}},$$

so wird (I.)

$$\text{Sin VLT oder Sin } \pi = \frac{\text{Sin p . Sin } \eta}{\text{Sin tot}}.$$

Weil aber die Parallaxen p, π, immer sehr klein sind, so kann man statt ihrer Sinusse, die kleinen Bögen, die ihnen zugehören, setzen, d. h. schlechtweg

$$\text{VLT oder } \pi = \frac{p \text{ . Sin } \eta}{\text{Sin tot}}.$$

setzen.

X. So ist denn auf eine ähnliche Art für den Beobachter v der Winkel

$$vLT = \pi' = \frac{p \text{ Sin i}}{\text{Sin tot}}$$

XI. Gedenkt man sich nun durch L eine Parallele mit V N oder v n gezogen, so findet sich sehr leicht, daß der Winkel vLV so groß ist, als nvL + NVL d. h.

$$vLT + TLV = nvL + NVL; \text{ oder}$$

$$\pi' + \pi = e + \varepsilon; \text{ oder aus (VIII. und X.)}$$

$$\frac{p \text{ . (Sin i + Sin } \eta)}{\text{Sin tot}} = e + \varepsilon$$

demnach die Horizontalparallaxe:

$$p = \frac{(e + \varepsilon) \text{ Sin tot}}{\text{Sin i + Sin } \eta}.$$

XII. Wenn man demnach die Grössen e; ε; i; η; aus Beobachtungen weis, so ist daraus die Parallaxe gefunden.

XIII. Die gegenwärtige Figur nimmt an, die gerade Linie vom Mittelpunkte der Erde nach dem Weltkörper L, falle innerhalb des Winkels vLV, und der Beobachter V sehe den Körper L südwärts der Richtung V N, indem dem aus

dern v der Körper L nordwärts der Richtung vn erscheinet. Je nachdem aber die Standpunkte V und v angenommen worden sind, kann auch TL ausserhalb des Winkels vLV fallen, so wie dann auch beyden Beobachtern der Weltkörper L zugleich südwärts oder zugleich nordwärts des Fixsternes erscheinen kann. Für alle diese einzeln Fälle kann man sich leicht Figuren entwerfen, und daraus herleiten, wie in der allgemeinen Formel (XI.) die Grössen e, ε, i, η, bald bejaht bald verneint genommen werden müssen, wenn sich der richtige Werth der Parallaxe in jedem einzeln Falle ergeben soll, welches der mündliche Vortrag alles am besten erläutern wird.

Exempel.

Zu (XI.) de la Caille beobachtete bey v auf dem Vorgebirge der guten Hoffnung (welches mit Stockholm beynahe unter einerley Meridian liegt) den 6ten Octobr. 1751. die scheinbare Weite des Mars L, vom Scheitel im Mittagskreise $= 25° . 2' = i$, und den nördlichen Rand dieses Weltkörpers 26,7 Secunden nördlicher als den Fixstern λ im Wassermann. Also $e = 26,''7$. Um eben diese Zeit fand Wargentin in Stockholm bey V den Winkel $\eta = 68° . 14'$, und jenen Rand des ♂ um $6'',6 = \varepsilon$ südlicher als jenen Fixstern. Daraus folgt also die Horizontalparallaxe des

$$♂ = \frac{33'',3 \cdot \text{Sin tot}}{\text{Sin } i + \text{Sin } \eta}$$

oder nach gehöriger Rechnung $= 24'',633$.

XIV. Wie beyde Beobachter wissen können, ob sie auf der Erdkugel in einerley Mittagskreise liegen, das lehrt die Geographie. Sind sie nicht ganz genau in einerley Meridiane, so hat man doch Mittel ihre Beobachtungen auf einen und denselben Mittagskreis zu reduciren. Uebrigens versteht sich, daß zwischen beyden Beobachtern eine Verabredung getroffen seyn muß, in welchen Nächten sie beyde auf den Weltkörper L Acht geben, und mit welchen Fixsternen sie ihn vergleichen wollen.

XV. Man wählt am besten solche Fixsterne dazu, an welchen der Weltkörper L zu einer gewissen Zeit nahe vorbey geht, oder sie gar bedeckt. Man kann indessen aus solchen Bedeckungen die Parallaxen noch nach andern Methoden herleiten, welche aber schwerer zu verstehen sind. (De la Lande Astr. Liv. IX.)

XVI.

XVI. Wenn man aus der scheinbaren Weite eines Sterns L vom Scheitel, oder aus dem auf der Erde beobachteten Winkel LVZ die wahre Scheitelweite, so wie sie aus dem Mittelpunkte T der Erde werde beobachtet werden, finden will, so muß man von der scheinbaren Scheitelweite die Parallaxe abziehen, weil LTZ = LVZ — TLV. So muß man nun auch zur scheinbaren Höhe eines Sterns über dem Horizonte die Parallaxe addiren, um die wahre Höhe desselben im Mittelpunkte der Erde, über einer mit dem scheinbaren Horizont parallel gehenden Ebene zu erhalten.

Erfahrung.

128. Der Schwanz des Löwen und die Aehre der Jungfrauen sind sters von einander 35° 2′, wenn man sie nahe bey dem Meridian zu messen pfleget. Allein wenn der erste nur $34\frac{1}{2}$ Gr. über dem Horizont erhaben ist, stehet die andere beynahe in eben dem Verticalcircul schon in dem Horizont, da sie doch beynahe $\frac{1}{2}$ Grad unter demselben ist. So haben die Holländer, als sie den Winter über hinter der Tartarey verblieben, nach einer Nacht von drey Monaten zu Mittage die Sonne gesehen, da sie doch etliche Grade unter dem Horizont war. Keplerus Epit. Astron. lib. I. part. 3. p. 60. 61.

Zusatz.

129. Weil die Strahlen der Sterne und der Sonne in unsere Augen fallen, wenn sie noch unter dem Horizont sind, und doch nach geraden Linien fortgehen (§. 6. Optik); so müssen sie in der Luft gebrochen werden (§. 14. Opt.), und zwar merklich, da sie nicht allein das Bild des Sternes, sondern der ganzen Sonne über dem Horizont erheben können.

Zusatz.

130. Da nun wegen der Refraction die Sonne höher gesehen wird, als sie würklich stehet; müsset ihr

von den durch den Quadranten gemessenen Höhen der Sonne und Sterne die gehörige Refraction erst abziehen, wenn ihr die wahre Höhe haben wollet.

130a) Wenn ein Stern im Horizonte ist, so wird ein Lichtstrahl, der von ihm nach dem Auge des Beobachters gezogen wird, sehr schief auf den Luftkreis fallen, und daher stärker gebrochen werden müssen, als wenn der Stern höher über dem Horizonte steht, und jener Strahl von dem Sterne also weniger schief auffällt. So ist also die Refraction im Horizonte am grösten, und nimmt ab, so wie sich der Stern dem Zenith des Beobachters nähert. Ist der Stern in dem Zenithe selbst, so wird der Lichtstrahl, der von ihm nach des Beobachters Auge gezogen wird, völlig senkrecht auf den Luftkreis stehen, und daher ungebrochen durchgehen, d. h. im Zenith ist die Refraction = 0.

Aufgabe.

131. Wie hoch ein Stern in jeder Höhe über dem Horizonte durch die Refraction erhoben wird, auszufinden.

Auflösung.

1. Weil die Fixsterne keine merkliche Parallaxe haben, so wähle man einen Stern, welcher im Mittagskreise sehr nahe durch das Zenith des Beobachters gehen würde, und beobachte die Zeit, wenn er im Meridiane ist, so wie seine Mittagshöhe.

2. Weil er nahe beym Zenith nur eine unmerkliche Refraction hat, so findet man aus seiner Mittagshöhe, die Declination, und daraus durch Hülfe der sphärischen Trigonometrie, für jede andere Zeit vor oder nach dem Durchgange des Sterns durch die Mittagsfläche, die wahre Höhe desselben über dem Horizonte.

3. Diese vergleiche man mit der beobachteten Höhe zu jener Zeit, so zeigt der Unterschied, um wie viel der Stern für diese Höhe durch die Refraction erhoben worden ist. (M.)

Zusatz.

Zusatz.

132. Wenn ihr auf alle Grade der Höhe des Sternes die Grösse der Refraction solchergestalt suchet, so werdet ihr die Tabulam Refractionis bekommen, daraus ihr die observirten Sonnen- und Sternenhöhen corrigiren könnet.

132) Man hat auf diese Art gefunden, daß die Refraction eines Sternes in dem Horizonte, oder die **Horizontalrefraction** ohngefähr 30 bis 33 Minuten beträgt. In einer Höhe von 45 Gr. ist aber die R. kaum noch 1 Minute groß. Indessen sind die Refractionen nach dem Zustande der Luft veränderlich, und hängen von der Barometerhöhe und dem Stande des Thermometers ab. Durch Hülfe der höhern Mathematik, und durch gewisse Voraussetzungen in Ansehung der abnehmenden Dichte der Luft von unten nach oben, hat man es aber dahin gebracht, das Gesetz zu finden, wie der Lichtstrahl in den unterschiedenen Luftschichten gebrochen wird, und daraus hergeleitet, wie groß die Refraction in jeder Höhe über dem Horizonte und für jeden Zustand der untern Luft, ist. Nach den Formeln, welche die Theorie hierüber gegeben hat, sind alsdann Tafeln berechnet worden, aus denen man sogleich für jeden Zustand der Luft die Refractionen finden kann. Hieher gehört vorzüglich die von **Tobias Mayer**, in dessen tabulis motuum solis ac lunae, welche 1770. zu London herausgekommen sind. Ueber die Theorie der Formel, wonach diese Tafel berechnet worden ist, sehe man Io. Tob. Mayeri Comment. de refractionibus astronomicis Altorf. 1781. Sonst haben auch de la Grange (Mem. de l'Ac. d. Berlin 1772.) Euler, Lambert, u. a. über die Refractionen geschrieben.

Ende des ersten Theils der Astronomie.

Anfangs-Gründe

der Astronomie.

Der andere Theil,

von der

Betrachtung des Weltgebäudes, wie es von dem Verstande begriffen wird.

Erfahrung.

133.

So bald die Sonne aufgehet, wird es auf unserm Erdboden lichte, und die Körper, welche ihr entgegengesetzet sind, bekommen einen hellen Glanz. Wenn ihr in die Sonne sehen wollet, werden eure Augen geblendet. Sobald sich die Wolken vor die Sonne ziehen, verlieren die Körper ihren Glanz, und die Sonne selbst siehet durch die dünnen Wolken unterweilen nur wie ein silberner Teller aus. Wenn die Sonne untergehet, verlieret sich auch der Glanz an den Körpern, und das Licht verschwindet nach und nach gar.

Zusatz.

134. Die Sonne ist also die Quelle des Lichtes, welches wir den Tag über auf dem Erdboden geniessen; und daher unserer Erde ein **großes Licht**, weil sie nemlich sehr helle machet.

Lehrsatz.

135. Die Sonne ist ein würkliches Feuer.

Beweis.

Beweis.

Sie leuchtet sehr helle (§. 134.), ihre Strahlen machen warm, ja zünden an und schmelzen die härtesten Sachen, wenn sie entweder durch die Reflexion (§. 24. 25. Catoptr.), oder durch die Refraction (§. 11. Dioptr.) in einem engen Raume zusammengebracht werden. Da nun dieses eben die Würkungen sind, daraus man das Feuer erkennet, so hat man nicht zu zweifeln, daß auch die Sonne ein würkliches Feuer sey. W. Z. E.

135a) Wolfs Schlüsse gelten nur, wenn man unter Feuer überhaupt alles versteht, was Licht und Wärme veranlasset. Nimmt man aber Feuer nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche für Flammen, oder für einen würklich brennenden Körper, so hat diese Behauptung bey der Sonne sehr große Schwierigkeiten. Eher könnte man sie für einen blos glühenden Körper halten, weil ihre Scheibe so scharf begränzt sich darstellt, wenn man sie durch ein gefärbtes oder geräuchertes Glas betrachtet. Aber auch diese Behauptung hat sehr starke physikalische Gründe gegen sich. Es folgt gar nicht, daß wenn die Sonnenstrahlen erwärmen, sie deswegen selbst warm seyn müssen. Hat man nicht in der Physik und Chemie unzählige Beyspiele, daß zwey Körper sich erhitzen, ja entzünden können, ohne daß einer von beyden selbst ein würkliches Feuer ist? Könnten nicht die Sonnenstrahlen blos ein Entbindungsmittel für die Wärmematerie seyn, die in den Körpern selbst schon vorhanden ist? In der That erwärmen sie gar nicht, wo sie keinen Wärmestoff vorfinden, und nur sehr wenig, wo sie wenig davon antreffen, wie z. E. in der obern Atmosphäre, wo es nur darum so kalt ist, weil sie zu dünne ist, als daß sie viel Feuermaterie enthalten könnte. Läge die Ursache der Wärme in den Sonnenstrahlen selbst, woher rührte der große Unterschied der Temperatur an unterschiedenen Orten unter gleicher Breite, und an eben dem Orte, zu eben der Jahreszeit, in verschiedenen Jahren, und doch werden Gegenden, welche unter einerley geographischer Breite liegen, von der Sonne auf einerley Weise beschienen. Ueberhaupt bleiben auch gar viele andere Fälle, wo die Sonnenstrahlen in Körpern bald gar keine, bald eine sehr große Hitze hervorbringen, unerklärt, wenn man den Grund der Erhitzung in der ursprünglichen Wärme der Sonnenstrahlen selbst sucht. Alles hieher gehörige ist aber eigent-

lich ein Gegenstand der Physik und nicht der Astronomie, doch habe ich zeigen müssen, daß Wolfs Beweis, die Sonne müsse ein glühender Körper selbst seyn, nicht so gar überzeugend ist. Indessen giebt es doch noch viel neuere Naturlehrer, welche in den Sonnenstrahlen selbst, die Wärmematerie suchen, und die Sonne für einen brennenden Körper halten, (Hube Unterricht in der Naturlehre in Briefen III. B. 10. Brief.)

Erfahrung.

136. Als A. 1611. Johann Fabricius zu Anfange des Jahres, und bald darauf im May Christoph Scheiner, ein Jesuit zu Ingolstadt, durch ein Fernglas die Sonne beschaueten, nahmen sie zuerst einige Flecken in der Sonne wahr, welche nach ihnen auch Galiläus und viele andere Astronomen wahrgenommen, und noch heut zu Tage alle Jahre observiren. Es sehen aber diese Flecken schwarz aus; ihre Figur ist irregulär und veränderlich, wie auch ihre Grösse und Dauer. Scheiner setzet die gröste, welche er im Jenner 1612. observiret, der Venus gleich. Ricciolus (Almag. Nov. lib. 3. c. 8. f. 96.) hat niemals einen grösseren als den zehenden Theil des Diameters der Sonne gesehen. Sie haben 1. 2. 3. 10. 15. 20. 30. und einige wenige 40 Tage gedauret. Sie bewegen sich an der Sonne, und im Rande verschwinden sie, nach 13½ Tagen kommen sie unterweilen auf der andern Seite wieder hervor. Ihre Bewegung ist im Diameter am stärksten; je weiter sie von demselben weg sind, je schwächer. Auch werden sie an dem Rande schmäler, und viele öfters in eins zusammengezogen, da sie mitten in der Sonne viel breiter und von einander abgesondert erscheinen. Hevelius (Cometogr. lib. 7. f. 424.) erzählet von zwey Flecken,

daß

daß sie im Anfange sehr klein und dünne gewesen, innerhalb zwey Tagen aber zehenmal so groß, und dabey viel dichter und dunkeler als vorhin geworden. Die meisten Flecken sind mitten dichte, um den Kern herum dünner, und endlich gleichsam mit einem Nebel umgeben. Hevel (l. c. f. 408 seqq.) merket an, daß der Kern wächset und abnimmt, auch meist beständig mitten im Flecken bleibe, und wenn der Flecken bald verschwinden will, in viel Stücke zergehe: gleichwie auch unterweilen in einem Flecken viele Kerne gesehen werden, die öfters in einem zusammen gehen. Kircher hat A. 1684. von den 6ten April an bis zu dem 17. Jun. einen Flecken in der Sonne gesehen, den auch zu gleicher Zeit Cassini zu Paris observiret. Ja die Flecken, welche der P. Jartoux zu Peckin in China A. 1701. von dem 1. bis zu dem 12. Nov. an der Sonne angetroffen, hat der jüngere Cassini zu Montpellier von dem 31. Oct. bis zu dem 12. Nov. darinnen gesehen. Vid. Acta Erudit. A. 1705. pag. 483. & Memoires de l' Acad. Royale des Sciences 1701. p. m. 345. Hevel, welcher in seinem Mercurio in Sole viso f. 106. wahrgenommen, daß Mercurius, als er in der Sonne erschien, 27″ niedriger stand, da die Sonne untergehen wollte, als wie sie hoch über dem Horizont war, hat dergleichen bey den Sonnenflecken nicht verspüret.

Zusatz.

137. Weil Mercurius durch die Parallaxin in dem Horizont niedriger gesehen worden (§. 136.); so haben die Sonnenflecken in Ansehung der Weite der Sonne von der Erde keine Parallaxin, müssen also derselben sehr nahe, und von unserer Erde weit weg seyn (§. 125.).

137a) Hiezu kömmt noch, daß weil die Flecken immer schmäler erscheinen, je mehr sie sich dem Sonnenrande nähern, sie auf der Oberfläche der Sonne selbst, oder doch sehr nahe über ihr, sich befinden müssen. Wären sie viel über der Sonnenfläche erhaben, so müßten sie uns am Rande einen eben so großen Theil der Sonne, als in der Mitte bedecken.

Zusatz.

138. Da sie nun nicht allein oft mitten in der Sonne ihre Figur und Grösse verändern, sondern auch bald dichter, bald dünner werden, ja mitten in der Sonne entstehen und verschwinden, so könnten sie vielleicht aus den Ausdünstungen der Sonne entstehen und Sonnenwolken seyn.

138a) Aber würden Sammlungen lockerer Dünste das Sonnenlicht wohl so hindern, daß wo sich ein Flecken zeigt, alles ganz schwarz aussieht? Eher könnte man den Nebel um einen Flecken mit Wolken vergleichen, doch müßte man dabey bedenken, daß diese Wolken immer etwas ganz anders, als was die Wolken auf unserer Erde sind, seyn könnten.

Zusatz.

139. Dann müßte aber auch die Sonne wohl mit einer Art von Luft umgeben seyn, in der diese Ausdünstungen wie die Wolken in unserer Luft, schwebten. Das Zodiacallicht, m. s. oben (§. 116. a) wäre dann vielleicht blos eine Fortsetzung dieser Atmosphäre oder Sonnenlicht, was von den Dunsttheilchen dieser Atmosphäre zurückgeworfen würde. Daß einige Flecken würklich atmosphärischen Ursprungs seyn müssen, hat Hrn. Oberamtmann Schröder in Lilienthal, dem wir überhaupt sehr viele andere interessante Entdeckungen und Bemerkungen über die Sonnenflecken zu verdanken haben, (man s. Bode astr. Jahrb. 1792. und Joh. Hieron. Schröters Beobachtungen über die Sonnenfackeln und Sonnenflecken, nebst Bemerkungen über scheinbare Fläche, Rotation und Licht der Sonne. Erfurt 1792.) sehr wahrscheinlich zu machen gesucht. (M.)

Zusatz.

140. Nach der Meynung anderer sind die Sonnenflecken vulcanische Auswürfe dunkeler Massen aus dem innern des Sonnenkörpers, welche durch die Hitze auf der Oberfläche der Sonne nach und nach wieder aufgelößt würden. Andere halten die Flecken für tiefe Gruben, welche von Zeit zu Zeit entständen und wieder vergiengen. Hr. Prof. **Bode** hält die Sonne für einen dunkeln Körper, der wie unsere Erde Berge und Thäler habe, aber mit einer Lichtmaterie umgeben sey, welche um selbigen, wie die Luft um unsern Erdball ströme. Diese **Photosphäre** ziehe sich zuweilen auf der Sonne hie und da zurück, und so entständen Oeffnungen in ihr, durch die man Theile von der dunkelen Sonnenoberfläche sehen könne, die sich dann als dunkele Flecken zeigten. Hiedurch erklärt Hr. B. sehr glücklich die meisten Erscheinungen und Veränderungen der Flecken. M. s. dessen Anleitung zur Kenntniß des gestirnten Himmels, Berlin 1777. S. 626. Ueberhaupt sieht man aber wohl, daß der Sonnenkörper auf seiner Oberfläche mancherley Veränderungen ausgesetzt seyn muß, und da wir übrigens nicht nöthig haben, ihn für einen brennenden Körper zu halten (§. 135 a) so kann er auch gar wohl bewohnt seyn. (M.)

Zusatz.

141. So lange man Flecken beobachtet hat, haben sie sich immer nach einerley Richtung, nemlich von Osten nach Westen durch die Sonnenscheibe bewegt. Da nun die meisten wahrscheinlich auf der Oberfläche der Sonne selbst sich befinden, so kann man annehmen ihre gemeinschaftliche Bewegung rühre von einer Umdrehung der Sonnenkugel um eine gewisse Axe her, und ihre Bewegung sey also nur scheinbar. Nach dieser Voraussetzung bleibt nichts unerklärt, was die Beobachtungen über die Bahn dieser Flecken gelehrt haben.

Zusatz.

142. Die Sonnenkugel hat also auch ihren Aequator, und wenn man aus den Beobachtungen der Flecken die Umwälzungszeit der Sonne um ihre Axe berechnet, so findet man 25 Tage 10 bis 14 Stunden. Die Axe selbst macht mit der Ecliptik einen Winkel von etwa $82\frac{1}{2}$ Graden. Uebrigens haben die Beobachtungen keinen merklichen Unterschied zwischen dem verticalen und horizontalen Durchmesser der Sonne gegeben, und man nimmt sie daher für eine vollkommene Kugel an. (M.)

Erfahrung.

143. Es reden auch viele von Fackeln in der Sonne, das ist, einigen Theilchen derselben, die viel heller als die andern leuchten. Hevel will Selenogr. Prolegom. f. 87.) den 20. Jul. 1634. einige observiret haben, die den dritten Theil des Diameters der Sonne eingenommen. Auch will er wahrgenommen haben, daß die Flecken sich öfters in Fackeln, selten aber die Fackeln in Flecken verwandelt. Vid. Appendix ad Selenograph. f. 505. 509. Hugenius erinnert in seinem Colmoth. lib. 2. p. m. 107. daß er niemals dergleichen finden können, sondern nur in der wölkichten oder nebelichten Materie um die Flecken, dergleichen auch bisweilen sich allein sehen lässet, einige Theile heller als die Flecken erblicket. Auch schreibet er die kleine Ungleichheit, welche zuweilen an dem Rande der Sonne sich zeiget, der Bewegung der Dünste in unserer Luft zu.

143 a) Ueber diese Sonnenfakeln s. Hrn. Schröters oben (§. 139.) angeführte Schrift.

Anmerkung.

144. Ich halte demnach das Bildniß der Sonne für erdichtet, welches Scheiner und Kircher abgemahlet, und Zahn nebst andern aus ihnen genommen.

Anmer-

Anmerkung.

145. Um die Sonnenflecken zu beobachten, betrachtet man die Sonne durch ein Fernrohr oder Telescop, vor dessen Ocularglase, in einer besondern Fassung ein gefärbtes, oder von Rauch geschwärztes ebenes Glas angebracht wird, um durch das Sonnenlicht nicht geblendet zu werden. Sonst hat man auch das Sonnenbild durch ein astronomisches Fernrohr in ein verfinstertes Zimmer, auf ein weises Blatt Papier fallen lassen, und die Lagen der Flecken gegen einander, so gut sichs thun liess, mit Bleystift darauf bemerkt. Am besten bestimmt man aber Grösse, Lage und Bewegung der Flecken durch **Micrometer**, man s. unten (§. 182.) (M.)

145a) Röslers prakt. Astr. §. 236.

145b) Nöthige Vorschrift, daß man in einem Fernrohre nicht etwas für einen Flecken hält, was keiner ist.

Erfahrung.

146. **Unterweilen verlieret die Sonne bey hellem Himmel ihren Schein nach und nach, meistens nur in einem Theile. Es lässet aber nicht anders, als wenn eine schwarze Scheibe von Abend gegen Morgen in die Sonne hinein rückete. Und zwar geschiehet solches zu der Zeit, wenn die Sonne und der Mond in Einem Orte des Himmels gesehen werden, oder im Neumonde. Insbesondere ist merkwürdig, daß der verfinsterte Theil der Sonne nicht an allen Orten gleich groß ist, und daß denen, die weiter gegen Abend liegen, die Sonne eher scheinet ihr Licht zu verlieren, als denen gegen Morgen: hingegen auch in dem ersten Orte ihr Licht geschwinder wieder bekommet, als in dem andern.**

Zusatz.

147. **Weil die Sonne nicht an allen Orten des Erdbodens zu gleicher Zeit, auch nicht gleich viel von ihrem Lichte verlieret, so kann es keine würkliche Berau-**

bung

bung des Lichtes seyn, sondern es muß nur ein dichter und schattichter Körper zwischen unser Auge und die Sonne treten, welcher die Sonnenstrahlen nicht durchlässet, und so weit als die Sonne von uns zu seyn scheinet, ob er gleich in der That von ihr weit weg seyn kann (§. 55. Optik).

Zusatz.

148. Dieser Körper muß rund seyn, weil er sich als eine Scheibe auf der Sonne darstellet.

Zusatz.

149. Da nun der Mond sich von Abend gegen Morgen beweget (§. 37.), und zu der Zeit, da die Sonne ihr Licht verlieret, zwischen der Erde und der Sonne kommet (§. 146.), er auch, wenn er voll ist, wie eine runde Scheibe aussiehet, so ist kein Zweifel, daß nicht der Mond derjenige Körper sey, welcher uns auf eine Zeit des Sonnenlichtes beraubet. Und muß daher der Mond das Licht der Sonne nicht durchfallen lassen, und also ein dichter schattichter Körper seyn.

Erklärung.

150. Die Sonnenfinsterniß **ist eine Bedeckung der Sonne von dem Monde, welcher zwischen der Erde und der Sonne stehet.**

Erfahrung.

151. Als die Sonne A. 1706. verfinstert ward, sahe man einen Ring um den Mond, der mit seinem Rande parallel war, nahe an dem Monde dichte aussahe, aber immer dünner wurde, bis er sich in einer völligen Peripherie unvermerkt verlohr. Der Herr von Tschirnhausen in Dresden hat durch ein sechzehenschuhiges Fernglas wahrgenommen, daß kurz vor dem Anfange der Finsterniß das Sonnenlicht an dem Orte zu zittern angefangen, wo der Mond ein-

gerücket. Eben dergleichen hat er in dem letzten Zolle des Sonnenlichtes angemerket, als er verfinstert war, und ich habe es zu anderer Zeit in dem Rande der Sonne durch ein achtschuhiges Fernglas observiret, da sie aus den Wolken an dem Horizont hervorbrach, und nach langem Regen die Luft voller Dünste war, welches aber verschwand, als die Sonne höher stieg, und die Dünste in der Luft zertheilte. Dergleichen Ring hat man auch in England A. 1711. in einer großen Sonnenfinsterniß observiret.

151a) Wolf und andere haben aus diesem Ringe eine **Atmosphäre des Mondes** folgern wollen. Allein er kann auch blos von der **Beugung** des an dem Mondrande vorbeyfahrenden Sonnenlichtes herrühren (§. 47. Dioptr.) Ein ähnlicher Ring zeigt sich um jeden Körper, mit dem man sich die Sonne verdeckt, oder das Sonnenlicht um ihn in ein verfinstertes Zimmer fallen läßt. Das Zittern des Sonnenlichtes kann ein Erfolg von Dünsten unserer Atmosphäre seyn, wie das **Blinkern der Fixsterne**, und das Zittern der Gegenstände, die man durch ein stark vergrösserendes Fernrohr betrachtet. Ob aber überhaupt der Mond einen Luftkreis habe, darüber sind die Meynungen sehr getheilt. **Tobias Mayer** läugnete ihn. Nach neuern Beobachtungen des Hrn. Oberamtmann **Schröter**, und nach Gründen, denen man den Beyfall nicht versagen kann, **ist eine solche Atmosphäre um den Mond wahrscheinlich.** Doch muß man die Aehnlichkeit derselben, mit der unserer Erde, nicht so weit treiben, wie Wolf, der auf dem Monde sogar regnen, schneyen und hageln läßt. Auf dem Monde, so wie auf andern Weltkörpern, giebt es unstreitig ganz andere Materien, welche luft- und dunstförmig werden können, als auf unserer Erde, und was daher aus der Mondatmosphäre niederfällt, darf nicht mit **unsern** Lufterscheinungen verglichen werden.

Tob. Mayers Beweis, daß der Mond keinen Luftkreis habe, in den kosmographischen Sammlungen. Nürnb. 1748.

J. H.

J. H. Schröters selenotopographische Fragmente, 2. Abschn. 5. Abth. Ebendess. Beobachtung einer Mondatmosphäre in den Gött. Gel. Anz. 1792. 86. Stük, und 1795. 122stes Stück.

Erfahrung.

152. Wenn der Mond nach dem Untergange der Sonne nahe bey dem Horizont gesehen wird, so ist nur ein kleiner Theil erleuchtet. Je weiter er von der Sonne wegrücket, je ein grösserer Theil wird lichte. Wenn er 180 Grad, oder den halben Himmel, von der Sonne weg ist, und ihr in Ansehung unserer Erde gegenüber stehet, so hat der ganze Mond Licht. Gehet er weiter fort, und kommet die Sonne wieder näher, so nimmt das Licht wieder ab, bis er es endlich ganz verlieret, wenn er wieder zu der Sonne kommet. Es ist aber, so lange das Licht zunimmet, der lichte Theil gegen Abend, wenn es abnimmet, gegen Morgen gekehret. Auch ist merkwürdig, daß man auch den finstern Theil des Mondes sehen kann, wenn er noch nicht die Hälfte Licht hat, und siehet er wie ein sehr blasses Wölklein aus.

Erklärung.

153. Wenn der Mond zu der Sonne kommet und kein Licht hat, nennen wir ihn den Neumond; wenn die Hälfte gegen Abend Licht hat, das erste Viertel; wenn er ganz hell ist, den Vollmond; endlich wenn die Hälfte gegen Morgen scheinet, das letzte Viertel.

Erfahrung.

154. Der Mond verlieret zuweilen bey hellem Himmel, wenn er mit vollem Lichte scheinen soll, sein Licht entweder ganz, oder zum

Theil. Es lässet aber nicht anders, als wenn eine dunkele Scheibe von Morgen gegen Abend in den Mond einrückete. Auch ist merkwürdig, daß allen Bewohnern der Erde in einerley Augenblicke ein gleich großer Theil des Mondes verfinstert erscheinet, auch der Mond zu selbiger Zeit entweder in der Ecliptik, oder sehr nahe bey derselben ist.

Zusatz.

155. Wenn der Mond mit vollem Lichte scheinet, so stehet die Erde zwischen ihm und der Sonne (§. 152.). Die Erde wirfet einen Schatten der Sonne gegen über (§. 34. Optik). Da sie nun in der Ecliptik stehet (§. 45.); so fället ihr Schatten gegen den Grad der Ecliptik, welcher von dem Orte 180 Grad entfernet ist. Derowegen da bey diesem Grade sich der Mond befindet, wenn er sein Licht verlieret, so ist keinesweges zu zweifeln, daß die Ursache der Beraubung des Mondenlichtes daher rühre, weil er in den Schatten der Erde kommt.

Zusatz.

156. Weil der Mond in dem Schatten der Erde des Lichtes beraubet wird, damit er die Erde erleuchtet, so kann dieses Licht nicht sein eigen seyn, sondern er muß es anders woher haben, und zwar von der Sonne, weil der erleuchtete Theil beständig gegen sie gekehret ist (§. 152.).

Erklärung.

157. **Die Mondfinsterniß ist eine Verdunkelung des Mondes durch den Schatten der Erde, darein er kommt.**

Erfahrung.

158. In einigen Finsternissen ist der Mond bey hellem Himmel, da man die kleinesten Fix-

sterne

sterne gar wohl sehen konnte, ganz verschwunden, so daß man den Ort auch durch die besten Ferngläser nicht finden können, wo er gestanden. Dergleichen hat Kepler A. 1580. und 1583. (Astron. Opt. p. 227.) A. 1601. (l. c. p. 279.) und 1620. (Astron. Copernic. lib. 5. p. 825) imgleichen Hevel (Selenogr. cap. 6. f. 117.) observiret. Als eben dieses in einer Mondfinsterniß 1642. d. 14. Apr. Ricciolus mit vielen Jesuiten zu Bononien, imgleichen viele durch ganz Holland wahrnahmen, wurde der Mond doch zu Venedig und Wien gesehen, und zwar sahe er in dem ersten Orte ganz roth aus. Vid. Ricciolus Almag. Nov. lib. 4. c. 6. Schol. 4. f. 203.). In der Mondfinsterniß, welche sich den 23. Decemb. 1703. ereignete, sahe der Mond in der gänzlichen Verfinsterung zu Arles dunkelroth und braun, zu Avignon hingegen hellroth aus, ja so helle, als wenn er durchsichtig wäre, und die Sonne von der andern Seite durchschiene. Zu Marseille sahe er gegen Nordwest röthlich, und gegen Südost ganz dunkel aus, und verschwand völlig bey ganz hellem Himmel.

Zusatz.

159. Weil die Farben des Mondes nicht beständig einerley sind in seiner Verfinsterung, ja zu einer Zeit an verschiedenen Orten nicht einerley Farben, und in einigen gar keine gesehen werden, so können sie dem Monde nicht eigenthümlich seyn.

Zusatz.

160. Da nun keine Farben seyn können, wo kein Licht ist (§. 46. u. seq. Opt.); so muß der Mond auch in den Erdschatten noch einiges Licht haben. Und da die Strahlen dieses Lichtes in der Luft gebrochen werden, dadurch sie in unsere Augen fallen (§. 129.); so müssen sie

an

an verschiedenen Orten auf verschiedene Art gebrochen werden, denn sonst könnten sie nicht in verschiedene Farben verwandelt werden. Derowegen entstehen die verschiedenen Farben des Mondes in seiner Verfinsterung von der verschiedenen Beschaffenheit der Luft an verschiedenen Orten.

Zusatz.

161. Weil die Strahlen der Sonne in unserer Luft gebrochen werden, so fahren sie auch hin und wieder durch den Erdschatten durch, und zwar um so viel mehr, je stärker die Refraction ist, folgends hat der Mond in dem Erdschatten viel oder wenig Licht, nach der Beschaffenheit der Luft, die von der Sonne erleuchtet wird. Derowegen können die Farben an einem Orte in verschiedenen Zeiten unterschieden seyn, obgleich die Luft daselbst einerley Beschaffenheit hat.

Erfahrung.

162. Der Mond siehet sowohl den blossen Augen, als durch ein Fernglas, an einem Orte heller, als in dem andern aus. Wenn ihr durch ein Fernglas den zu- und abnehmenden Mond betrachtet, so siehet die Peripherie, darinnen sich das Licht endet, in den hellen Orten höckericht, in den dunkelen aber gleich und eben aus. In den großen Flecken findet man hin und wieder kleine helleuchtende Theile. Absonderlich aber sind zwey Dinge merkwürdig: nemlich 1) daß einige Theile in dem Monde erleuchtet werden, die von dem erleuchteten Theile abgesondert sind, und in dem noch finsteren liegen: 2) daß ausser den grossen Flecken, die man mit bloßen Augen sehen kann, durch die Ferngläser noch andere kleine entdecket werden, welche von Tage zu Tage, ja von Stunde zu

Stunde ihre Grösse, Figur und Stelle ändern, sich in die Runde herum bewegen, und stets der Sonne entgegengesetzt sind. Dieses alles wird vom Hevelio in seiner Selenographia umständlich gewiesen.

Zusatz.

163. Alle Theile des Mondes werden von der Sonne auf gleiche Art erleuchtet. Da sie nun aber nicht helle aussehen, können sie nicht auf einerley Art die Sonnenstrahlen zurücke werfen, und sind dannenhero auch selbst von verschiedener Art.

Zusatz.

164. Weil die Peripherie, darinnen sich das Licht endet, in den Flecken gleich und eben ist, so müssen die Theile des Mondes, welche weniger Licht als die anderen zurücke werfen, auch selbst gleich und eben seyn.

Zusatz.

165. Die Theile, welche eher erleuchtet werden, als andere, die dem erleuchteten Theile des Mondes näher liegen, müssen höher als sie seyn.

Zusatz.

166. Die veränderlichen Flecken haben alle Eigenschaften des Schattens (§. 35. 39. 43. 44. 45. Optik).

Erfahrung.

167. Hevel (Cometograph. lib. 7. f. 363.) hat zu verschiedenen malen wahrgenommen, daß der Mond und seine Flecken nicht klar und helle, wie zu anderer Zeit, ausgesehen; unerachtet er einerley Weite von der Erde und einerley Höhe über dem Horizont gehabt, und der Himmel allenthalben so helle gewesen, daß er die Sterne von der sechsten und siebenten Grösse

se sehen können, über dieses sich eben des Fernglases bedienet, damit er sonst den Mond zu observiren gewohnt gewesen.

Zusatz.

168. Aus den Umständen der Observation erhellet, daß die Ursache, warum der Mond zu einer Zeit dunkeler ausgesehen, als zu der andern, in etwas zu suchen sey, welches nahe um den Mond gewesen, und gehindert, daß man deutlich durchsehen können.

168 a) Vielleicht also in der Mondatmosphäre.

Erfahrung.

169. Cassini (Memoires de l' Acad. Royale de Sciences An. 1706. p. m. 327.) hat öfters observiret, daß, wenn Saturnus, Jupiter und einige Fixsterne von dem Monde bedecket worden, die Figur etwas länglicht worden, indem sie dem Rande des Monds nahe gekommen, sowohl auf der erleuchteten als finstern Seite desselben. Hingegen hat er auch sehr oft ihre Figur unverändert gesehen.

Zusatz.

170. Weil die Figur der runden Körper durch die Refraction der Strahlen, die von ihnen in das Auge fallen, in ein Oval verwandelt wird, so muß in dem ersten Falle eine dichte Materie um den Mond gewesen seyn, darinnen die Strahlen der Sterne gebrochen worden: in dem andern Falle aber muß sie nicht mehr daselbst anzutreffen gewesen seyn.

Anmerkung.

171. Wollet ihr zweifeln, ob diese Veränderung der Figur von der Refraction verursachet werden könne, so kleibet einen runden Circul von Papier mit Wachs inwendig an ein Glas, oder an ein anderes Gefässe, und giesset Wasser darein. Durch das Wasser wird euch der Circul wie ein Oval aussehen.

Daraus verstehet ihr zugleich, warum die Sonne und der Mond im Horizonte wie ein Oval aussehen, wenn die Luft daselbst sehr dunstig ist.

171 a) Es ist ausgemacht, daß die Erscheinung (§. 169.) auch von der Beugung der Lichtstrahlen herrühren kann.

Lehrsatz.

172. Der Mond ist ein dichter und dunkeler Körper, der viele Berge, Thäler und Meere hat.

Beweis.

In den Sonnenfinsternissen tritt der Mond zwischen die Sonne und die Erde (§. 146.), und wird also von ihr auf der von uns weggekehrten Seite beschienen. Wenn er nun durchsichtig wäre, würden die Strahlen der Sonne durchdringen und einen hellen Glanz in dem Monde verursachen. Er siehet aber vielmehr in gänzlichen Verfinsterungen der Sonne ganz schwarz aus (§. 151.). Derowegen muß er ein dichter und dunkeler Körper seyn. **Welches das erste war.**

An der Mondfläche sind einige Theile über die andern erhaben (§. 165.), und zwar merklich, denn sonst könnten wir sie in der Weite nicht sehen (§. 25. Optik.). Die erhabenen Theile nennen wir Berge, die tiefen Thäler. Derowegen sind in dem Monde Berge und Thäler. **Welches das andere war.**

Wir finden in dem Monde große Plätze, die weniger Licht als die andern zurücke werfen, und dabey gleich und eben sind (§. 164.). Nun haben die flüßigen Körper eine ganz gleiche und ebene Fläche, und werfen weniger Licht zurücke als die Erde, weil sie durchsichtig sind, und einen Theil der Strahlen durchfallen lassen. Derowegen müssen die beständigen Flecken des Mondes eine flüßige Materie, und zwar, weil sie keine Farben haben, auch sich niemals ändern, Wasser seyn. Demnach

giebt

giebt es Meere im Monde. Welches das dritte war.

172a) Daß die dunkeln großen Plätze auf dem Monde Meere seyn müssen, daß möchte denn doch nicht so ganz aus Wolfs Schlüssen folgen. Es giebt ohne Zweifel auch feste Materien, welche bey einerley Beleuchtung dunkeler als andere aussehen. Da indessen Hevel in seiner Selenographia mehreren dunkeln Flecken den Nahmen von Meeren gegeben hat, so kann man ihnen unter der gehörigen Einschränkung diese Nahmen lassen. Wahrscheinlicher sind große Thalgegenden, die aber doch öfters auch noch Unebenheiten haben, wie die Lichtstreifen ausweisen, die man darinn entdeckt, welche durch ihren Schatten zu erkennen geben, daß sie niedrige Bergdämme sind. Auch ist der Schatten der Gebirge auf diesen Ebenen viel schärfer begränzt, als er auf einer Wasserfläche seyn könnte.

Zusatz.

173. Solchergestalt sind die hellen Plätze in dem Meere Insuln.

Zusatz.

174. Da man aber auch erhabene Oerter in den Meeren des Mondes und an den Ufern observiret, so sind darinnen große Steinklippen und Vorgebürge.

Anmerkung.

175. Ihr werdet diesen Schlüssen desto sicherer trauen, wenn ihr euch mit Heveln (Selenogr. cap. 6. p. 48.) auf einem hohen Thurm oder Berge umsehen wollet. Denn wo das Land eben ist, wird der Horizont auch gleich und eben, wo jenes aber bergicht und felsicht ist, wird dieser ungleich und zackicht seyn.

Zusatz.

176. Ihr könnet nicht zweifeln, daß die veränderlichen Flecken, welche lauter Eigenschaften des Schattens haben (§. 166.) würklicher Schatten der Berge und Felsen sind.

Zusatz.

177. Weil die Berge in dem Monde einen Schatten werfen, so siehet man auch daraus, daß er ein vor sich finsterer und undurchsichtiger Körper sey.

Zusatz.

178. Derowegen wirfet er auch beständig einen Schatten hinter sich der Sonne gegen über (§. 34. Optik).

Zusatz.

179. Wenn also eine Sonnenfinsterniß ist, so kommet die Erde in den Schatten des Mondes (§. 150.), gleichwie der Mond in seiner Verfinsterung in den Schatten der Erde tritt (§. 155.). Demnach ist die sogenannte Sonnenfinsterniß in der That eine Erdfinsterniß.

Anmerkung.

180. Wer die Nahmen der verschiedenen hellen und dunkeln Mondflecken kennen lernen will, bediene sich der **Charten**, welche **Hevel**, **Riccioli**, und **Tobias Mayer** von der Mondoberfläche gegeben haben. Die von Hevel und Riccioli finden sich auch im Doppelmairischen Himmelsatlas. Hevel hat den Flecken und Bergen Nahmen von Meeren und Bergen unserer Erde gegeben. Riccioli hat sie nach Nahmen berühmter Astronomen und Physiker getauft. Die Sternkündiger bedienen sich gewöhnlich der letztern. Die Charte von **Tobias Mayer**, in dessen opp. ineditis, welche durch Hrn. Hofrath **Lichtenberg** in Göttingen besorgt worden, ist eigentlich keine Vollmondscharte, sondern aus den Erscheinungen der einzeln Mondsbrüche beym Ab- und Zunehmen desselben gezeichnet worden. Die Flecken sind aber darinn mit sehr großer Genauigkeit bestimmt, und wie in der Geographie durch Längen und Breiten in Ansehung des Mondäquators angegeben. — (**Mayers** Abh. über die Umwälzung des ☽ um seine Axe in den kosmogr. Samml. 1748. IV. Abh.) **Mondkugeln**, welche er verfertigen wollte, sind aber nicht zu Stande gekommen.

Neuere vortrefliche Zeichnungen und Bemerkungen über Mondsgegenden hat Hr. **Schroter** in oben (§. 151a) angeführten Meisterwerke nebst sinnreichen Muthmaßungen über die Natur und Beschaffenheit der Mondoberfläche gegeben. Merkwürdig

würdig ist, daß sehr viele Flecken einen hellen erhabenen Ring oder Rand um sich haben, und wie die vulkanischen Trichter und Becken auf unserer Erde gestaltet sind. Ueberhaupt zeigt die Beschaffenheit der ganzen Mondoberfläche deutliche Spuren von vorgegangenen heftigen Naturwürkungen. Hier giebt es vulcanartige Tiefen von einigen 1000 Klaftern, bey einem Durchmesser von mehreren Meilen. (Schröters Beyträge zu den neuesten astronomischen Entdeckungen, herausgegeben von Bode 1788.) Oft greifen kleine Ringgebürge in den Wall der Grössern ein, und in jene wieder kleinere, eben so wie die vulcanischen Trichter auf unserem Aetna. Indessen von noch würklich vorhandenen brennenden Vulcanen, welche Hr. Herschel bemerkt haben wollte, hat doch Hr. Schröter nichts deutliches wahrgenommen, und die hellen Lichtpünktchen auf der dunkeln Seite des Monds, welche dafür gehalten worden sind, mögen wahrscheinlich nur solche Theile des Mondes seyn, welche das auf sie fallende **Erdenlicht**, stärker, als die umliegenden, zurückwerfen. So lassen sich denn durch diese hellen Punkte auch wohl die Erscheinungen erklären, welche **Halley**, **Louville** und **Ulloa**, bey Sonnenfinsternissen wahrgenommen, und theils für Blitze, theils für Löcher in dem Monde, gehalten haben. Ueberhaupt über Vulcane im Monde. **Bode** astr. Jahrb. 1792. (M.)

Anmerkung.

181. I. Der Mond zeigt der Erde beständig einerley Seite, weil wir nur immer dieselben Flecken sehen. Wir kennen also nur die eine Hälfte von der Oberfläche des Mondes, die andere erblicken wir nie, ungeachtet sie von der Sonne eben so gut beleuchtet wird, als die uns zugekehrte Hälfte. Und so kömmt denn auch den Mondbewohnern auf jener Hälfte nie unsere Erde zu Gesichte. Indessen sind doch die Gränzen zwischen diesen beyden Hälften nicht ganz unveränderlich, und schon **Galiläi** bemerkte, daß an dem Rande der Mondscheibe hie und da Flecken der andern Hälfte zum Vorschein kommen, indem von der diesseitigen an dem entgegengesetzten Rande welche verschwinden, die man vorher erblickte. Diese Veränderung bemerkt man sowohl an dem östlichen und westlichen, als auch an dem nördlichen und südlichen Rande der Mondscheibe. Man heist diese periodische Verrückung oder Bewegung bald nach der einen bald nach der andern Seite, das **Schwanken des Mondes**, oder die **Libration**, und sie ist der Erfolg des Winkels, den seine Bahn mit der Ecliptik macht, und seiner

ungleichförmigen Bewegung um die Erde, läßt sich aber hier nicht vollständig erklären. M. s. hierüber Tob. Mayers oben (§. 180.) angeführte Abh. in den kosmogr. Nachr. und de la Lande Astr. 2. Ausg. §. 3187.

II. Daß sich übrigens der Mond um eine gewisse Axe drehen müsse, ohngeachtet er uns immer dieselbe Seite zukehrt, folgt daraus, weil er sich in 27 bis 28 Tagen um die Erde bewegt. Denn drehete er sich nicht innerhalb eben dieser Zeit auch um seine eigene Axe, so müßte er uns nach und nach einen jeden Theil seiner Oberfläche zukehren, wie ein kleines Nachdenken sehr bald zeigen wird. **Es ist also die Zeit in der sich der Mond um seine Axe dreht, derjenigen gleich die er braucht um die Erde zu kommen,** kleine Abweichungen abgerechnet, die hier nicht vorgetragen werden können. (M.)

Aufgabe.

182. Ein Mikrometer, d. i. ein Werkzeug anzugeben, wodurch man die scheinbaren Grössen (Opt. §. 51 a) von allerley kleinen Gegenständen am Himmel, messen kann.

Auflösung.

I. 10. 1. In dem Brennpunkte des Objektivglases eines astronomischen Fernrohres befestiget einen Ring von Messing A B.

2. Durch diesen schraubt zwey Schrauben C und D gleichfalls von Messing (oder auch Stahl) mit sehr engen und gleichen Gängen, die bis zum Mittelpunkte des Ringes zusammengeschraubt werden können. So ist das Instrument fertig.

Beweis.

Zählet nach einer accuraten Pendikeluhr die Minuten und Secunden, die ein Stern, der im Aequator ist (z. E. δ des Orions oder x der Fische u. d. g.) braucht, um in dem unbeweglichen Fernrohre von dem Ende E der einen Schraube bis zu dem Ende F der andern zu kommen,

und

und verwandelt sie nach (§. 67 a) in Minuten und Secunden des Aequators. Zählet dann auch, wie oft ihr die Schrauben umdrehen müsset, bis sie zusammenstossen, so wisset ihr wie viel Schraubengewinde, auf eine Minute des Aequators, oder auf eine scheinbare Grösse von einer Minute gehen, und könnet daher ein Täfelein ausrechnen, darinn einer jeden Zahl der Gewinde ihre zugehörige Secunden, oder scheinbare Grössen, zugeeignet werden. Wenn ihr nun z. E. nach dem verfinsterten Monde sehet, und die Schrauben dergestalt richtet, daß sie beyderseits die äussersten Punkte an der Peripherie des Mondes berühren, wo das Licht sich endiget, so dürfet ihr nur zählen, wie vielmahl die Schrauben umgewendet werden müssen, bis sie zusammenstoßen; diese Zahl zeiget in dem verfertigten Täfelein die scheinbare Grösse der Sehne des verfinsterten Theiles in Minuten und Secunden. Solchergestalt könnet ihr durch dieses Instrument die Kleinigkeiten am Himmel messen, die sich durch Octanten, Sextanten, Quadranten u. d. g. nicht messen lassen. W. Z. E.

Zusatz.

183. Durch dieses Instrument könnet ihr die scheinbare Länge der Schatten, den die Berge in dem Monde werfen, und der Meere, imgleichen die Weite der Spitze eines Berges, die erleuchtet wird, von dem erleuchteten Theile des Mondes messen.

Anmerkung.

184. **Hevel** (Selenogr. c. 8. f. 266.) hat sie in verschiedenen Bergen $\frac{1}{58}$, in andern nur $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{34}$, ja $\frac{1}{40}$ des scheinbaren Diameters des Mondes, und an einigen noch geringer gefunden.

184 a) I. Wolf hat (§. 181.) das Micrometer beschrieben, welches Christfried Kirch zu Berlin im Jahre 1679. erfunden hat. Es ist unter dem Nahmen des **Schraubenmicrometers** bekannt. Beym Gebrauche desselben sind

noch allerley Vorsichten zu beobachten, die man umständlich bey den Schriftstellern über die practische Astronomie findet. Hier reicht es hin die Möglichkeit einzusehen, wie man durch Vorrichtungen dieser Art sehr kleine scheinbare Grössen an dem Himmel messen kann. Die Hauptsache kömmt immer darauf an, daß man auf das genaueste die scheinbare Grösse weiß, die einer Schraubenumdrehung entspricht, und dazu lassen sich noch mehrere Vorschriften erdenken, als Wolf angegeben hat. Man kann z. B. einen Stab von bekannter Länge auf einer Horizontalebene abstecken, und sich nun so weit von ihm entfernen, daß man annehmen darf, das Bild desselben falle in den Brennpunkt des nach ihm gerichteten Fernrohres, also an die Stelle, wo sich das Schraubenmicrometer befindet. Mißt man nun des Stabes Weite von dem Objectivglase des Fernrohres, so läßt sich aus dieser und des Stabes Länge, die scheinbare Grösse desselben $= \alpha$, trigonometrisch finden. Wenn nun dieser Stab, durch das Fernrohr betrachtet, n Umdrehungen des Schraubenmicrometers zwischen sich faßte, so würde einer Umdrehung entsprechen eine scheinbare Grösse von $\frac{\alpha}{n}$ Secunden, wenn α durch Secunden ausgedrückt worden wäre. So könnte man hieraus denn ebenfalls eine Tafel wie (§. 181.) berechnen.

II. Statt des Schraubenmicrometers bedient man sich jetzt vortheilhafter des Micrometers, welches Tob. Mayer erfunden, und in den kosmograph. Samml. beschrieben hat. Es besteht (Fig. 25. Tab. V.) aus einem ebenen Glase, worauf sehr nahe neben einander äußerst feine Parallellinien gerissen sind, die durchgehends gleiche Weite von einander haben müssen. Dies Glas wird statt des Schraubenmicrometers in dem Brennpunkte des Fernrohres angebracht. Nun richtet man das Fernrohr wie in (I) nach einem Gegenstande von bekannter scheinbarer Grösse $= \alpha$, und untersucht, wie viel Zwischenräume von Parallelen, das Bild desselben ab zwischen sich faßt. Gesetzt n Zwischenräume, so würde wie in (I.) einem Zwischenraume eine scheinbare Grösse $= \frac{\alpha}{n}$ entsprechen, und so könnte man sich denn, der Zwischenräume dieser Parallelen, um scheinbare Weiten am Himmel zu messen, eben so bedienen, wie (§. 181.) der Gewinde des Schraubenmicrometers.

Die Striche dieses Micrometers können entweder vermittelst eines Diamants eingerissen werden (die **Branderischen** Glasmicrometer) oder eingeschliffen, oder auch durch Dämpfe der Flußspatsäure eingeätzet werden. (M. s. **Mayers** prakt. Geom. II. Thl. §. 176. VII und VIII.). Hr. Prof. **Schmidt** in Giesen bedient sich der tropfbaren Flußspatsäure, und meynet sie sey vortheilhafter als die Dämpfe zu gebrauchen. Wenn man indessen die Vorschriften, welche ich a. a. O. angegeben habe, **genau** befolgt, so wird man, vermittelst der Dämpfe, die Linien gewiß eben so sauber erhalten, als vermittelst der tropfbaren Säure, wie Hr. Prof. Schmidt nun selbst eingestehen wird, nachdem ich ihm ein solches Micrometer zugesandt habe.

G. G. **Schmidt** vollst. Unterricht über den Gebrauch der Micrometer. Frankf. a. Mayn 1795. S. 62.

Wer sich überhaupt vollständig über die verschiedenen Arten von Micrometern und ihren Gebrauch unterrichten will, dem kann kein Buch mehr ein Gnüge leisten, als Hrn. Hofr. **Kästners** astron. Abh. 2te Samml. VII. Abh. Auch findet man das nöthigste hievon in dem 2ten Theile meiner prakt. Geom. und in **Röslers** prakt. Astr. II. K.

III. **Herschels** Lampenmicrometer s. oben (§. 33. Dioptr.).

Bouguers Heliometer. (Kästner a. a. O. §. 348 ꝛc.)

Maskelynes prismatisches Mikrometer (Hell Ephem. 1780.).

Erfahrung.

185. **Wenn ihr die ♀ durch ein Fernglas beschauet, so werdet ihr meistens nur einen Theil derselben erleuchtet sehen, wie in dem Monde, wenn er nicht voll ist. Und zwar ist der erleuchtete Theil beständig der Sonne zugekehret.** (Hevelius in Prolegom. Selenogr. f. 68. & seqq.). **Auch werdet ihr den ♀ meistens nur zum Theil erleuchtet sehen, und zwar viel oder wenig, nachdem er gegen der Sonne stehet.** (Hevelius l. c. f. 74. 75.). **Ja auch im ♂ werdet ihr dergleichen wahrnehmen.** (Hevelius l. c. f. 66. 67.).

Erfah-

Erfahrung.

186. Petrus Gassendus hat 1631. d. 7. Nov. zuerst, und nach ihm andere zu verschiedenenmalen, den ☿ unter der Sonne gesehen, welcher wie ein schwarzer runder Flecken sich durch den Sonnenteller durch zu bewegen schien. Auf eine solche Art hat Jeremias Horoccius A. 1693. d. 24. Nov. die ♀ in der Sonne gesehen, welche Begebenheit, so lange die Welt stehet, sonst nie observiret worden, auch nicht eher wiederkommen wird, als 1761. den 25. May.

186a) Auch 1769. den 3. Jun. gieng ♀ durch die Sonne. Zunächst wird dies wieder in den Jahren 1874; 1996 geschehen. (De la Lande Astr. §§. 2029. 2038.) Die Durchgänge ☿ sind häufiger.

Erfahrung.

187. Wenn ihr aber ordentlich einige Zeit nach einander die ♀ observiret, werdet ihr mit Heveln (Selenogr. Proleg. f. 68. 69.) befinden, daß, wenn sie bald nach dem Untergange der Sonne gesehen wird, sie mit vollem Lichte scheinet; je weiter sie aber von der Sonne wegrücket, immer mehr und mehr von ihrem Lichte verlieret, bis sie endlich in ihrer größten Entfernung (welche niemals über 47 Gr. ist) nur halb erleuchtet erscheinet. Indem sie nach dieser Zeit sich der Sonne wieder nähert, nimmet ihr Licht noch immer mehr und mehr ab, je näher sie der Sonne kommet. Und so bald sie wieder kurz vor der Sonnen Aufgang gesehen wird, ist sie nur ganz wenig erleuchtet. Doch indem sie von der Sonne weggehet, nimmet ihr Licht immer zu, bis sie in dem größten Abstande von ihr abermal die Hälfte erleuchtet ist. Wenn sie aber zu der Sonne wieder zurücke

keh-

kehret, nimmet ihr Licht immer zu, daß sie endlich mit vollem Lichte scheinet, wenn sie sich unter die Strahlen der Morgensonne verbergen will.

Zusatz.

188. Die ♀ beweget sich um die Sonne herum, und muß also bald über, bald unter der Sonne, folgends der Erde bald näher, bald weiter von ihr weg seyn, als die Sonne.

Erfahrung.

189. Eben dergleichen hat Hevel (l. c. f. 74. & seqq.) von dem ☿ angemerket, welcher niemals weiter als 28 Gr. von der Sonne weggehet.

Zusatz.

190. Der ☿ beweget sich auch um die Sonne, muß aber ihr näher als die ♀ seyn, weil er niemals so weit von ihr, wie sie, weggehet; er ist aber auch unterweilen von der Erde weiter weg, als die Sonne.

Erklärung.

191. Die Venus heisset der Morgenstern, (Phosphorus oder Lucifer), wenn sie vor der Sonne hergehet; hingegen der Abendstern, (Hesperus), wenn sie ihr nachfolget.

Erfahrung.

192. De la Hire hat A. 1700. (Memoires de l' Academie Royale des Sciences A. 1700. p. 288. & seqq.) durch ein sechzehnschuhiges Fernglas in der ♀ grössere Berge als im Monde observiret. Sie sahe aber durch sein Fernglas dreymal so groß aus, als der Mond mit blossen Augen gesehen wird. In den übrigen Planeten hat man keine Berge wahrnehmen können.

192 a) Joh. Hieron. Schröters Beobachtungen über die sehr beträchtlichen Gebirge, und die Rotation der Venus. Erfurt, 1793.

Erfahrung.

193. Cassini hat zu verschiedenenmalen in der ♀ zwey Flecken observiret. Eben so hat er An. 1666. den 3. März zu Bononien in ♂ vier dunkele Flecken durch ein Fernglas von 16½ Schuhen, und den 24. Febr. zwey andere viel grössere gesehen, welche letztere zu eben der Zeit Campani zu Rom durch ein Fernglas von 35 Schuhen entdecket. Er hat auch 1665. in dem ♃ zwey Flecken, An. 1690. zwey andere kleinere, und An. 1691. noch zwey andere weisse wahrgenommen. In dem ☿ aber, welcher der Sonne sehr nahe ist, hat man wegen seines hellen Lichtes, und in dem ♄ wegen seiner allzugrossen Weite von der Erde noch keine Flecken entdecken können. In dem ♂ sahe Hugenius An. 1656. einen breiten dunkelen Streifen, der mitten durchging, und beynahe den dritten Theil des Diameters durchgehends breit war. Sonst trift man beständig in dem Jupiter Streifen an, wiewohl nicht immer auf einerley Art. Denn zuweilen ist nur einer, zuweilen sind drey und mehrere, insgemein zwey: auch werden sie nicht immer an einem Orte gefunden, und verändern ihre Weite gegen einander.

193 a) Neuere Beobachtungen von Flecken und Streifen im ♃ s. m. in Schröters Beyträgen zu den neuesten astronom. Entdeckungen. Flecken im ♂ hat auch Hr. Herschel beobachtet. B. astron. Jahrb. 1787. Ein Auszug daraus in Röslers pr. Astronomie XVI. Kap.

Zusatz.

194. Aus den Observationen der Flecken hat Cassini geschlossen, daß sich ♃ innerhalb 9 Stunden 56 Minu-

Minuten, ♂ innerhalb 24 Stunden 40 Minuten, und ♀ innerhalb 24 Stunden um ihre Axe bewegen, und daher die Gestalt einer Kugel haben.

194a) ♃ und ♄ weichen merklich von der Kugelgestalt ab, indem beym ♂ der Durchmesser des Aequators sich verhält zur Umdrehungsaxe = 16 : 15 beym ♄ 15 : 14.

Zusatz.

195. Derowegen ist glaublich, daß auch die übrigen Planeten ☿ und ♅ und ♇ sich um ihre Axe herum bewegen, unerachtet man noch keine Observationen vor sich hat, daraus man dieses gewiß schließen, und die Zeit, innerhalb welcher dieses geschiehet, determiniren könnte.

195a) **Bugge** (astr. Jahrbuch von Hrn. Bode 1793. p. 98.) setzt die Rotationszeit des ♅ um seine Axe = 6 St. 9 Min., und **Herschel** nach den neuesten Beobachtungen 10 St. 16 Min. Die Axe des ♅ zum Durchm. des Aequators = 10 : 11.

Anmerkung.

196. Daß die Planeten auch mit Atmosphären umgeben sind, haben wenigstens in Ansehung des ♅, ♄, ♂ und ♀ gewisse Beobachtungen sehr wahrscheinlich gemacht. Ueber die Atmosph. der ♀ s. m. das B. astr. Jahrb. 1793. S. 251. Ueber die des ♄ **Schröters** (§. 193a) angeführtes Werk. Von der des ♂ **Herschel** im astr. Jahrb. 1787. p. 212. Auf dem ♅ hat eben derselbe 1789. nicht nur Flecken, sondern auch Streifen wahrgenommen, aus denen er, so wie aus den Erscheinungen der Trabanten, wenn sie hinter den ♅ treten, eine Atmosphäre gefolgert hat. (M.)

Erfahrung.

197. Simon Marius hat zuerst A. 1690. gegen das Ende des Novembers kleine Sternlein um den Jupiter wahrgenommen, die er Anfangs für Fixsterne gehalten, bis er gemerket, daß sie mit dem Jupiter fortrücketen, und doch zugleich in Ansehung des Jupiters ihre Stelle ver-

veränderten. Da er also inne worden, daß es Jupiters Monden wären, hat er von dem 29. December an, seine Observationen aufzuschreiben angefangen, wie er in der Vorrede über seinen Mundum Iovialem, der zu Nürnberg 1614. in 4. herausgekommen, erzählet. Bald darauf, nemlich den 7. Jan. hat Galiläus Galilái eben dieselben Sterne gesehen, und noch im selbigen Jahre in seinem Nuncio sidereo, den er zu Florenz in 4. herausgab, seine Observationen bekannt gemachet.

Anmerkung.

198. Diese Jupitersmonden werden auch seine Trabanten (Satellites jovis) genennet. Galiläus hieß sie Sidera Medicaea. Man pfleget auch insbesondere mit dem Mario den ersten den Jupiters-Mercurium, den andern die Jupiters-Venerem, den dritten den Jupiters-Jupiter, und den vierten den Jupiters-Saturnum zu nennen.

Erfahrung.

199. Cassini hat nach vielen mit grossem Fleisse angestellten Observationen endlich gefunden, daß unter den Trabanten des Jupiters der erste in 1 Tage 18 Stunden 28 Minuten und 36 Secunden; der andere in 3 T. 13 St. 18 M. 52 Sec., der dritte in 7 T. 3 St. 59 Min. 40 Sec. und der vierte in 16 T. 18 St. 5 Min. und 6 Sec. um ihn herum gehe.

199 a) Neuere Beobachtungen geben die Umlaufszeiten in Minuten und Secunden etwas anders. Die Cassinischen gelten auch nur für die synodischen Umläufe der Trabanten. (Unten §. 238. III.) die periodischen Umlaufszeiten sind der Ordnung nach:

Trabant.	Tag.	Stund.	Min.	Sek.
1	1	18	27	33
2	3	13	13	42
3	7	3	42	33
4	16	16	32	8

Der

Der 4te Trabant hat in seinem Laufe beträchtliche Ungleichheiten.

Erfahrung.

200. Es sind ferner nach Cassini die Abstände der Trabanten, wenn sie am weitesten von 24 ost- oder westwärts erscheinen, der Ordnung nach folgende:

5,67; 9,00; 14,38; 25,30

den Halbmesser des 24 zur Einheit angenommen. Und wenn die Erde in ihrer mittlern Entfernung vom Jupiter ist, so erscheinen jene Abstände dem Beobachter auf der Erde unter folgenden Winkeln:

1′ . 51″; 2′ . 57″; 4′ . 42″; 8′ . 16″.

Die Bahnen der Trabanten sind fast ganz in der Ebene der Bahn ihres Hauptplaneten.

Erfahrung.

201. Die Jupiters-Monden werden auf eine Weile unsichtbar, wenn sie dergestalt zu stehen kommen, daß durch den Jupiter und sie, aus der Sonne eine gerade Linie gezogen werden kann. Eben dieses hat Maraldi und der jüngere Cassini zuerst A. 1715. von den Saturnus Monden observiret. Memoires de l' Acad. Roy. des Sciences. A. 1715. p. m. 57.

Zusatz.

202. Sie werden also ihres Lichtes bey hellem Himmel beraubet, wenn die Sonne sie nicht bestrahlen kann, das ist, verfinstert (§. 157.).

Zusatz.

203. Derowegen werden sie von der Sonne erleuchtet, und sind demnach finstere Körper, wie der Mond.

Zusatz.

204. Weil Jupiter und Saturnus ihnen kein Licht geben, so müssen sie auf der Seite, die von der Sonne weggekehret ist, auch kein Licht haben.

Erfahrung.

205. Wenn dem Jupiter seine Monden, entweder unter ihm, oder über ihm, zu nahe kommen, kann man sie vor seinem Glanze eine Weile nicht sehen. Wenn sie zwischen der Sonne und dem Jupiter stehen, bemerket man einen kleinen runden Flecken auf ihm. A. 1707. d. 26. März hat Maraldi durch ein Fernglas von 34 Schuhen den vierten Mond durch den Jupiter in Gestalt eines dunkelen Fleckens sich bewegen gesehen. So bald er aber durchkommen, hat er ihn an dem Rande des Jupiters auf gewöhnliche Art erblicket. Eben dergleichen Flecken hat er im Jupiter den 4. April durch ein Fernglas von 17 Schuhen observiret, als sich der dritte Mond durch ihn beweget, oder vielmehr vor ihm vorbeygestrichen. Hingegen den 11. April, da eben dieser Mond vor dem Jupiter vorbeystrich, konnte er keine Flecken wahrnehmen. (Memoires de l'Academ. Royale des Sciences An. 1707. p. m. 375. & leqq.)

Zusatz.

206. Weil die Jupitersmonden finstere Körper sind, und ihr Licht nur von der Sonne bekommen (§. 203.); so müssen sie einen Schatten der Sonne gegenüber werfen (§. 34. Optik). Derowegen sind die Flecken, welche man an dem Jupiter siehet, wenn sie zwischen ihm und der Sonne stehen, ihre Schatten.

Zusatz.

Zusatz.

207. Weil nun ihr Schatten Circulrund aussiehet, müssen sie die Gestalt einer Kugel haben. (§. 44. 45. Optik).

Zusatz.

208. Wenn sie sich aber selbst auf dem Jupiter als ein dunkeler Flecken darstellen, da sie doch von der Sonne bestrahlet werden, müssen nothwendig Veränderungen in ihrer Luft vorgehen, welche verhindern, daß das Sonnenlicht nicht auf einerley Art reflectiret werden kann. Dergleichen auch geschehen muß, wenn ihr Schatten auf dem Jupiter grösser als sie selbst aussiehet.

Erfahrung.

209. Durch große Ferngläser siehet man 5 kleine Sterne um den ♄ sich herum bewegen. Den ersten hat Cassini durch ein Fernglas von 70, den andern durch ein Fernglas von 35 Schuhen A. 1684. entdecket, nachdem er schon vorher den dritten A. 1672. und den fünften A. 1671. gefunden hat. (Du Hamel Phil. Vet. & Nov. Tom. 5. Phys. part. 2. tract. 1. diss. 3. c. 9. p. m. 113.). Den vierten hat Hugenius 1655. zuerst gesehen. (Vid. Systema Saturninum p. 3.)

209a) Hr. Herschel hat 1789. zu diesen 5 Trabanten des ♄ vermittelst seines 40 schuhigen Telescops noch 2 andere entdeckt, welche näher bey dem ♄ sind, als die übrigen 5 bisher bekannten.

Erfahrung.

210. Aus dem ♄ betrachtet sind die periodischen und synodischen Umlaufszeiten der 7 Trabanten des ♄ nach den neuesten Beobachtungen folgende:

Ordnung d. Trab.		Period. Umlauf.				Synodis. Uml.			
Ehemals.	Jezt.	T.	St.	M.	S.	T.	St.	M.	S.
	I.	0.	22.	39.	58	0.	22.	40.	5
	II.	1.	8.	52.	54	1.	8.	53.	9
I.	III.	1.	21.	18.	26	1.	21.	18.	55
II.	IV.	2.	17.	44.	51	2.	17.	45.	51
III.	V.	4.	12.	25.	11	4.	12.	27.	55
IV.	VI.	15.	22.	41.	13	15.	23.	15.	20
V.	VII.	79.	7.	53.	43	79.	22.	3.	13

die Entfernung der 7 Trabanten vom Mittelpunkte des ♄ ist nach Cassinis Bestimmungen:

	in Halbmessern d. ♄	scheinbare Abstände	
I.	2,80	0′	27″
II.	3,63	0	35
III.	4,50	0	43,5
IV.	5,80	0	56
V.	8,09	1	18
VI.	18,61	3	0
VII.	54,20	8	42,5

die scheinbaren Abstände gelten, wenn die Erde in der mittlern Entfernung vom ♄ ist.

2102) Will man in §. 200. und 210. die wahren Abstände der Trabanten von ihrem Planeten in Meilen finden, so muß man für die Jupitertstrabanten die angegebenen Abstände mit dem Halbmesser des ♃, oder mit 9783 deutschen Meilen, für die ♄ Trabanten aber mit dem Halbmesser des ♄ = 8681 deutschen Meilen multipliciren. (M.)

Erfahrung.

II. 13. 211. Durch die Ferngläser erscheinet ♄ in so seltsamer und veränderlicher Gestalt, daß man eine gute Zeit nicht gewußt, was man daraus machen sollte. Hugenius hat befunden, 1. daß er unterweilen, wie die übrigen Planeten, rund erschiene, und mitten durch ihn

ihn ein dunkeler Strich gehe: 2. daß er unterweilen zwey helle Armen habe, die zu beyden Seiten angesezet erschienen, wo vorhin der dunkele Strich durchging, und nach einer geraden Linie ausgedehnet, an dem Körper aber des Saturns breiter als hinten sind, und spizig zulaufen, der dunkele Strich hingegen in dem Saturno etwas höher stehe als die Arme: 3. daß die Arme sich spalten, und in zwey Henkel verwandelt werden, der Strich aber unter dem untersten Theile der Henkel in dem Körper des Saturns herunter trete. Vid. Systema Saturninum p. 9. & seqq. Es ist nicht zu vergessen, daß man innerhalb dem Henkel die Fixsterne sehen kann.

Anmerkung.

212. Hieraus hat **Hugenius** geschlossen, daß um den ♄ sich ein runder und etwas breiter aber dünner Ring bewege, welcher überall von ihm gleich weit abstehet, aber gegen die Ecliptik incliniret ist. **Cassini** setzet seinen Diameter zu dem Diameter des Planetens wie 11 zu 5.

212a) Heinsius de apparentiis annuli Saturni. Lips. 1745. Bode Erläuterung d. Sternkunde. §. 505.

Anmerkung.

213. Die Neigung des ♄ Ringes gegen die Ecliptik beträgt 31 Gr. 20′. Der scheinbare Durchmesser seines äussern Randes beträgt 42″, seines innern aber 30″. In der Ebene dieses Ringes bewegen sich nun auch die Monde des ♄ selbst, der 7te etwa ausgenommen. Uebrigens hat Hr. **Herschel** die merkwürdige Entdeckung gemacht, daß der Ring des ♄ nicht einfach ist, wie er durch mäßig große Fernröhre erscheint, sondern eigentlich aus zwey koncentrischen Ringen von ungleicher Grösse und Breite bestehet. Der schmälste ist auswendig, und hat also den größten Durchmesser. Hr. H. berechnet ihn auf 204883 englische Meilen. Zwischen beyden Ringen ist ein leerer Raum. Wenn man den Halbmesser der Saturnskugel zum Halbmesser des äußersten Umfanges des Ringes = 214 : 500 annimmt, so verhält sich die Breite jenes

nes Zwischenraumes zum Halbmesser des ♄ = 14 : 214. Die übrigen Abmessungen des Ringes s. m. in Bode astr. Jahrb. 1796. p. 90. Der äussere Ring dreht sich in 10 St. 32′ einmahl um den Körper des Saturns. Die Umdrehungszeit des innern ist noch nicht bekannt. Uebrigens haben auch schon Cassini, Hadley, Short u. a. dunkele Zonen auf dem Ringe bemerkt. Die Oeffnung zwischen beyden Ringen leistet dem ♄ den wesentlichen Dienst, daß dadurch der Raum, welchen der Schatten des Ringes verfinstert, der durchfahrenden Sonnenstrahlen wegen, schmäler wird, und übrigens den ♄ Bewohnern durch diese Oeffnung eine freye Aussicht nach dem Firmamente verstattet ist, und hätte dieser Ring, wie wahrscheinlich, auch eine Atmosphäre, so würden die oft Jahre lang dauernden Sonnenfinsternisse, die er den ♄ Bewohnern verursacht, durch die Brechung der Sonnenstrahlen doch gemäßigt. Wie den Bewohnern des ♄ der Ring erscheinen müsse, lehrt Hr. Bode (astr. Jahr. 1786. S. 138 ꝛc.) Ueberhaupt läßt sich aber von dem Ursprunge und der Beschaffenheit dieses höchst sonderbaren Körpers um den ♄ nicht viel mit Gewißheit bestimmen. (M.)

Lehrsatz.

214. Saturn, Jupiter, Mars, Venus und Mercur sind dunkele, undurchsichtige, und unserer Erde ähnliche Körper.

Beweis.

Denn sie haben, wie unsere Erde, für sich allein kein Licht, als was sie von der Sonne bekommen, welches bey der ♀, dem ☿ und ♂ daraus erhellet, weil beständig nur der nach der Sonne zugekehrte Theil (§. 185.) erleuchtet ist, auch ♀ und ☿ wie dunkele undurchsichtige Körper vor der Sonne erscheinen (§. 186.) Von ♃ und ♄ erhellet es daraus, weil sie einen Schatten hinter sich werfen, und dadurch ihre Monde oder Trabanten verfinstern (§. 201. 202.) wie unsere Erde ihren Mond.

Daß übrigens ♀, ♂, ♄, ♃ sich um ihre Axen drehen (§. 194 u. 195 a) und nach (§. 196.) mit Atmosphären umgeben sind, ferner die ♀ Berge hat, wie unsere

sere Erde, und die übrigen Planeten der Analogie nach auch dergleichen haben, dadurch rechtfertigt man die Behauptung, daß diese Körper Aehnlichkeit mit der Erde haben. Jedoch müssen wir diese so wie andere Vergleichungen (astronomia comparatiua) nicht zu weit treiben, oder bestimmen wollen, wie es sonst auf diesen Weltkörpern aussieht, weil wir sonst leicht in physische Romane und Träume verfallen, wie **Wilkins, Athanas. Kircher** (Iter extaticum coeleste 1671.) **Schwedenborg** und andern begegnet ist. Was wir indessen mit größter Wahrscheinlichkeit behaupten dürfen, ist, daß die Planeten, wie unsere Erde, auch mit denkenden und empfindenden, aber freylich ganz anders organisirten Geschöpfen versehen seyn müssen. (M.).

214a) **D. Fontenelle** über die Mehrheit der Welten, nach Hrn. Prof. Bodens Ausgabe.

214b) In dem Beweise dieses Lehrsatzes vermißt man den **Uranus** (§. 42a) Aber auch von diesem darf man versichert seyn, daß er sein Licht von der Sonne habe. Ausserdem hat auch Hr. **Herschel** vermittelst seines 40 schuhigen Telescops bereits zwey Trabanten dieses Planeten entdeckt. Die Umlaufszeit des innersten ist 8 Tage 17 St. Sein scheinbarer Abstand 33″; die des äussersten 13 T. 11 St. und sein Abstand 44″,2. (**Bodens** astr. Jahrb. 1790. p. 253. 1791. p. 252.) Wahrscheinlich hat er noch mehr Trabanten, für die aber unsere größten Fernröhre bis jetzt zu schwach sind.

214c) Da unsere Erde schon einen Mond hat, und 4 dergleichen viere, so ist zu vermuthen, daß ♂, als ein Planet, der zwischen der Erde und dem 4 um die ☉ läuft, auch dergleichen habe. Aber vielleicht ist ihr Licht zu schwach, als daß wir es bemerken könnten.

214d) Auch bey der ♀ haben **Cassini** 1686; **Short** 1740, und **Montaigne** 1761. einen Trabanten sehen wollen (Abhandl. von der Entdeckung eines Tr. der ♀ aus dem Franz. des Hrn. Badouin, von **Reccard**. Berlin 1761.) **Lambert** gründete auf jene Beobachtungen eine Theorie, nach der er berechnete, daß jener Trabant den 1. Jun. 1777.

in der ☉ müßte gesehen werden. (Vom Trabanten der ♀ im astron. Jahrbuche des Hrn. Bode 1777 und 1778.) Aber die genauesten Beobachtungen zeigten nichts, was man hätte können für einen Trabanten halten. Es ist also dieser angebliche Trab. d. ♀ bis jetzt noch sehr zweifelhaft, und kann nach Hrn. Hell (Ephem. Vienn. 1766. im Anhange) ein optischer Betrug seyn, indem man ein von der Puppille in dem Auge, nach dem Augenglase des Fernrohres, wodurch man die ♀ betrachtete, reflectirtes Bild der ♀ für ihren Planeten hielt. Auch s. m. **Wittenberg. Wochenbl.** 1777. S. 393.

Anmerkung.

215. Man kann, wie unsere ☽ Finsternisse, so auch die Verfinsterung der Monde anderer Planeten, mit sehr großer Genauigkeit berechnen. So werden z. E. in den astronomischen Kalendern die sogenannten **Immersionen** und **Emersionen** der 4 Trabanten, d. h. ihre Ein- und Austritte aus dem Schatten ihres Hauptplaneten angegeben. Die Berechnungen werden nach den Tafeln geführt, welche für die Bewegungen dieser Trabanten von **Wargentin** u. a. gegeben worden sind, mit deren Vervollkommnung aber sich die Herrn **de Lambre** und **de la Place** schon mehrere Jahre beschäftiget haben.

Erfahrung.

216. **Jupiter hat A. 1563. den Saturn, Mars A. 1591. den 9. Jan. den Jupiter, Venus A. 1590. den 3. Octobr. den Mars, und A. 1599. den 8. Jun. den Mercur der Erde verdecket.** (Kepler in Astron. Opt. p. 305.) **Copernicus führet an** (Revolut. coelest. l. 5. c. 23.) **daß der Mond A. 1529. die ♀ verdecket. Und Ricciolus** (Almag. Nov. lib. 7. Sect. 6. c. 14. f. 721.) **bringet Exempel von Bedeckung der Fixsterne durch den 4 und ♂ bey.**

216a) Dergleichen Bedeckungen hat man in der Folge noch mehrere beobachtet.

Zusatz.

217. Derowegen muß wenigstens damals, wie die Verdeckung geschehen, Saturnus weiter als Jupiter,

Jupi-

Jupiter weiter als Mars, Mars weiter als Venus, Venus weiter als der Mond, und der verdeckte Fixstern weiter als Jupiter und Mars von der Erde gewesen seyn.

Aufgabe.

218. Den scheinbaren Diameter der Sterne zu messen.

Auflösung.

Dieses geschiehet am füglichsten durch das Micrometer (§. 182.), nur müsset ihr merken, daß das Augenglas über dem Lichte schwarz angelaufen seyn muß, nicht allein wenn ihr nach der Sonne sehet, sondern auch (wie Hugenius in Systema. Saturnio p. 84. aus eigener Erfahrung erinnert) wiewol viel weniger, wenn ihr den ☽ und die ☿ observiren wollet, damit der allzugrosse Glanz benommen werde, auch die letzteren beyde recht rund erscheinen. Imgleichen ist die rechte Bedeckung des Objectivglases in Acht zu nehmen. (§. 36. Dioptr.)

218a) Vorzüglich sind hiezu die (§. 184a III.) angeführten Werkzeuge brauchbar, denen noch Hrn. Schröters Scheibenlampenmicrometer in dessen Beyträgen zu den neuesten astronomischen Entdeckungen S. 146. beyzufügen ist.

Zusatz.

219. Ihr werdet finden, daß der scheinbare Diameter der Sonne, des Mondes und der übrigen Planeten nicht immer von einer Grösse sey. Derowegen ist klar, daß sie der Erde einmal näher seyn müssen, als das andere (§. 23. Optik).

Anmerkung.

220. Die scheinbaren Durchmesser der Planeten, wenn sie der Erde am nächsten sind, hat man von folgenden Grössen gefunden:

☿	♀	♂	♃	♄	♄ring	Uranus
12″,2	61″,4	27″,2	49″,0	21″,4	50″,1	4″,1

Nach **Cassini** sind der größte und kleinste scheinbare Durchmesser der ☉ 32′ . 37″,5 und 31′ . 32″,5. Für den ☽ giebt Hr. **de la Lande** den mittlern Durchmesser 31′ . 29″ den kleinsten 29′ . 25″ den größten 33′ . 34″. Die Ungleichheiten des ☽ geben aber dabey viel Veränderung.

Kirch (de diam. ♃ apparenti. Misc. Berol. contin II.) setzt den größten Diameter des ♃ = 1′ . 3″ . den kleinsten 38″. (M.)

Anmerkung.

221. Wenn ihr durch ein Fernglas auch die größten Fixsterne betrachtet, so sehen sie nur wie ein Punkt aus, und kann ihr Diameter durch das Mikrometer nicht gemessen werden. **Hugenius** (Cosmoth lib. 2. p. m. 115.) schätzet ihn nicht viel über vier Tertien selbst in dem Hundssterne.

Erfahrung.

222. Der scheinbare Diameter des ♄, ♃ und ♂ siehet grösser aus, wenn sie von der ☉ weit weg sind, als wenn sie ihr nahe zu stehen scheinen, ja sogar, daß der Diameter des ♂ achtmal so groß aussiehet, wenn er von der Sonne 180 Gr. wegstehet, als wenn er mit ihr in einem Orte des Himmels gesehen wird.

Zusatz.

223. Derowegen sind diese Planeten, sie mögen in dem Himmel stehen, wo sie wollen, der Erde näher, wenn sie der Sonne entgegengesetzet, als wenn sie ihr sehr nahe sind.

Erfahrung.

224. ♄ kommt beynahe in 10746, ♃ in 4350, ♂ in 686 Tagen, ♀ und ☿ mit der Sonne um den ganzen Himmel herum. Doch ist die Bewegung einmal nicht so geschwinde, wie das andere, denn sie laufen gleiche Bogen des Thierkreises in ungleicher Zeit durch. Und zwar befindet man die Bewegung einmal am langsamsten, einmal am geschwindesten. Die

Der-

Oerter, wo dieses geschiehet, sind 180 Gr. von einander entfernet.

Erfahrung.

225. Wenn ♄, ♃ und ♂ der Sonne nahe sind, so bewegen sie sich geschwinder, als wenn sie von ihr weg sind. Wenn sie 180 Gr. von der Sonne wegkommen, gehen sie zurücke, und ehe sie zurücke gehen, imgleichen wenn sie aufhören zurücke zu gehen, stehen sie stille. Sie gehen aber langsamer zurücke als vor sich. Denn da Mars, wenn er zur Sonne kommet, in einem Tage 47 Minuten durchläufet, laufet er in dem Zurückgehen nicht mehr als 24 Minuten durch.

Erfahrung.

226. Vergleichet die Zeiten mit einander, in welcher ein Planet geradeläufig, stillestehend und rückgängig ist, so werdet ihr sie auch in einem Planeten nicht beständig von gleicher Grösse finden. Absonderlich ist in dem ♂ der Unterschied sehr merklich. Imgleichen ist der Bogen des Thierkreises in diesen Fällen nicht immer von einer Grösse. Es ist aber ohngefähr ♄ 244 ♃ 284, ♂ 705 Tage rechtläufig, der erste 8, der andere 4, der dritte 2 Tage stillstehend; der erste 136, der andere 119, der dritte 75 Tage rückgängig: und gehet ♄ beynahe 7, ♃ 10, ♂ 10 bis 12 Grad zurücke.

Erfahrung.

227. Hingegen ♀ und ☿ laufen geschwinde und gerade fort, wenn sie über der Sonne: aber langsam, wenn sie unter der Sonne sind, und werden rückläufig, wenn sie unter der Sonne sind, und mit ihr in Einem Orte gesehen

hen werden. Es ist aber ♀ beynahe 542 Tage geradeläufig, einen stehet sie stille, und 42 gehet sie zurücke. Und ☿ gehet beynahe 93 Tage gerade fort, einen halben steht er stille, und 22 läufet er zurücke.

Erfahrung.

228. Die Planeten haben bald eine südliche, bald eine nördliche, bald gar keine Breite.

Zusatz.

229. Derowegen muß ihre Bahn die Ecliptik in zwey Punkten durchschneiden.

Erfahrung.

230. Der Mond stehet niemals stille, wird auch nicht rückgängig, doch beweget er sich einmal geschwinder, als das andere, und ist der Unterschied sehr merklich. Wenn der Mond im ersten oder letzten Viertel die gröβte Weite von der Erde hat, so ist er weiter weg, als wenn er im Neu- oder Vollmond den grössesten Abstand von ihr erlanget. Auch wird die Bewegung viel ungleicher um die Viertel, als im neuen und vollen Lichte gefunden.

Anmerkung.

231. Wir sollen nun zeigen, wie das Weltgebäude beschaffen seyn müsse, damit alles auf dem Erdboden uns so erscheine, wie es jetzt aus den Observationen vorgestellet worden.

Lehrsatz.

II. 14. 232. Es ist nicht glaublich, daß, wie Tycho de Brahe vorgiebt, die Erde im Mittelpunkte der Welt ruhe, der Mond, die Sonne und die übrigen Planeten nebst den Fixsternen sich innerhalb 24 Stunden von Morgen gegen Abend bewegen, und zwar dergestalt, daß die-

jeni-

jenigen Planeten langsamer um sie herum kommen, welche einen kleinen Weg zu laufen haben, als die, so weit von der Erde weg sind, und durch einen großen Raum sich bewegen müssen.

Beweis.

Denn, wenn ihr diesen Satz als wahr annehmet, könnet ihr keine Ursache angeben, warum dergleichen von der Bewegung der Sterne auf dem Erdboden wahrgenommen wird, als vorhin angemerket worden. Ihr könnet nur obenhin zeigen, woher es komme, daß die Planeten in verschiedener Zeit sich von Abend gegen Morgen um den Himmel herum zu bewegen scheinen. Nemlich, weil die Fixsterne geschwinder herumkommen, als die Planeten, und unter diesen diejenigen am langsamsten, die der Erde am nächesten sind, so können weder die Planeten insgesammt mit den Fixsternen, noch die untern mit den oberen morgen wieder in den Meridian kommen, wenn sie heute mit ihnen durch denselben gegangen, sondern bleiben etwas zurücke weiter gegen Morgen stehen. Z. E. setzet, es sey heute Neumond, und gehe der Mond mit der Sonne durch den Meridian. Da die Sonne von der Erde weiter weg ist, als der Mond, kommet sie geschwinder als er um die Erde herum. Derowegen, wenn sie morgen wieder in den Meridian kommet, kann der Mond noch nicht da seyn, sondern er stehet etwas zurücke gegen Morgen. Und also scheinet es, als wenn er zurücke gegangen wäre. Allein dieses einige kann den Satz nicht wahrscheinlich machen. Wie viel sind nicht Dinge, die ihr durch den gegenwärtigen Satz gar nicht erklären könnet? Wenn die Sonne, der Mond und die übrigen Planeten sich um die Erde bewegeten, so beschrieben sie Schraubengänge um dieselbe (§. 35. 36. 219.), und da ihre Weite von der Erde nicht immer einerley ist (§. 223.), wären die Schraubengänge bald

weit,

weit, bald enge. Aus gegenwärtigem Satze könnet ihr nicht die geringste Ursache geben, woher es komme, daß die Planeten bald einen weiten, bald einen engen Gang um die Erde nehmen, noch auch sagen, wie sie den weiten eben so geschwinde als den engen durchlaufen können. Die Sonne schweifet niemals über die Tropicos oder Wendecircul, und die Planeten schweifen niemals über den Thierkreis heraus (§. 48. 49). Ihr könnet aus dem Tychonischen Weltgebäude abermals keine Ursache anzeigen, warum sie ihre Schraubengänge nicht bis gegen die Pole fortführen, und was sie wiederum umkehren heisse. Man hat wahrgenommen, daß der Ort, wo der Planet am weitesten von der Erde weg ist, sich verrücket. Daraus folget, daß, wenn der Planet einmal seine Schraubengänge zu Ende gebracht, und er sie wieder von neuem anfänget, er nicht mehr die alten wiederholet, sondern ganz neue beschreibet. Daher müßte er, so lange die Welt stehet, alle Tage einen andern Weg um die Erde genommen haben. Wie ihr dieses aus dem Tychonischen Weltbaue erklären wollet, daran ist nicht einmal zu gedenken. Eben so wenig könnet ihr sagen, warum die Schraubengänge blos um deswillen enger werden, als sie sonst seyn würden, weil der Planet auf unserer Erde um einen grösseren Theil des Himmels von der Sonne entfernet zu seyn scheinet (§. 223.). Fraget man ferner, wie es zugehe, daß die Planeten bald stille stehen, bald gar zurücke zu gehen scheinen, das ist, ihre Schraubengänge um die Erde bald in gleicher Zeit mit den Fixsternen, bald geschwinder zu Ende bringen, so weiß man auch hier nicht die geringste Ursache zu geben. Am allerwenigsten kann man zurechte kommen, wenn man die besonderen Umstände dieser Erscheinungen, die oben (§. 225. seqq.) angeführet worden, erkläret wissen will. Also sehet ihr, daß durch den Tychonischen Weltbau nichts begriffen werden kann, was in der Welt vorgehet.

gehet. Derowegen ist nicht glaublich, daß ihn Tycho recht beschrieben. W. z. E.

Zusatz.

233. Weil man aus dem Tychonischen Weltbaue keine Ursachen der Himmelsbegebenheiten ersehen kann, so ist er auch in der Astronomie zu gar nichts nütze. Denn in dieser Wissenschaft suchen wir die Gesetze der Bewegung der Planeten (§. 2.), damit wir die Himmelsbegebenheiten voraus berechnen können; aus dem Tychonischen Schraubengängen aber, wird sich niemand in dieser Arbeit zurechte finden, weil man keine Ursache von ihren Veränderungen geben kann.

Anmerkung.

234. Man will insgemein den Tychonischen Weltbau aus der Schrift behaupten. Z. E. man berufet sich darauf, daß Josua der Sonne befohlen, sie solle stille stehen, und sie sey stille gestanden, Jos. X. 12. 13. Wenn ihr nun fraget, was Josua bey diesen Worten für Gedanken hat haben können, so werdet ihr befinden, er habe verlanget, die Sonne und der Mond sollten ihre Stelle in Ansehung der Erde nicht verändern. Daher heisset stille stehen hier so viel, als seinen Stand gegen die Erde nicht ändern, und könnet ihr aus dem Stillstehen der Sonne, welches in der Bibel beschrieben wird, nicht schliessen, daß sie wirklich sich um die Erde bewege. Man führet ferner an, daß gleichwohl die Schrift Eccles. I. 5. mit ausdrücklichen Worten saget: **Die Sonne gehet auf und gehet unter, und laufet an ihren Ort, daß sie wieder daselbst aufgehe.** Allein weil die Schrift sich nirgends erkläret, was sie durch den Auf- und Untergang der Sonne wolle verstanden haben, so erfordert sie keinen andern Begriff, als den wir insgemein davon haben. Wenn ihr nun auf die auf- und untergehende Sonne Acht habet, so könnet ihr nichts anders wahrnehmen, als daß euch auf eurer Stelle, wo ihr stehet, die Sonne in dem Horizonte erscheinet. Und also, wenn die Schrift saget: die Sonne gehet auf und unter: dürfet und könnet ihr euch weiter nichts gedenken, als daß sie in dem Morgen- und Abendhorizonte von euch gesehen wird. Eben so, wenn ihr fraget, was ihr euch bey den Worten gedenken sollet: **die Sonne läuft an ihren Ort**, werdet ihr finden, daß um die Erde

laufen

laufen nichts anders heisse, als seinen Stand gegen die Erde beständig ändern.

234a) Umständlicher über das Tychonische System in Bodens Erläuterung der Sternkunde §. 380. Eine Abbildung desselben, so wie von mehreren ältern Systemen, findet man auch auf der VI. Tafel des Doppelmairischen Himmelsatlas. Da Tychos System fast das ganze vorige Jahrhundert hindurch gegolten hat, wo man nach der damaligen Philosophie und Exegetik es zu bedenklich fand, das Kopernikanische zu lehren, so kann es sowohl deswegen, als auch um desto einleuchtender das Einfache und Natürliche der Kopernicanischen Weltordnung einzusehen, Anfängern sehr nützlich seyn, sich einige Kenntniß davon zu verschaffen. Dies kann Wolfen entschuldigen, daß er sich hier auch mit dem Tychonischen Systeme beschäftigt hat.

Lehrsatz.

II. 15. 235. Die Sonne liegt beynahe im Mittelpunkte aller Planetenbahnen, und wendet sich daselbst um ihre Axe (§. 142.) Um sie bewegen sich der Ordnung nach die Planeten ☿, ♀ die Erde (♁); dann ♂, ♃, ♄, ♅; wie die Figur zeigt. Die Abstände der Planeten von der Sonne sollen in der Folge angegeben werden. In einem Sterntage (§. 26 d) oder 24 Sternstunden drehet sich die Erde um ihre Axe herum. Auch die übrigen Planeten drehen sich um ihre Axen (§. 194.) und (§. 195 a). Um die Erde geht der Mond allemahl in ohngefähr 27 Tagen, und rückt mit der Erde fort, so wie diese innerhalb eines Jahres, oder ohngefähr 365 Tagen ihren Umlauf um die Sonne macht. Eben so gehen auch die Trabanten um ihre Hauptplaneten, und jene mit diesen zugleich um die Sonne herum. In unermeßlich großen Abständen von uns, befinden sich die Fixsterne, die unter sich selbst ihre Lagen nicht merklich verändern, und wie an eine hohle Kugel angeheftet zu seyn

scheinen, aus welchem Standpunkte der Erde wir sie auch betrachten. (M.)

Beweis.

Wenn ihr euch den Weltbau auf solche Art vorstellet; könnet ihr auf einmal begreifen, woher es komme, daß ihr von der Bewegung der Planeten wahrnehmet, was aus den Observationen angeführet worden. Denn weil die Erde sich innerhalb 24 Stunden um ihre Axe herum beweget, so muß ein Stern nach dem andern um den ganzen Himmel herum in eurem Horizonte erscheinen. Und also sehet ihr die Sterne nach einander auf- und untergehen. Und aus eben dieser Ursache gehet die Sonne alle Tage auf und unter, und scheinet sich um die Erde herum zu bewegen, weil diese sich um die Sonne bewegt. Wenn die Erde in 7 ist, sehet ihr die Sonne in ♎. Kommet sie in 6, so sehet ihr die Sonne in ♏. Ist die Erde in 4, so erscheinet die Sonne im ♑; hingegen im ♈, wenn jene in 1; im ♋, wenn sie in 10 ist. Solchergestalt scheinet sich die Sonne innerhalb einem Jahre um die Erde herum zu bewegen. II. 16.

Bildet euch ein, es sey die Erde, wo vorhin die Sonne war, und der Mond bewege sich um sie aus 7 in 6, und aus 6 in 5 u. s. w. So sehet ihr ihn auf der Erde anfangs im ♈, hernach im ♉, in ♊ u. s. w. Folgends scheinet er auch in 27 Tagen den ganzen Thierkreis durchzulaufen.

Wenn die Erde einen weiteren Weg um die Sonne nimmt, als die ☿ und ♀; so müssen die beyden Planeten stets entweder vor der Sonne hergehen, oder ihr nachfolgen. Sie können aber nur auf eine gewisse Weite vor ihr zu gehen scheinen, und zwar ☿ weniger als ♀, dieweil er der Sonne näher als diese ist. Indem aber die Erde sie sowohl als die Sonne umgehet, müssen wir sie gleichfalls in einem Jahre den Thierkreis durchlaufen sehen, unerachtet sie in der Zeit, da sie um die Sonne

herumkommen, in der That ihren Lauf um den ganzen Himmel herum vollenden.

Die Planeten, welche der Sonne näher sind, kommen geschwinder herum, als die weiter von ihr weg sind, und jene haben nur einen kleinen, diese aber einen viel weiteren Weg zu laufen. Da aber die Planeten sich nicht in Circuln bewegen, in deren Mittelpunkt die Erde anzutreffen, so scheinet uns ihre Bewegung einmal geschwinder als das andere, und zwar langsamer, wenn sie von der Erde weit weg, als wenn sie ihr nahe sind.

III. 17. Denn setzet z. E. der Planet bewege sich aus Q durch N in S, so wird es euch auf der Erde in T vorkommen, als wäre er den halben Thierkreis LAO durchlaufen, da er doch in der That mehr als die Hälfte seines Weges zurücke geleget. Setzet ferner, er bewege sich aus S durch M in Q, so bildet ihr euch in T ein, er sey den halben Thierkreis OPL durchlaufen, da er doch in der That weniger als die Hälfte seines Weges vollendet. Nun ist NC = CM (§. 27. Geom.) und daher NT grösser als TM. Derowegen scheinet sich der Planet langsamer zu bewegen, wenn er von der Erde weit weg ist, als wenn er ihr nahe ist.

II. 15. Wenn die Erde z. E. in N ist, und ♂ in A, ♃ in B; ♄ in C, so scheinen auch diese Planeten mit der Sonne an Einem Orte des Himmels zu stehen. Ist aber die Erde in T, und die Planeten sind in den vorigen Oertern, so scheinen sie euch von der Sonne 180 Grad entfernet zu seyn. Eben so verhält sichs, wenn die Erde in N, und die Planeten in D, E, F, sind. Darum müssen die oberen Planeten allerdings viel weiter von der Erde weg seyn, wenn sie bey der Sonne erscheinen, als wenn sie weit von ihr abstehen.

Wenn die Erde in N, ♀ in G, ☿ in H ist, so sind diese beyden Planeten ihr näher als die Sonne, ist aber die Erde in T, und die beyden Planeten sind in G und H, so ist die Sonne der Erde näher als sie.

Es

Es sey die Erde in A, Jupiter in 1, so sehet ihr ihn in a, und mit der Sonne in Einem Orte. Die Erde komme in B, so rücket ♃ in 2, und sehet ihn in b. Gleichergestalt sehet ihr ihn, wie er in 3 ist, aus C in c. Darum scheinet er euch in dem Thierkreise gerade fort zu gehen. Hingegen komme die Erde bis in D und der Planet bis in 4, so sehet ihr ihn in d; und aus E, wenn er in 5 ist, in e. Derowegen scheinet er zurückezulaufen, wenn er der Sonne entgegen stehet. Eben so verhält sich die Sache, wenn ihr anstatt des Jupiters den ♂ und ♄ nehmen wollet. Allein wenn die Erde in A, ♀ in 1 ist, sehet ihr ihn in a. Kommet sie bis in B, und er in 2, so sehet ihr ihn in b, imgleichen aus C, wenn er in 3 ist, in c u. s. w. Darum scheinet er durch den Thierkreis gerade durchzulaufen. Hingegen kommet die Erde bis D, ☿ bis 4, so sehet ihr ihn in d und er scheinet euch rückgängig zu werden, unerachtet er in seinem Wege immer gerade fortgehet. Derowegen wird er rückläufig, wenn er unter der Sonne ist, und mit ihr beynahe an Einem Orte des Thierkreises gesehen wird. Eben so kann man es von der ☾ erweisen. Aus diesem sehet ihr, wie ohne Schwierigkeit die Ursachen von den Himmelsbegebenheiten aus gegenwärtigem Lehrsatze gegeben werden können, und ihr werdet aus dem folgenden ersehen, daß auch die allergenauesten Umstände daraus sich determiniren. Also ist wohl nicht zu zweifeln, daß das Weltgebäude im gegenwärtigen Lehrsatze richrig beschrieben sey. W. Z. E. III. 18. III. 19.

235a) Wie auf andern Planeten das Weltgebäude erscheinen müsse, läßt sich aus dieser Anordnung desselben sehr leicht herleiten.

Zusatz.

236. Die Axe, um die sich die ganze Himmelskugel in 24 Stunden zu wälzen scheint, oder die Weltaxe, ist offenbar nur die Verlängerung der Axe, um

welche sich in eben der Zeit die Erdkugel herumdreht. Die Pole der Himmelskugel, liegen also mit denen der Erdkugel immer in einer geraden Linie, wo sich auch die Erde in ihrer Bahn um die Sonne befinden mag. Aendert sich nun durch irgend eine Ursache die Lage der Erdaxe, so muß sich auch die Lage der Himmelspole gegen die umher befindlichen Fixsterne ändern, und wenn daher z. E. die scheinbare Weite eines Fixsternes von einem der beyden Pole am Himmel nicht genau immer dieselbe bleibt, während die Erde um die Sonne läuft, so kann man schließen:

1) daß entweder der Fixstern eine eigene Bewegung habe, oder

2) die Entfernung des Fixsterns von der Erde in einem solchen Verhältnisse gegen den Durchmesser der Erdbahn stehe, daß dadurch eine merkliche Parallaxe hervorgebracht wird, oder

3) daß eine Verrückung der Erdaxe, während ihres Umlaufs um die Sonne vorgefallen sey.

Die Resultate vieler Beobachtungen und Vergleichungen haben gelehrt, daß die Aenderungen, welche man während eines Umlaufs der Erde um die Sonne, würklich in den Lagen der Fixsterne gegen die Weltpole bemerkt, bloß von einer nicht beständig sich parallel verbleibenden Lage der Erdaxe herrühren, daß jedoch diese **Verrückung der Erdaxe** so wenig betrage, daß man sie nur in der feinern Astronomie in Betrachtung zu ziehen habe, für den gemeinen Gebrauch aber verstattet sey, anzunehmen, daß die Erdaxe, während sich die Erde um die Sonne bewegt, sich beständig parallel bleibe. (M.)

Zusatz.

237. Da die Sonne innerhalb eines Jahres an dem Himmel nur in sofern einen Kreis zu beschreiben scheint,

scheint, als die Erde in dieser Zeit um die Sonne kömmt, so ist die Ecliptik an dem Himmel weiter nichts, als der Kreis, den die unendlich hinaus verlängerte Erdbahn an der Fixsternkugel abschneidet. Bleibt nun diese Bahn der Erde nicht immer dieselbe, so wird auch die scheinbare Bahn der Sonne sich in Ansehung der Fixsterne verrücken, also die Ecliptik nicht immer einerley Lage gegen die Sterne behalten. Die Erfahrung hat gelehrt, daß die Breite der Fixsterne, oder ihr Abstand von der Ecliptik sich innerhalb eines Jahres um nichts merkliches ändert, und man also innerhalb dieser Zeit die Lage der Ecliptik für unveränderlich annehmen dürfe. Da nun aber doch innerhalb eines Jahres ihre Durchschnittspunkte mit dem Aequator um ein merkliches zurückgehen (§. 98 a) so kann der Grund hievon nur allein in der (§. 236) erwähnten geringen Verrückung der Erdaxe liegen, weil der Aequator allemahl auf der Erdaxe senkrecht steht, und daher die unveränderliche Ecliptik immer in andern und andern Punkten durchschneiden muß, wenn die Erdaxe nicht immer mit sich selbst parallel bleibt. Diese aus der Verrückung der Erdaxe erfolgende Aenderung der Aequinoctialpunkte, rührt, wie die höhere Astronomie beweiset, von der Würkung der anziehenden Kraft der Sonne auf unseren Erdkörper, der keine ganz vollkommene Kugelgestalt hat, her. **Euler** Mem. de l'Acad. de Prusse 1749. **D'Alembert** und andere haben über diesen Gegenstand viel geschrieben. (M.)

Zusätze.

238. I. Da sich der Mond um die Erde herumbewegt, und nur immer diejenige Seite desselben erleuchtet ist, welche der Sonne zugekehrt ist, so erhellet, daß wenn er sich in seiner Bahn zwischen der Erde und der Sonne befindet, er uns ganz seine dunkele Seite zukehren wird, und wir also **Neumond** haben werden. Befindet sich dagegen die Erde zwischen dem Monde und der

Sonne, so daß wir z. E. den Mond aufgehen sehen, wenn die Sonne untergeht, so kehrt er uns ganz seine helle Seite zu, und er ist also voll. In andern Lagen, die er gegen die Erde und Sonne hat, wird von seiner erleuchteten Hälfte bald ein grösserer bald geringerer Theil der Erde zugekehrt seyn müssen, und so erklären sich demnach sehr leicht die verschiedenen **Lichtabwechslungen (Phasen)** des ☽ während seines Umlaufes um die Erde, welche oben §. 152. und 153. erörtert worden sind.

II. Da die Bahn des Mondes den Beobachtungen zufolge ohngefähr einen Winkel von 5 Graden mit der Erdbahn macht, so liegt hierin die Ursache, daß wir nicht bey jedem **Neumonde** eine **Sonnenfinsterniß**, und bey jedem **Vollmonde** eine **Mondfinsterniß** haben. So aber können wir nur in dem Falle zugleich eine Finsterniß haben, wenn der Mond, zur Zeit, da er neu oder voll ist, zugleich nahe bey der Durchschnittslinie seiner Bahn mit der Erdbahn, sich befindet. (§. 155. 156.).

III. Der Mond rückt in seiner Bahn von Westen nach Osten alle Tage ohngefähr um 13 Grade fort, und ist nach ohngefähr 27 Tagen wieder bey denselben Fixsternen zu sehen. Er hat also in eben dieser Zeit auch seinen würklichen Umlauf um die Erde gemacht. Gesetzt aber, er sey am Anfange der 27 Tage auch in **gerader Linie (in Zusammenkunft)** mit der Sonne, also **neu** gewesen (I) so wird er nach Verfluß dieser 27 Tage nicht mit der Sonne wieder in gerader Linie stehen können, weil indessen die Sonne selbst von Westen nach Osten in der Ecliptik fortgerückt ist, und also noch eine beträchtliche Zeit verfließen muß, ehe der Mond sie einhohlt. Darum ist die Zeit von einem Neumonde bis zum nächsten, und so auch von einem Vollmonde zum nächsten, allemahl grösser als die würkliche Umlaufszeit

des

des Mondes um die Erde. Jene heist man den synodischen Umlauf, und diese den periodischen. Die genauesten Beobachtungen geben die mittlere synodische Umlaufszeit = 29 Tägen 12 St. 44 Min 3 S. Da hingegen die mittlere periodische Umlaufszeit zu 27 Tagen 7 St. 43 Min. 11 Sec. angenommen wird. Da aber der ☽ in seinem Laufe viele Ungleichheiten hat, so sind die **wahren** Umlaufszeiten von dem **mittlern** gewöhnlich immer um mehrere Stunden und Minuten unterschieden. So wie nun bey dem Monde unserer Erde, jene beyde Umlaufszeiten zu unterscheiden sind, so ist dies auch der Fall bey den Monden anderer Planeten, daß in Absicht auf ihre Zusammenkunft mit der Sonne, synodische Umlaufszeit mit der periodischen nicht zu verwechseln ist (§. 199 a). (M.)

Anmerkung.

239. Wenn sich die Erde nach dem (§. 235.) angenommenen Systeme wirklich um ihre Axe wälzt, so suchet alle Materie, die ihr zugehöret, sich von dem Mittelpunkte des Kreises, in dessen Umfange sie sich befindet, vermöge der Schwungkraft zu entfernen, und zwar unter dem Aequator am meisten, nach den Polen zu weniger. Da nun eben diese Materie auch vermöge der Schwerkraft gegen den Mittelpunkt der Erde getrieben wird, diese Schwere durch jene Schwungkraft aber nothwendig vermindert werden muß, so wird ein Körper unter dem Aequator gleichsam durch eine geringere Schwere getrieben, und also daselbst in einer Secunde nicht so tief fallen können, als an Orten auf der Erde, welche näher nach den Polen zu liegen.

Nun lehrt aber auch die Mechanik, daß die **Perpendikel an den Uhren** desto langsamer schwingen müssen, je geringer die Schwerkraft an dem Orte ist, wo sich die Uhren befinden. Also kann **dieselbe Pendeluhr** unter dem Aequator nicht so geschwinde gehen, als an einem Orte näher nach den Polen zu. Dies hat denn **Richer**, ein Franzose, wirklich durch die Erfahrung bestätigt gefunden. Denn als er eine Secundenuhr von Paris nach der Insel Cajenne in Amerika brachte, welche nicht über 4 bis 5 Grad vom Aequator wegliegt, so blieb sie täglich in ihrem Gange um 2′ . 28″ zurück, und er

mußte das Perpendikel um $1\frac{3}{4}$ Linie kürzer machen, wenn es in Cajenne eben so geschwind, als in Paris gehen sollte. Ein neuer Beweis, daß die Erde sich würklich um ihre Axe drehen muß. (M.)

Anmerkung.

240. Man nennet den beschriebenen Weltbau den Copernicanischen, weil ihn **Copernicus** in den neuern Zeiten wieder in Aufnehmen gebracht: denn unter den Alten haben schon **Philolaus** und andere ihn vertheidiget. Es hat zur Zeit niemand etwas erhebliches wider ihn einwenden können. Was insgemein von Unverständigen angeführet wird, die entweder die Eigenschaft der Schwere vergessen, oder nicht bedenken, daß zugleich die Luft mit der Erde sich innerhalb 24 Stunden um ihre Axe bewege: verdienet nicht beantwortet zu werden. Dergleichen ist, daß ein Stein nicht unten bey dem Thurm fallen könnte, wenn er von oben herunter geworfen würde. Der einige Zweifel kann hier entstehen, daß, wenn die Erde einmal in O, das anderemal in M ist, der Fixstern S in Ansehung des Diameters der Erdbahn OM eine merkliche Parallaxin haben müßte. Dergleichen aber aus den Observationen nicht zu erweisen gewesen. Hierauf hat schon **Copernicus** geantwortet, es wäre der Diameter der Erdbahn OM in Ansehung der Entfernung des Sternes von der Erde OS oder SM nur für ein Punkt zu halten, und daher der Winkel OSM oder die Parallaxis des Fixsternes unmerklich. Man darf nicht einwenden, als wenn solchergestalt der Fixstern beynahe einen so grossen Diameter haben müsse, als die Erdbahn; denn man siehet ihn wegen seines starken Lichtes, und nicht wegen seiner Grösse (§. 298.)

II. 15.

Anmerkung.

241. **Cassini** (wie **Gregorius** in Element. Astronom. Schol. prop. 54. f. 274. angemerket) hat observiret, daß der erste Stern im Widder zuweilen in zwey zertheilet erscheine, dergleichen er auch von dem einen Haupte der Zwillinge gefunden. Einige andere in den Plejaden, und der mittlere in dem Orions-Schwerdte sind ihm zuweilen dreyfach, ja vierfach erschienen, dessen Ursache sich gar wohl aus der Bewegung der Erde um die Sonne begreifen lässet. Denn wenn sie in O ist, könnet ihr zwey Sterne, deren einer niedriger als der andere, in Einem Ort sehen, die ihr aus M in verschiedene Oerter setzet.

241 a) Die Herrn Christian **Mayer**, (ehemals Astronom auf der Sternwarte zu Manheim) und **Herschel**, haben das Verzeichnis der **Doppelsterne** sehr vermehrt. (**Bode** astron. Jahrb. 1784. S. 183 und 1786. S. 187.) Von den Nutzen der Doppelsterne die **Parallaxe der Fixsterne** zu finden, handelt **Herschel** in seiner Schrift on the parallax of the fixed Stars, catalogne of double Stars. London 1782. und im Auszuge **Röslers** pract. Astr. §. 514.

241 b) Man muß indessen nicht jede kleine Aenderung, welche man in den gegenseitigen Lagen sehr nahe an einander stehenden, oder auch weiter von einander entfernten Fixsterne bemerkt, einer Parallaxe zuschreiben. Da das Licht, das von einem Fixsterne ausfährt, sich mit einer Geschwindigkeit fortbewegt, gegen welche die Geschwindigkeit unserer Erde in ihrer Bahn nicht ganz für Null anzusehen ist, indem jene zu dieser sich ohngefähr wie 10313 : 1 verhält, so kann hieraus allein schon eine scheinbare Aenderung in den gegenseitigen Lagen der Fixsterne erfolgen. Denn wenn das Auge eines Beobachters mit der Erde zugleich, sich nach einer Richtung fortbewegt, welche von derjenigen unterschieden ist, nach welcher ein Lichtstrahl von dem Sterne nach dem Auge des Beobachters herabfährt, so kann das Auge jenen Lichtstrahl nicht in seiner wahren Richtung empfinden, und wird daher den Stern an eine etwas andere Stelle hinsetzen, als wo er würklich steht. Es verhält sich mit einem Lichtkügelchen, welches in ein Auge fährt, ohngefähr wie mit einer Kanonenkugel, welche gegen einen Damm fährt, der sich selbst fortbewegte. Wäre der Damm unbeweglich, so müßte er ohnstreitig von der Kugel in ihrer wahren Richtung durchbohrt werden, und das würde auch der Fall seyn, wenn er sich derselben gerade entgegen bewegte, oder in derselben Richtung von ihr weg. Bewegte er sich aber nach einer andern Richtung als die Kugel, so muß letztere in dem Augenblicke, da sie an den Damm fährt, an der Richtung desselben Theil nehmen, und ihn daher in einer ganz andern Richtung durchbohren, als in der sie an den Damm fährt. Je grösser die Geschwindigkeit des Dammes in Vergleichung der Kugel ist, desto mehr wird auch die Richtung der letztern beym Hineinfahren in den Damm abgeändert werden müssen. Die Anwendung auf den Lichtstrahl der in das Auge fährt, ist leicht. Man kann zeigen, daß bey dem angenommenen Verhältnisse der Geschwindigkeit des Lichtes zu der der Erde,

der scheinbare Ort eines Sternes um 20″ von dem wahren verschieden seyn kann, und daß dieser Unterschied abnimmt, je mehr die Richtung, welche die Erde in ihrer Bahn hat, mit der nach dem Sterne zusammenfällt. Man nennt diese von der allmähligen Fortpflanzung des Lichtes herrührende scheinbare Aenderung in dem Orte eines Sternes die **Abirrung des Lichtes**, (Aberration) und hat durch Hülfe der Geometrie Formeln gefunden, sie für jeden Ort der Erde, und für jeden Stern zu berechnen, und dadurch sehr glücklich manche scheinbare Aenderungen in den gegenseitigen Lagen der Fixsterne erkläret, welche wichtige Entdeckung von dem berühmten Astronomen **Bradley** gemacht worden ist. Man sehe hierüber mein Programm de aberrationibus stellarum fixarum computandis. Erlangae 1786.

241 c) Man kann hierbey fragen, wie hat man die Geschwindigkeit des Lichtes selbst finden können? Hierauf dient zur Antwort, daß uns die **Verfinsterungen der Jupiterstrabanten** diese wichtige Kenntniß verschafft haben. Als man von dem Laufe dieser Monde schon hinlänglich unterrichtet war, um ihre Verfinsterungen, wie unsere Mondfinsternisse mit Genauigkeit berechnen zu können, so äusserte sich doch ein so beträchtlicher Unterschied zwischen den berechneten und beobachteten Zeiten der Ein- und Austritte (§. 215.) der Trabanten, daß man solchen unmöglich auf Fehler der Theorie schieben konnte. Diese treffen immer desto später ein, je weiter die Erde vom Jupiter absteht, und wenn die Erde diesseits der Sonne, der ♃ jenseits derselben steht, die Erde also beynahe um den halben Durchmesser der Erdbahn weiter von dem Jupiter weg ist, als wenn sie sich in der mittlern Entfernung vom Jupiter befindet, so eräugnen sich die beobachteten Ein- und Austritte um 8′ . 7″ später, als sie unter der Voraussetzung, daß die Erde in dem mittlern Abstand bleibe, eintreffen müßten, und man kann die Ursache hiervon in nichts anderm finden, als daß das Licht eine gewisse Zeit braucht, einen so beträchtlichen Weg, als der Halbmesser der Erdbahn ist, zurückzulegen. Denn wenn uns ein Licht nicht in demselben Augenblicke sichtbar wird, da es entsteht, so werden wir den Trabanten auch nicht in dem Augenblicke sehen, wenn er aus dem Schatten seines Planeten tritt, und gegentheils werden die letzten Strahlen des in den Schatten sich eintauchenden Trabanten erst zu uns gelangen, wenn er schon einige Zeit verfinstert ist. Beträgt demnach die Zeit, welche das Licht braucht, einen Halbmes-

ser

ser der Erdbahn zu durchlaufen 8 Minuten 7 Secunden, so müssen sich auch die Verfinsterungen der Jupiterstrabanten um so viel später ereignen, wenn die Erde um jenen Halbmesser weiter von dem Jupiter weg ist.

Hieraus kann man nun leicht nach der Regel de tri finden, wie groß der Weg ist, den das Licht in einer Zeitsekunde durchlaufen würde. Der Halbmesser der Erdbahn beträgt 24000 Halbmesser unserer Erdkugel, oder 24000 mahl 860 geographische Meilen. Also durchläuft das Licht in einer Secunde 49280 Meilen, und bewegt sich daher 900000 mahl geschwinder, als der Schall (der in einer Secunde ohngefähr 1040 pariser Schuhe durchläuft) und 10313 mahl geschwinder, als die Erde in ihrer Bahn.

241 d) Einige scheinbare Aenderungen in den gegenseitigen Lagen der Fixsterne, lassen sich auch aus einer gewissen periodischen Aenderung, welche die Lage der Erdaxe, und folglich auch den Aequator, und die Schiefe der Ecliptik durch die Einwürkung des Mondes auf unsere Erdkugel erfahren (§. 71 a) und welche man die **Nutation** der Erdaxe heist, erklären. M. s. über diese Aenderungen **de la Lande** Astr. I.iv. XVII.

241 e) Giebt es nun aber auch Aenderungen in den Stellungen und Lagen der Fixsterne, welche sich weder durch das **Rückwärtsgehen der Aequinoctialpunkte** (§. 98 a) noch durch eine **Parallaxe der Erdbahn** (§. 240.) noch durch die **Aberration** (§. 241 b) noch durch die **Nutation** (§. 241 d) erklären lassen, so müssen solche entweder von einer **eigenen Bewegung der Fixsterne**, oder von einer **Fortrückung der Sonne** mit allen Planeten, d. h. **des ganzen Planetensystems** herrühren. Die Beobachtungen haben in der That so etwas gewiesen, und **Tobias Mayer** hat zuerst auf diese **eigene Bewegung** der Fixsterne, sie sey nun eine **wahre**, oder aus dem Fortrücken des Planetensystems erfolgende **scheinbare**, Aufmerksamkeit erregt. (de motu fixarum proprio in dessen opp. ineditis) bey dem Arcturus (§. 92.) ist diese Veränderung des Orts am merklichsten. Mayer zweifelte, daß diese Aenderungen, die man in den Lagen noch viel anderer Fixsterne bemerkt hat, blos **scheinbar** wären, und von einem Fortrücken unseres Planetensystems hrrrührten. Aber Herschel hat doch gefunden, daß, wenn man annimmt, die Sonne mit allen Planeten bewege sich nach einer Richtung,

die

die ohngefähr nach dem Sterne λ im Hercules hinweiset, die Bewegung und Ortsveränderung von 22 Sternen unter 29, deren Bewegung ausgemacht ist, sich sehr gut erklären lassen, daß also allerdings eine **Fortrückung unseres Planetensystems** statt finden könne, wiewohl er nicht läugnet, daß auch manche Fixsterne dabey noch eine **wahre, eigene,** Bewegung haben könnten. Hierüber, so wie über mehrere andere damit in Verbindung stehende sinnreiche Muthmaßungen und Bemerkungen umständlich in **Röslers** prakt. Astron. §. 506. **Prevost** über das Fortrücken des Sonnensystems in Bode astr. Jahrbuche für 1786. 259. S. Auch Hr. **Wurm** das. 1795. S. 175. Es wird noch sehr lange dauern alles hieher gehörige vollkommen genugthuend zu erklären. (M.)

Lehrsatz.

IV. 20. **242. Die Erde und alle übrigen Hauptplaneten, als ☿, ♄, ♃, ♂, ♀ und ☉ bewegen sich in einer Ellipsi um die Sonne, welche in ihrem einen Brennpunkte S lieget, und zwar dergestalt, daß die Linie SI, welche aus der Sonne in den Mittelpunkt des Planeten gezogen wird, in gleicher Zeit gleiche Theile von der Ellipsi beschreibet, so daß der Theil von der Ellipsi ASI sich zu der ganzen Ellipsi verhält, wie die Zeit, da der Planet den Bogen AI durchläufet, zu der Zeit, da er die ganze Peripherie durchwandert.**

Anmerkung.

243. Dieses merkwürdige Gesetz, daß die Planeten um die Sonne keine vollkommenen Kreise, sondern **Ellipsen** (§. 21. 22. h. Geom.) beschreiben, in deren einem **Brennpunkte** (§. 22. VIII. h. Geom.) sich allemahl die Sonne befindet, hat **Kepler** entdeckt, und **Neuton** hat aus dem Gesetze der allgemeinen Schwere oder Gravitation die physische Ursache dieser elliptischen Bewegung der Planeten gewiesen.

I. Da die Planeten sich nemlich alle um die Sonne bewegen, so muß der Grund hievon in der Sonne selbst mit zu suchen seyn, oder vielmehr in ihr muß die Ursache liegen, daß

ein

ein Planet nicht in jedem Punkte seiner Bahn, der Richtung die er daselbst hat, ohne Ende hinaus folgen kann, sondern vielmehr alle Augenblicke genöthigt wird, diese Richtung zu verlassen, und eine krumme Linie um die Sonne zu beschreiben. Gesetzt der Planet sey in dem Punkte a, (Fig. 26. Tab. V.) V. seiner Bahn um die Sonne S. Man ziehe an diesen Punkt 26. eine Tangente a d, so wird ein unendlich kleines Stückchen der krummen Linie bey a z. E. a b mit der Richtung der Tangente a d übereinkommen, und man kann also sagen, daß in dem Augenblicke, da der Planet bey a ist, a d die **Richtung seiner Bewegung** sey. Wäre nun nicht etwas vorhanden, was den Planeten nach der Sonne zu triebe, so würde er in dieser Richtung a d ohne Ende hinaus fortgehen, und sich solchergestalt immer weiter und weiter von der Sonne entfernen, weil es ein ewiges Naturgesetz ist, daß kein Körper von selbst, die Richtung, die er in einem gewissen Augenblicke seiner Bewegung hat, ohne Einwürkung einer äussern Ursache verlassen, und eine neue Richtung annehmen kann. Da nun aber der Planet nach Verfluß einer gewissen Zeit nicht z. E. in dem Punkte c der Richtung ad, sondern vielmehr bey c sich befindet, so muß ihn während jener Zeit beständig etwas von der Richtung a d die er bey a hatte, abgezogen haben, so daß er nunmehr bey c der Sonne gleichsam wieder um so viel näher ist, als ihn jene Bewegung längs a d von der Sonne würde entfernt haben. Kömmt der Planet nach c, so würde die Tangente c f die Richtung seiner Bewegung seyn, und von ihr eben das gelten, was vorhin von a d gesagt worden ist. Man sieht also, daß wenn nicht eine Kraft vorhanden wäre, die den Planeten beständig nach der Sonne erhielte, er nie eine zusammenhängende krumme Linie um sie beschreiben könnte. So ist denn klar, daß ein Planet gleichsam durch zwey Kräfte getrieben wird, deren eine ihn beständig sucht von der Sonne zu entfernen, die andere ihn aber wieder zu nähern, so daß er nie unter einem gewissen Abstande sich der Sonne nähere, und über einen andern sich von ihr entfernen kann. Die eine Kraft nach der Richtung a d heist die **Tangentialkraft**, oder auch in so fern sie den Planeten sucht von S zu entfernen, die **Centrifugalkraft**, die andere, welche ihn dagegen beständig wieder nach S treibt, die **anziehende Kraft**, oder **Centripetalkraft**, und man gedenkt sich diese ohngefähr wie die Schwerkraft auf unserer Erde, welche jeden Körper nach der Oberfläche der Erde zu fallen nöthigt. So würkte denn die Sonne durch ihre Ziehkraft durch das ganze Planetensystem, und alle Planeten sind also gleichsam nach

der

der Sonne zu schwer, und werden durch diese Gravitation in ihren Bahnen erhalten. Aber sie würden auch sämmtlich dieser Schwere nach der Sonne zu folgen, und endlich auf sie fallen, wie ein Stein zur Erde, wenn ihnen Gott bey der Schöpfung nicht jene Tangentialkraft ertheilt hätte, durch deren beständige Fortwürkung sie gehindert werden, jener Schwere zu gehorchen.

V. 27. II. Man kann in der Mechanik zeigen, daß wenn ein Körper B (Fig. 27. Astr. Tab. V.) durch zwey Kräfte nach den Richtungen BA und BC zugleich getrieben wird, er sich nach der Diagonallinie BD eines Parallelogramms bewegen muß, dessen beyde Seiten BA und BC sich wie die Kräfte selbst verhalten.

V. 28. Gesetzt demnach ein Planet a (Fig. 28. T. V.) habe bey der Schöpfung eine Bewegung nach der Richtung ad erhalten, und werde nun beständig nach der Sonne S gezogen. Bey a verhalte sich die Kraft nach ad zu der nach S wie ac : am, so wird der Planet nach der Richtung ae der Diagonallinie des Parallelogramms amce sich bewegen. Nun würde er aber immer in dieser neuen Richtung af mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortgehen, wenn er bey e nicht wieder nach S gezogen würde. Man nehme en = ae und setze die Kraft mit der der Körper längs ef fortgehen will, verhalte sich zu der nach S wie en : eg, so wird er wieder nach der Diagonallinie ev sich bewegen, und also die neue Richtung eh bekommen. So erhält er also in dem ersten Augenblicke die Richtung ae, in dem zweyten die Richtung ev, und so in jedem folgenden eine neue, und wenn nun die Zeittheile unendlich klein, mithin auch die Stückchen ae, ev, vt &c. unendlich klein gedacht werden, so bilden sie zusammen eine krumme Linie aevt &c. die der Planet um die Sonne S beschreiben wird.

III. Da nun ae und en, und folglich auch ae und ev in gleichen Zeittheilchen beschrieben werden, so müssen auch die Flächenräume aSe, und eSv von gleicher Grösse seyn. Denn man gedenke sich von S nach n eine gerade Linie, so sind wegen ae = en, die Dreyecke aSe = Sen (§. 119. Geom.) und nun auch weil vn parallel mit eS die Dreyecke Sen = Sev (Geom. §. 119.) Also auch △ aSe = △ Sev. Hieraus folgt denn weiter, daß auch die Flächenräume aSv, vSk die in einer gleichgrossen Menge gleicher Zeittheilchen, also in gleichen endlichen Zeiten beschrieben werden, einander gleich seyn, oder überhaupt sich wie die Zeiten verhalten müssen, in denen der

Planet

Planet die zugehörigen Bögen aev; vtk beschreibt. Und so wäre denn der Lehrs. (§. 242.) aus mechanischen Gründen erwiesen.

IV. Was von den Planeten um die Sonne gezeigt worden ist, gilt auch von den Monden oder Trabanten, welche sich um ihre Planeten bewegen. So beschreibt also der Mond seine Bahn um die Erde, indem ihn seine Anziehung zur Erde, oder die Schwerkraft darinn erhält, und Neuton hat gezeigt, daß diejenige Kraft, welche einen Stein zur Erde nieder treibt, auch dieselbe ist, die den Mond verhindert, nicht der Tangentialkraft zu folgen. Aber freylich kann diese Kraft der Schwere in dem Abstande, die der Mond von uns hat, nicht so groß, als nahe bey der Erdfläche seyn, so wie ein Magnet z. E. in einer Weite von mehreren Schuhen ein Stückchen Eisen nicht so stark als in der Nähe anziehen kann. Neuton untersuchte aus der bekannten Bewegung des Mondes, um wie viel er sich in Zeit von einer Minute der Erde nähern müßte, wenn ihn die Tangentialrichtung nicht aus seiner Bahn entfernen sollte, und fand, daß der Raum, um den ihn die Schwere niederziehen müßte, 3600 mahl geringer sey, als die Tiefe des Falles eines Körpers in einer Minute nahe an der Oberfläche der Erde. Da nun die Weite des Mondes vom Mittelpunkte des Erdkörpers ohngefähr 60 mahl grösser ist, als die Entfernung der Oberfläche der Erde vom Mittelpunkte, jene Zahl 3600 aber das Quadrat von 60 ist, so folgerte Neuton hieraus, die Schwerkraft vermindere sich in dem Verhältnisse, wie das Quadrat der Entfernung vom Mittelpunkte der Erde zunehme, und schloß nun, daß eben dieses Gesetz auch bey der Gravitation der Planeten gegen die Sonne statt finden möchte. Er fand, daß wenn man dieses Gesetz annähme, die krummen Linien, die die Planeten um die Sonne beschreiben müßten, würklich solche Ellipsen seyn, als den Beobachtungen zufolge gefunden wird, und bestätigte also dadurch eine Muthmaßung, die von den wichtigsten Folgen für die ganze Astronomie geworden ist. Kepler hatte auch schon vor Neuton entdeckt, **daß die Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten um die Sonne sich gegen einander verhielten, wie die Würfel ihrer mittlern Entfernungen von der Sonne**, und so muß es sich auch verhalten, wenn sich die Planeten in Ellipsen bewegen, und nach dem einen Brennpunkte der Ellipse angezogen werden. Die allgemeine Anziehung oder Schwere der Materie gegen einander, giebt also die Centripetalkraft bey der Bewegung der Planeten in ihren krummen Bahnen ab, die zwey-

te

te dazu erforderliche Centrifugal- oder Tangentialkraft scheint Gott den Körpern bey ihrer Schöpfung eingedrückt oder gegeben zu haben.

V. Wenn nun aber alle Materie gegen einander schwer ist, so werden umgekehrt auch die Planeten gegen einander selbst, und diese gegen ihre Monde schwer seyn. Dies verursacht denn, daß jeder Planet einigermaßen die elliptische Bewegung des andern um die Sonne stört, und daher gewisse **Ungleichheiten ihres Laufes** entstehen müssen, wie auch würklich die Beobachtungen gelehrt haben. So wird also z. B. die Bewegung der Erde um die Sonne vorzüglich durch die Venus und den Jupiter **gestört**, und der Mond in seiner Bewegung durch die anziehende Kraft der Sonne; der Mond kann also nicht so um die Erde gehen, als wenn ihn die Erde allein regierte, und seine Bahn weicht daher auch merklich von einer wahren Ellipse ab. Die Untersuchung derselben heist man die **Aufgabe von den drey Körpern**, (Sonne Mond und Erde) deren Auflösung den Astronomen viel zu schaffen gemacht hat. Durch die feinsten Kunstgriffe der Analysis und Mechanik hat man es aber dahin gebracht, Tafeln für die Bewegung des Mondes zu berechnen, welche mit den Beobachtungen bis auf Kleinigkeiten übereinstimmen. Die **Mondstafeln von Tobias Mayer**, wodurch er seinen Erben einen Theil des auf die Erfindung der Länge zur See von der Admiralität in Engelland gesetzten Preises erworben, stimmen mit dem Himmel wohl noch am besten überein, zumahl wenn man damit die vortrefflichen **Sonnentafeln** des Hrn. Obristwachtm. und Astronomen **von Zach** in Gotha, bey welchen auch auf die Störungen des ♂ Rücksicht genommen worden ist, verbindet. Uebrigens muß man nicht vergessen, daß Uebereinstimmung der Tafeln mit dem **Himmel**, und mit **Beobachtungen** (zumahl wie jetzt oft beobachtet wird) nicht einerley ist. Fehler der Beobachtungen werden oft auf Fehler der Tafeln geschoben.

VI. Die Aenderungen in der Schiefe der Ecliptik, das Rückwärtsgehen der Aequinoctialpunkte und mehrere andere Dinge hängen ebenfalls von den gegenseitigen Würkungen der Planeten und ihrer Monde ab. Dies aber alles umständlich zu erklären, gehört nicht für die ersten Anfangsgründe, und man muß darüber die Schriften eines **Eulers, d' Alemberts, Clairauts, de Lambre, de la Place**, u. m. lesen. In de la **Lande** Astronomie werden diese Gegenstände, so elementarisch als möglich behandelt. Da Wolf gar nichts

von den Gesetzen der Gravitation, und ihren Würkungen gelehrt hat, so glaube ich, daß die Wichtigkeit des Gegenstandes, diese lange Anmerkung rechtfertigen wird. (M.)

Erklärung.

IV. 20.

244. **Perihelium ist der Punkt P, wo der Planet der Sonne S am nähesten ist; Aphelium aber der Punkt A, in welchem er von der Sonne am weitesten wegstehet.**

Anmerkung.

245. Diejenigen, welche den Planeten mit der Sonne eine Bewegung um die Erde zueignen, nennen den Punkt P das Perigäum; den Punkt A aber das Apogäum, indem sie in S die Erde setzen.

245 a) Bey dem ☽ sind diese Benennungen gebräuchlich.

Erklärung.

IV. 20.

246. **Die Linie PA, welche aus dem Perihelio in das Aphelium gezogen wird, heisset** Linea Absidum.

Erklärung.

247. **Die Weite des Brennpunktes S, wo die Sonne ist, von dem Mittelpunkte C, wird die Eccentricität genennet.**

Erklärung.

248. **Die Linie SI, welche aus dem Mittelpunkte der Sonne S in die Peripherie der Ellipsis, oder die Bahn des Planeten gezogen wird, heisset die Distanz oder Weite, im Lateinischen auch** Intervallum.

Erfahrung.

249. **Die mittlere Anomalie ist die Zeit, welche der Planet zubringet, indem er von dem Apogäo oder Aphelio A bis zu einem gewissen Punkte I in seiner Bahn fortgehet.**

Zusatz.

IV. 20. 250. Also schicket sich zu ihrem Maasse das Stücke von der elliptischen Fläche ASI, welches die Linie, so aus der Sonne S in den Planeten I gezogen wird, währender Zeit beschrieben (§. 242.).

Anmerkung.

251. Zu dem Ende theilet Kepler, dem wir diese Theorie zu danken haben, die ganze Ellipsi in 360 gleiche Theile, und jeden Theil in 60 Scrupel, wie man den Circul einzutheilen pfleget; und durch die Theile und ihre Scrupel spricht er die mittlere Anomalie aus.

Erklärung.

252. Durch die mittlere Bewegung verstehet man diejenige, vermöge welcher der Planet in gleicher Zeit gleiche Stücke von seiner Bahn beschreibet.

Erklärung.

253. Hingegen durch die wahre Bewegung verstehen wir diejenige, welche wir dem Planeten zueignen, indem wir auf der Erde auf ihn Achtung geben.

Erklärung.

IV. 20. 254. Der eccentrische Circul ist derjenige, welcher mit der halben Axe CA durch das Aphelium A und Perihelium P beschrieben wird.

Erklärung.

255. Die eccentrische Anomalie ist der Bogen des eccentrischen Circuls AK, zwischen der Apsidenlinie PA und der Linie KL, die durch den Mittelpunkt des Planeten I auf die Linie PA perpendicular gezogen wird, und oben in K den eccentrischen Circul durchschneidet, wenn man sie verlängert.

Erklä-

Erklärung.

256. Die coäquirte Anomalie ist der Winkel ASI, welchen die beyden Linien, so aus dem Mittelpunkte der Sonne S in das Aphelium A und den Planeten I gezogen werden, mit einander machen, das ist, der Winkel, unter welchem der Bogen zwischen dem Aphelio und dem Planeten aus der Sonne gesehen wird.

Anmerkung.

257. Daher nennet man sie auch Angulum ad Solem, oder den Winkel an der Sonne. Ihr könnet euch auch einbilden, als wenn aus A über den Fixsternen ein grosser Circul beschrieben würde. Alsdenn wäre die Anomalia coaequata ein Bogen von diesem Circul zwischen dem Aphelio und dem Orte, wo der Mittelpunkt des Planeten gesehen wird.

Erklärung.

258. Die Aequation oder Prostaphäresis, ist der Unterscheid der mittleren und coäquirten Anomalie.

Anmerkung.

259. Man pfleget sie auch Aequationem centri zu nennen. Und Kepler (Epit. Astron. Copern. lib. 5. part. 2. c. 4. p. 691.) theilet sie in zwey Theile: nemlich Aequationem Opticam & Physicam. Er setzet nemlich, daß nicht allein wegen der verschiedenen Weite von der Sonne die Bewegung des Planeten ungleich erscheine, sondern auch wirklich ungleich sey in seiner Bahn. Und nennet er partem aequationis physicam, den Triangel CSI, oder, welcher ihm gleichgültig ist, den Triangel CSK, (den er sonst Triangulum aequatorium heisset); hingegen den Winkel CIS partem opticam. Wie man alle diese Sachen finden, und dadurch die Bewegung der Planeten um die Sonne ausrechnen kann, zeige ich in den Anfangsgründen.

259 a) Anfänger können sich mit den Erklärungen, welche hier aus der **Keplerischen Theorie der elliptischen Bewegung** beygebracht worden sind, begnügen. Die Anwendung dieser Theorie erfordert aber, wegen den Ungleichheiten, welche die Planeten durch ihre gegenseitigen Ziehkräfte in

ihren Bahnen verursachen, noch allerley andere Kunstgriffe der Analysis und Mechanik, wenn von würklichen Tafeln die Rede ist, welche über die Bewegungen der Planeten berechnet werden sollen.

IV. 20. Die Keplerische Aufgabe selbst kömmt vorzüglich darauf an, **aus der mittlern Anomalie die wahre zu finden**, d. h. aus der Zeit, welche vom Durchgange eines Planeten durch sein Aphelium A verflossen ist, den zugehörigen Winkel ASI zu finden, und dadurch den Punkt I angeben zu können, wo sich der Planet am Ende der vorgegebenen Zeit befinden wird. Da nun aber die Zeit, welche der Planet braucht, den Bogen AI seiner Bahn zu durchlaufen, sich verhält wie das elliptische Stück Fläche ASI (§. 242.) so gedenke man sich an dem Mittelpunkte eines Kreises ADP einen Winkel ACK, welcher sich zu 360 Gr. verhalte, wie das elliptische Stück Fläche ASI zur ganzen Fläche der Ellipse, d. h. wie die Zeit, welche der Planet gebraucht hat, von seinem Aphelio A den Bogen AI zu beschreiben, zur ganzen Umlaufszeit des Planeten, so kann man den Winkel ACK selbst die mittlere Anomalie nennen, und es kömmt nun darauf an, aus diesem Winkel ACK, der für jede Zeit gegeben ist, die wahre Anomalie, oder den Winkel ASI zu finden. Die Auflösung dieser Aufgabe ist zwar nicht schwer, aber etwas weitläuftig. Man findet sie sehr schön in **de la Caille** Leçons elem. d' Astronomie ausgeführt. Das Bisherige mag hinreichen, Anfängern einen Begriff zu geben, wovon in dem Keplerischen Problem eigentlich die Rede ist.

Anmerkung.

260. Weil die übrigen Planeten ausser der Erde sich nicht in der Ecliptik bewegen, sondern in einer Bahn, welche gegen die Ecliptik unter einem gewissen Winkel incliniret ist: so hat man in Ansehung ihrer noch folgende Kunstwörter nöthig.

Erklärung.

261. Die Nodi oder Knoten sind die beyden Punkte der Ecliptik, in welchen die erweiterte Bahn des Planeten sie durchschneidet.

Anmerkung.

262. Die Ecliptik wird in der äussersten Fläche der Weltkugel über den Fixsternen angenommen (§. 45.). Die Bahn des Planetens wird von seinem Mittelpunkte beschrieben, in-

dem

dem er sich um die Sonne herum beweget, und ist solchergestalt von der Ecliptik entfernet. Bildet euch aber ein, als wenn der Circul, oder vielmehr die Ellipsis, darinnen sich der Planet beweget, dergestalt erweitert würde, daß er gleichfalls bis über die Fixsterne gienge, so werdet ihr euch nicht allein besser einbilden können, als sonst, wie die Bahn des Planetens gegen die Fläche der Ecliptik incliniret ist, und sie in zwey Punkten durchschneidet, sondern auch das übrige, was von der Ausschweifung der Ecliptik gesaget werden soll, desto leichter verstehen.

Anmerkung.

263. Von dem einen Nodo fänget der Planet an über die Ecliptik heraufzusteigen in die nördlichen Zeichen: von dem andern aber steiget er herunter in die südlichen Zeichen. Jener wird Nodus ascendens, dieser descendens genennet. Zuweilen heisset auch jener, Nodus Borealis, dieser aber Australis. Jenen deutet man an durch ☊; diesen aber durch ☋. In dem Monde nennet man jenen den **Drachenkopf**, diesen aber den **Drachenschwanz**.

Erklärung.

264. **Die Inclination wird genennet der Bogen PR eines Circuls, der durch den Planeten P und die Ecliptik dergestalt aus der Sonne S beschrieben wird, daß er mit ihr in R einen rechten Winkel machet, oder der Winkel an der Sonne PSR, dessen Maaß der Bogen PR ist.** III. 21.

264a) Statt dieser in ältern Schriften vorkommenden Benennung, bedient man sich jetzt lieber des Worts **heliocentrische Breite** des Planeten, m. s. unten (§. 276.)

Erklärung.

265. **Das Argument der Inclination ist der Bogen von der erweiterten Bahn des Planetens NP, welcher zwischen seinem aufsteigenden Knoten und dem Orte P, wo der Planet aus der Sonne S gesehen wird, enthalten ist.** III. 21.

Erklärung.

III. 21. 266. Der Eccentrische Ort des Planetens ist der Punkt P in seiner erweiterten Bahn, in welchem er aus der Sonne S gesehen wird.

Anmerkung.

267. Daher nennet man auch die Eccentrische Länge des Planetens den Bogen der Ecliptik NR, welcher zwischen dem ♈ und der Inclination des Planetens PR enthalten ist.

267a) Man heist sie auch die heliocentrische Länge (§. 270.)

Erklärung.

268. Die Reduktion der Ecliptik ist der Unterschied zwischen der Eccentrischen Länge und dem Argument der Inclination.

Erklärung.

III. 21. 269. Die curtirte oder verkürzte Weite des Planetens ist die Linie SR, welche zwischen dem Mittelpunkte der Sonne S und der Perpendicularlinie PR aus dem Planeten P auf der Fläche der Ecliptik enthalten ist. Der Unterschied zwischen der curtirten Weite SR und wahren PS von der Sonne S heisset die Curtirung oder Verkürzung.

Erklärung.

270. Der heliocentrische Ort des Planetens ist der Punkt der Ecliptik, wo der Planet aus der Sonne gesehen wird; der geocentrische aber, wo er von der Erde gesehen wird.

Erklärung.

III. 21. 271. Der Commutationswinkel, oder Winkel an der Sonne ESR ist der Unterschied zwischen dem wahren Orte der Sonne E, wo sie nemlich von der Erde T gesehen wird, und dem zur Ecliptik

tik reducirten Orte des Planetens R. Einige nennen sie Anomaliam Orbis.

Erklärung.

272. Der Elongationswinkel E T R (welcher auch der Winkel an der Erde genennet wird) ist der Unterschied zwischen dem wahren Orte der Sonne E und dem wahren Orte des Planetens, wo er von der Erde gesehen wird. III. 21.

Erklärung.

273. Die Parallaxis der Erdbahn ist der Winkel S R T, oder der Unterschied zwischen dem Commutations- und Elongationswinkel. III. 21.

273 a) Man muß diese Parallaxe der Erdbahn in Ansehung der Planeten, nicht mit der in Ansehung der Fixsterne (§. 240 und 241.) verwechseln.

Anmerkung.

274. Es ist abermals ein herrlicher Beweis für die Bewegung der Erde um die Sonne, daß diese Parallaxis grösser ist im Mars als im Jupiter, und grösser im Jupiter als im Saturn: denn der erste ist der Erde näher als der andere, der andere aber näher als der dritte. Die Grösse der Parallaxis aber richtet sich allezeit nach der Weite (§. 125.).

Erklärung.

275. Die Breite des Planetens ist die Weite von der Ecliptik P R, wie sie von der Erde gesehen wird, das ist der Winkel R T P. III. 21.

Anmerkung.

276. Also ist der Unterschied zwischen der Inclination und der Breite des Planetens leicht zu erachten. Jene nemlich ist der Winkel P S R, unter welchem des Planetens Abstand von der Ecliptik aus der Sonne gesehen wird; diese aber der Winkel R T P, unter welchem eben dieser Abstand aus der Erde erscheinet.

Anmerkung.

277. I. Es wird nicht undienlich seyn, hieher zu setzen, wie die Astronomen sowohl die Umlaufszeiten der Planeten um die Sonne, als auch ihre tägliche mittlere Bewegung, ihre Aphelia, Knoten, Excentricitäten,

u. d. g. in Theilen ihres mittlern Abstandes von der Sonne gefunden haben. Die Angaben sind aus de la Lande genommen.

	Umlaufs-Zeiten				mittlere tägl. Bewegung.			mittl. tägl. Beweg. d. ☽
	T.	St.	M.	S.	Gr.	′	″	Gr. ′ ″
Mercur	87.	23.	15.	43	4.	5.	33	13. 10. 35
Venus	224.	16.	49.	10	1.	36.	8	
Erde	365.	6.	9.	11	0.	59.	8	
Mars	686.	23.	30.	35	0.	31.	27	
Jupiter	4332.	14.	27.	11	0.	4.	59	
Saturn	10759.	1.	51.	8	0.	2.	1	
Uranus	30689.	18.	14.	0	0.	0.	43	

	Ort des Aphelii d. 1. Jan. 1793.				Jährl. Bew. des Aphelii				Excentricitäten
		Gr.	′	″	Gr.	′	″		
Mercur	♐.	14.	14.	17	0.	0.	57		0,2055
Venus	♒.	8.	30.	32	0.	0.	48		0,0069
Erde	♑.	9.	21.	48	0.	1.	4		0,0168
Mars	♍.	2.	16.	25	0.	1.	6		0,0931
Jupiter	♎.	11.	1.	44	0.	0.	57		0,0481
Saturn	♐.	28.	56.	28	0.	1.	6		0,0562
Uranus	♓.	17.	14.	39	0.	0.	53		0,0467
☽ Apog.	♌.	0.	49.	17	40.	39.	50		0,0436

	Ort des ☊ den 1. Jan. 1793.				Jährl. Bew. des ☊				Neigung d. Planetenb.		
		Gr.	′	″	Gr.	′	″		Gr.	′	″
Mercur	♉.	15.	51.	45	0.	0.	43		7.	0.	0
Venus	♊.	14.	48.	31	0.	0.	31		3.	23.	35
Mars	♉.	17.	58.	42	0.	0.	28		1.	51.	0
Jupiter	♋.	8.	19.	57	0.	0.	36		1.	19.	2
Saturn	♋.	21.	52.	59	0.	0.	32		2.	29.	55
Uranus	♊.	12.	49.	8	0.	0.	16		0.	46.	16
☽	♍.	18.	32.	0	19.	19.	43		5.	8.	30

II. Die Umlaufszeiten der Planeten sind hier diejenigen, welche man die **Sideralumläufe** nennt, nach Verfluß deren nemlich die Planeten von der Sonne aus wieder bey denselben Fixsternen wie zuvor wieder gesehen werden. Man unterscheidet von ihnen die **tropischen** Umläufe, nach Verfluß deren die Planeten wieder dieselbe gerade Aufsteigung oder Länge von der Sonne aus gesehen haben würden, und diese tropischen Umlaufszeiten können wegen der Verrückung der Aequinoctialpunkte, während der Planet sich um die Sonne bewegt, jenen Sideralumläufen nicht gleich seyn. So reichen z. E. die Aequinoctialpunkte innerhalb eines Jahres um 50″,3 zurück (§. 98.) oder in Ansehung der Bewegung der Erde um die Sonne, **vorwärts**, und man müßte also die Zeit, welche die Erde braucht diese 50″,3 zu beschreiben, d. h. 20 Minuten 24 Secunden von dem siderischen Umlaufe der Erde also von 365 T. 6 St. 9 Min. 11 Sec. abziehen, um ihren **tropischen Umlauf** = 365 T. 5 St. 48 Min. 48 Sec. zu erhalten. Eine ähnliche Rechnung kann man für die übrigen Planeten führen.

III. Die Oerter des Aphelii oder der Sonnenferne der Planeten **wachsen** jährlich um so viel, als in der Tabelle angegeben ist. Und so verhält sichs auch mit dem **Apogäo**, oder der **Erdferne des Mondes.**

IV. Die Oerter des ☊ der Planeten **wachsen** jährlich um so viel als angegeben ist. Aber der ☊ des ☽ nimmt ab, oder vielmehr bewegt sich jährlich **rückwärts**, nemlich der Ordnung der Zeichen **entgegen** (aus der ♏ in den ♐, aus dem ♐ in den ♑ u. s. w.) um so viel als in der Tabelle steht. Und so verhält sichs auch mit dem ☋, welcher von dem ☊ allemahl 180 Gr. oder um 6 Zeichen absteht.

V. Man kann also aus der Tabelle das Aphelium und den ☊ für jedes andere Jahr berechnen, als für welches diese Oerter in der Tabelle angegeben sind.

Bey den in der Tabelle angegebenen Excentricitäten, ist die mittlere Entfernung der Planeten von der Sonne allemahl die Einheit. Also zeigt z. E. die Zahl 0,0069 bey der **Venus** an, daß die Excentricität der Venusbahn $\frac{69}{10000}$ der mittlern Entfernung der ♀ von der Sonne betrage.

Unter der **Neigung der Planetenbahnen**, wird ihr Winkel mit der Ecliptik oder Erdbahn verstanden. (M.)

Anmerkung.

278. Aus der Theorie der Bewegung der Planeten hat man durch Hülfe der Trigonometrie gefunden, daß sich ihre mittlern Entfernungen von der Sonne beynahe wie folgende Zahlen verhalten:

☿; ♀; ♁; ♂; 4; ♃; ♅
4; 7; 10; 16; 52; 100; 196

Aber

$4 = 4$	$(28 = 4 + 8 \cdot 3)$
$7 = 4 + 1 \cdot 3$	$52 = 4 + 16 \cdot 3$
$10 = 4 + 2 \cdot 3$	$100 = 4 + 32 \cdot 3$
$16 = 4 + 4 \cdot 3$	$196 = 4 + 64 \cdot 3$

Das Gesetz dieser Reihe ist also klar, indem die Faktores:

1; 2; 4; 8; 16; 32; 64;

eine geometrische Progression ausmachen. Da aber zwischen dem ♂ und 4 noch die Zahl:

$$28 = 4 + 8 \cdot 3$$

diesem Gesetz zufolge fehlt, so läßt dies einen zwischen dem ♂ und 4 noch vorhandenen, aber bisher noch nicht entdeckten Planeten vermuthen. Merkwürdig ist, daß der Abstand 196 des Uranus, an diese Reihe, welche schon lange vor der Entdeckung des Uranus bekannt war, anschließt. (Wurm über mögliche Planeten unseres Sonnensystems, Bode astr. Jahrb. 1790. p. 167. (M.)

Aufgabe.

I. 8. 279. **Aus der gegebenen Parallaxi des Mondes TLV und seiner Höhe KL seine Weite von der Erde zu finden.**

Auflösung.

1. Da in dem Triangel TLV der Winkel L, imgleichen wegen des Winkels LVZ, dessen Maaß die Entfernung des Mondes von dem Zenith ist, der Winkel LVT (§. 38. Geom.) und der halbe Diameter der Erde $TV = 1$ bekannt sind; so könnet ihr die Seite TL finden (§. 20. Trig.)

2. Wenn

2. Wenn euch die Horizontal-Parallaxis TKV gegeben wird, so ist TVK ein rechter Winkel, und ihr verfahret wie vorhin.

Z. E. die größte Horizontal-Parallaxis TKV ist nach dem de la Hire (Tab. Astron. XVIII. p. 27.)

1° 1′ 25″

und demnach:

Log. Sin. TKV	8,2519888
Log. TV	0,0000000
Log. Sin. tot.	10,0000000
Log. TK	1,7480112

welchem in den Tafeln $55\frac{97}{100}$, das ist beynahe 56 halbe Diameters der Erde zukommen.

Aufgabe.

280. **Die Weite der Sonne von der Erde zu finden.**

Auflösung.

1. Ohngefähr 6 Stunden vor dem ersten Viertel, oder 6 Stunden nach dem letzten, observiret durch ein gutes und mit einem Micrometer versehenes Fernglas den Mond, dadurch ihr ihn ganz auf einmal übersehen könnet.
2. Merket die Zeit, da der Mond halb erleuchtet ist, nach einer guten Perpendiculuhr, und messet ohne Verzug seine Weite von zwey Fixsternen, deren Länge und Breite bekannt ist (§. 87.)
3. Suchet die Länge des Mondes durch die sphärische Trigonometrie, und den wahren Ort der Sonne durch die astronomischen Tafeln.
4. Ziehet die Länge der Sonne von der Länge des Mondes ab, so bleibet die Elongation des Mondes von der Sonne DS übrig. III. 22.
5. Da ihr nun bey dem in L rechtwinklichten Triangel TLS den Winkel LTS, dessen Maaß die Elongation

gation des Mondes ist, und eben des Mondes Weite von der Erde (§. 279.) wisset, könnet ihr die Weite der Sonne von der Erde T S finden (§. 20. Trig.) W. Z. T. W.

Anmerkung.

281. Je genauer man die Weite der Sonne zu suchen sich bemühet, je grösser kommet sie heraus, also, daß sie die alten Astronomen alle unstreitig viel zu klein ansetzen. **Mendelinus** hat die Weite der Sonne von der Erde 13751 halbe Diameter der Erde, und daraus ihre Parallaxin 15 Secunden gefunden, und Cassini auf seine Art nur 10 Secunden, mit welchem **Flammstädt** übereinkommet, da sie **Ricciolus** selbst noch 25 machet. **In de la Hire** setzet sie nur 6″.

281 a) Nach den neuesten Beobachtungen und Folgerungen aus den Durchgängen der ♀ vor der ☉ in den Jahren 1761. und 1769. ist die Parallaxe der Sonne im Horizonte = 8″,5. **Tob. Mayer** vermuthet in seiner theoria ☽ §. 51. daß sie nicht größer als 7″,8 seyn könne.

Zusatz.

282. Aus vielen vergleichenden Beobachtungen haben die Astronomen gefunden, daß wenn man den mittlern Halbmesser der Erdbahn zu 10000 Theilen annimmt, die größten und kleinsten Entfernungen der Planeten von der Sonne sich auf folgende Art verhalten;

Abstände der Planeten von der Sonne.

	kleinster	mittlerer	größter	Mittler. in Erdhalbm.
Mercur	3076	3871	4666	9391
Venus	7183	7233	7283	17547
Erde	9832	10000	10168	24260
Mars	13819	15237	16655	36965
Jupiter	49527	52028	54529	126220
Saturn	90043	95407	100771	231457
Uranus	181738	190818	199898	462924
☽ von d. Erde.	23,07	24,68	26,29	59,87

Der

Der mittlere Abstand der Erde von der Sonne in Erdhalbmessern ist aus der Horizontalparallaxe 8″,5 hergeleitet worden (§§. 280. 281.)

282a) Verlangte man die Abstände in der Columne V. dieser Tafel in geographischen Meilen, so darf jede Zahl dieser Columne nur noch mit $859\frac{1}{2}$, oder dem Halbmesser der Erdkugel in geogr. Meilen, multiplicirt werden. Dies giebt in Millionen von solchen Meilen ohngefähr folgendes:

☉	☿	♃	♂	♁	♀	☿;	In einzeln M.
400;	199;	108;	31;	21;	15;	8;	51468.

Anmerkung.

283. Wenn es nöthig ist, so kann man hieraus die Umfänge der Planetenbahnen, und denn aus ihren bekannten Umlaufszeiten weiter berechnen, wie viel Meilen jeder Planet z. E. in 1 Secunde zurücklegt.

Aufgabe.

284. **Aus der gegebenen Weite eines Sternes von der Erde TK, oder TS, seine Horizontal-Parallaxis TKV, imgleichen seine Parallaxin TSV in einer gegebenen Höhe zu finden.** I. 8.

Auflösung.

In dem bey V rechtwinklichten Triangel TKV könnet ihr aus den beyden Seiten TK und TV den Winkel TKV, imgleichen im Triangel TSV aus dem Winkel STV und den beyden Seiten TS und TV den Winkel TSV (§. 23. 28. Trigon.) finden.

Aufgabe.

285. **Aus der gegebenen Weite eines Sternes von der Erde und seinem scheinbaren Diameter den wahren Diameter zu finden.**

Auflösung.

In dem bey A rechtwinklichten Triangel ACO wisset ihr den Winkel O, als den scheinbaren halben Diameter, I. II.

meter, und die Weite des Sternes CO. Derowegen könnet ihr seinen wahren halben Diameter AC (§. 20. Trigon.) finden.

Z. E. es sey die geringste Weite des Mondes CO $55\frac{79}{100}$ (§. 279) und AOC nach dem de la Hire (Tab. Astron. XVIII. p. 27.) 16′ 30″; so ist

Log. Sin. tot.	10,0000000
CO	1,7480112
Sin. AOC	7,6812083
	9 4292195
Log. AC	— 0.5707805

welchen in den Tafeln $\frac{1000}{3722}$ am nächsten kommen.

Demnach ist der Diameter des Mondes $\frac{1000}{3722}$, oder $\frac{268}{1000}$ (§. 84. Arithm.) von dem Diameter der Erde.

Zusatz.

286. Weil der Diameter der Erde sich zu dem Diameter des Mondes verhält wie 250 zu 67 (§. 59. Arithm.); so verhält sich die Fläche der Erde zu der Fläche des Mondes, wie 62500 zu 4489 (§. 131. Geom.); hingegen die ganzen Körper verhalten sich gegen einander wie 15625000 zu 300763 (§. 212. Geom.).

Zusatz.

287. Derowegen ist die Fläche der Erde beynahe 14mal so groß, als die Fläche des Mondes; hingegen die ganze Erde ist beynahe 52 mal so groß, als der Mond (§. 52. Arithm.).

Zusatz.

288. Da nun unsere Erde das Sonnenlicht, damit sie bestrahlet wird, eben so wohl als der Mond zurücke wirfet, so muß sie 14 mal so viel Licht in den Mond, als der Mond auf die Erde werfen.

Zusatz.

Zusatz.

289. Daher ist nicht zu zweifeln, daß das schwache Licht, welches man um den Neumond in dem von der Sonne weggekehrten Theile des Mondes siehet, von der Erde sey, indem es dem erleuchteten Theile der Erde entgegengesetzet ist.

Anmerkung.

290. Wie der Erddiameter sich zu dem Diameter der übrigen Planeten, und seine Grösse zu ihrer Grösse verhält, ist aus beygefügtem Täfelein zu ersehen.

	Durchm. der Planet. in geographis. Meil.	Verhältn. gegen d. Durchmess. d. Erde.	Grösse d. Planeten in Vergleich. der Erde.
☽	465	0,27	1 : 50
☿	697	0,40	1 : 16
♂	1041	0,60	1 : 4,6
♀	1688	0,98	1 : 0,9
♁	1719	1,00	1 : 1
☉	7528	4,38	83 : 1
♄	17362	10,10	1030 : 1
♃	19566	11,38	1474 : 1
♄ Ring	40518	25,58	— —
☉	194490	113,14	1448079 : 1

(M.)

Aufgabe.

291. Aus dem halben Diameter des Monds AC und der Weite der Spitze eines Berges, die erleuchtet wird, von dem erleuchteten Theile des Mondes AB, die Höhe desselben Berges zu finden. I. 12.

Auflösung.

1. Addiret die Quadrate von AB und AC.

2. Aus der Summe ziehet die Quadratwurzel (§. 77. Arithm.); so habet ihr BC (§. 144. Geom.).

3. Zie-

3. Ziehet von BC den halben Diameter des Mondes DC ab; so bleibet die Höhe des Berges BD übrig.

Z. E. in einigen Bergen ist $AB = \frac{1}{26} AE$ (§. 184.). Wenn ihr nun AC 67 oder AE 134 dergleichen Theile gebet, als der halbe Diameter der Erde 250 hat (§. 286.); so ist $AB = 5\frac{2}{13}$ (§ 85. Arithm.), folgends zu AC wie $5\frac{2}{13}$ zu 67, oder wie 67 zu 871.

$AC^2 = 758641$	BC = 873
$AB^2 = 4489$	DC = 871
$BC^2 = 763130$	BD = 2.

Nehmet ihr nun ferner den halben Diameter der Erde, wie insgemein geschiehet, 860 deutsche Meilen an, so findet ihr AC $231\frac{7}{25}$ Meilen, oder beynahe 482 halbe Meilen (§. 85. Arithm.), und endlich, da sich BD zu AC wie 2 zu 871 verhält, BD etwas über eine halbe Meile.

Anmerkung.

292. Die Berge auf dem Monde sind zum Theil viel höher als die unsrigen. Berge von 10000 Schuhen Höhe sind hier nichts seltenes. Ja auf dem südlichen Mondrande hat Hr. Schröter welche angetroffen, deren Höhe er auf 25000 pariser Schuhe ansetzt. Wir wissen, daß der höchste Berg auf unserer Erde, nemlich der Chimboraço in America nur um 193200 solcher Schuhe sich über der Meeresfläche erhebt. (M).

Aufgabe.

293. **Den scheinbaren Diameter der Erde im Monde zu finden, das ist, den Winkel unter welchem die Erde im Monde gesehen wird.**

Auflösung.

Weil der halbe Diameter der Horizontal-Parallaxi des Mondes gleich ist, so habet ihr nur nöthig, diese zu suchen (§. 284.). Da sie nun in der geringsten Wei-

te

te 1° 1′ 25″ hält, so ist der scheinbare Diameter der Erde im ☽ niemals grösser, als 2° 3′ oder 123′.

Zusatz.

294. Daher siehet der Diameter der Erde beynahe viermal so groß im Monde aus, als der Diameter des Mondes auf der Erde.

Zusatz.

295. Weil aber die Erde unter einem so kleinen Winkel im Monde gesehen wird, so kann man nichts deutlich davon sehen (§. 26. Optik.) Und daher stellet sie sich den Seleniten nicht anders als ein runder hellleuchtender Teller vor.

Zusatz.

296. Solchergestalt siehet die Erde den Seleniten eben so wie uns der Mond aus, und wird dannenhero mit Recht von ihnen, wie von uns der Mond, unter die Zahl der Sterne, und zwar der Planeten gesetzet. Denn sie ist ein Körper, welcher ihnen des Nachts am Himmel leuchtet.

Anmerkung.

297. Ihr könnet leicht erachten, daß, wenn die Erde aus einem Planeten gesehen wird, der weiter von ihr weg ist, als der Mond, sie auch viel kleiner aussehen müsse (§. 23. Opt.) und also in einigen Orten auch wirklich wie ein Stern erscheine.

Erfahrung.

298. **Hugenius in seinem** Cosmotheoro lib. 2. p. m. 114. **merket an, daß durch die vortrefflichsten Ferngläser die Fixsterne nur wie ein heller Punkt ohne alle Breite erscheinen.**

Anmerkung.

299. Daher haben wir keinen gewissen Grund, daraus wir ihre wahre Grösse ermessen können.

Lehrsatz.

300. Die Fixsterne können ihr Licht nicht von der Sonne haben.

Beweis.

Sie sind weiter von der Sonne weg, als Saturnus (§. 217.), und doch ist ihr Licht viel heller, wird auch nicht schwächer, als das Licht der Planeten, wenn man sie durch Ferngläser ansiehet. Derowegen können sie es nicht von der Sonne haben. W. Z. E.

Zusätze.

301. Also haben sie ihr eigenes Licht, und sind demnach lauter Sonnen.

Anmerkung.

302. Daher ist glaublich, daß sie auch ihre Planeten haben, die sich um sie bewegen. Woraus denn eine unendliche Grösse des Weltgebäudes entspringet, und eine unzählige Zahl der vernünftigen Creaturen, die ihren Schöpfer loben.

Anmerkung.

303. Eben so hat man Ursache zu glauben, es sey Sirius nicht kleiner, als die Sonne, und hierauf hat sich Hugenius gegründet, als er in seinem Cosmotheoro S. 115. die Weite der Fixsterne von der Erde einigermassen ermessen wollen, welche er 27664 mal grösser, als die Weite der Sonne von der Erde setzet.

Erfahrung.

304. Zuweilen erscheinen einige Sterne, die man vorhin nicht sahe; über eine Weile verschwinden sie, und zu anderer Zeit kommen sie wieder. Dergleichen Stern ist auf der Brust des Schwanes, welcher von den Astronomen Mira oder der Wunderbare genennet wird. Andere hingegen kommen nicht mehr wieder, wenn sie sich einmal sehen lassen. Dergleichen ist der Stern, welcher zu Tychonis Zeiten in dem

dem Gestirne der Cassiopejä erschien, viel grösser und heller als alle übrige Sterne, so daß er auch des Nachts durch die Wolken, und des Tages bey hellem Sonnenschein von scharfen Augen gesehen wurde. Seine Grösse und Helle nahm nach und nach ab, bis er endlich ganz verschwand. Vid. Tycho Progymnasm. Tom. I. c. 3. & seqq.

Zusatz.

305. Die Sterne, welche bald erscheinen, bald verschwinden, sind vielleicht einige Planeten, die sich um die Fixsterne als ihre Sonnen bewegen (§. 302.); wiewohl ihr starkes Licht entgegen zu seyn scheinet, und man also nichts zuverläßiges bestimmen kann.

305 a) Was solche Sterne überhaupt, die man periodische oder auch veränderliche nennt, ihrer Natur nach seyn mögen, darüber kann man die verschiedenen Meynungen in Kösters pract. Astron. §. 498. nachlesen. Auch Wiedeburgs disquis. de Stellis mutabilibus &c. Ien. 1739. Man hat dergleichen Sterne, die ihr Licht verändern, eine Zeitlang wohl ganz verschwinden, und dann von neuem erscheinen, noch viel mehrere, als Wolf anführt.

Erfahrung.

306. Unter den Sternen, die sich nur zuweilen sehen lassen, haben einige eine Bewegung in Ansehung der Fixsterne, und öfters einen langen Schweif. Dieselben werden Cometen genennet. Sie bewegen sich über dieses auch, wie das ganze übrige himmlische Heer, in 24 Stunden um unsere Erde. Nach ihrer eigenen Bewegung aber folgen sie nicht wie die Planeten den Zeichen des Thierkreises, sondern gehen wohl von Mittage gegen Norden. Durch gute Ferngläser haben sie Heveln (Cometogr. lib. 8. f. 476.) wie unsere Wolken ausgese-

hen. Und da Weigel A. 1664. den Cometen zugleich mit dem Monde und einem Wölklein, so von der Sonne am Abendhorizont erleuchtet wurde, durch ein Fernglas betrachtete, nahm er wahr, daß das Licht des Mondes in einem fortgieng, das Licht der Wolken und des Cometen aber überall unterbrochen war. Es sahe das Licht des Mondes gegen das Licht der Wolken und des Cometens aus, wie eine ebene polirte Fläche gegen eine andere, die hin und wieder kleine Grüblein hat. S. die Fortsetzung des Himmelsspiegels c. 11. §. 5. p. 96. Die Köpfe der Cometen sehen in der Mitten dichter aus, als um den Rand, welchen mittleren Theil man den Kern nennet. Der Kern wird nach und nach kleiner, zerfähret in viel Stücke, ja endlich gar in eine Materie, die der übrigen gleich siehet. Vid. Hevelii Cometogr. lib. 9. f. 562. & lib. 7. f. 409. Es ist aber der Kopf der Cometen A. 1665. und 1680. ganz erleuchtet gewesen, als sie nur 22 bis 23 Grad von der Sonne wegstanden. Der Schweif hingegen ist so dünne, daß man die Fixsterne dadurch sehen kann, wie Hevel Cometogr. lib. 8. f. 516 & 517. anmerket, und der Sonne jederzeit entgegensetzet. Die Bewegung der Cometen ist überaus ordentlich, wie der Planeten, ob sie zwar einen besondern Thierkreis haben, den Cassini in folgende Verse eingeschlossen:

Antinous, Pegasusque, Andromeda, Taurus,
Orion,
Procyon atque Hydrus, Centaurus, Scorpius,
Arcus.

Auch hat man befunden, daß der Comet, welchen Tycho A. 1577. observiret, eben so geschwin-

chwinde und in eben dem Wege sich beweget, wie der, welcher A. 1690. erschien. Den letzteren hat man noch durch ein Fernglas erblicket, da er mit blossen Augen nicht mehr gesehen wurde.

Zusatz.

307. Weil die Cometen die erste Bewegung um die Erde mit dem ganzen himmlischen Heere gemein haben, so können sie sich nicht in der Luft aufhalten, wie Aristoteles geglaubet, sondern müssen in dem Himmel unter den Planeten, oder über denselben seyn.

Zusatz.

308. Da sie aber sonderlich durch Ferngläser bloß wie eine von der Sonne erleuchtete Wolke aussehen, so ist glaublich, daß sie für sich kein Licht haben, sondern es wie die Planeten von der Sonne bekommen.

Zusatz.

309. Derowegen, da die Cometen A. 1664. und A. 1683. ganz erleuchtet waren, wie sie von der Sonne nur 22 Gr. wegstanden, so müssen sie über der Sonne gewesen, das ist, weiter von der Erde gestanden seyn, als die Sonne.

Zusatz.

310. Da nun der Schweif von der Sonne erleuchtet wird, unerachtet er hinter dem Kopfe des Cometens, und also in seinem Schatten stehet, so muß das Sonnenlicht durch des Cometens Kopf durchfallen können, oder es müßte innerhalb dem Cometen ein Licht seyn.

310a) Oder der Schweif eines Kometen wäre eine Art von Atmosphäre, in der die Sonnenstrahlen erst gebrochen, und dann zu uns reflectirt würden.

Zusatz.

311. Der Schweif muß aber einem dünnen Nebel gleichen, weil sich die Sterne dadurch sehen lassen.

Zusatz.

312. Weil die Cometen eine so ordentliche Bewegung haben, auch wieder kommen, so müssen sie beständige Weltkörper seyn.

Anmerkung.

313. **Kepler** hält sie für Himelswolken, die in der subtilen Himmelsluft erzeuget würden, welche Meynung absonderlich **Hevel** in seiner Cometographia ausführet.

313a) Die neuere Sternkunde hat gelehrt, daß die Kometen zu unserem Sonnensysteme gehörige Körper sind, und sich um die Sonne in sehr langen excentrischen Ellipsen bewegen, von denen nur der geringste Theil von uns beobachtet werden kann. Manche Kometen mögen Jahrtausende zu ihrem Umlaufe um die Sonne brauchen, und wir sehen sie nur in demjenigen Theile ihrer Bahn, in welchem sie uns nahe genug sind. Aber es gehören ungemein scharfe Beobachtungen dazu, aus diesem Theile, auf die ganze Bahn zu schliessen, und dies ist denn die Ursache, warum wir nur von wenigen Kometen, die Bahn und Umlaufzeit so genau kennen, daß wir die Wiederkehr eines Kometen mit einiger Wahrscheinlichkeit voraussagen können. Das schönste und vollständigste Werk über die Kometen, ist Pingré Cometographie à Paris 1785. 2 Bände in 4. Die bis 1774. bekannt gewordenen Kometenbahnen finden sich in Hrn. Prof. **Bode** (Erläuter. d. Sternkunde II. Thl. S. 479.). **Lambert** (Kosmologische Briefe Augsp. 1761.) überschlägt die Zahl der zu unserem System gehörigen Kometen bis an 4000, und stellt ausserdem sehr sinnreiche Ideen über diese merkwürdigen Körper auf. Im Durchschnitte kann man alle zwey Jahre einen Kometen rechnen, aber manche sind freylich dem bloßen Auge nicht bemerkbar. Daß der uns sichtbare Theil einer Kometenbahn für ein Stück einer **Parabel** (§. 32. h. Geom.) genommen werden darf, hat Dörfel, ein Deutscher, zuerst gelehrt. Daß übrigens die Kometen sehr wenig Masse haben müssen, und daher **Keplers** Meynung (§. 313.) mit der auch Hr. Hofr. **Lichtenberg** (**Erxlebens** Naturlehre 5 Aufl. §. 644.) übereinstimmt, nicht so ganz unrichtig seyn möchte, erhellet daraus, daß sie durch ihre Anziehungskräfte bisher keine merkliche Störung in den Bahnen der Planeten hervorgebracht haben. Vielleicht ließe sich aber

auch

auch gedenken, daß ihre Masse, wenn sie auch dicht wäre, nur auf keine Planetenmasse würkte, so wie ein Magnet kein Holz zieht.

Ueber die Theorie der Kometenbahnen, nenne ich nur **Eulers** theor. motus planetarum et cometarum, und **Lamberts** proprietates insigniores orbitae cometarum et planetarum.

Anmerkung.

314. Es mögen aber die Cometen entweder Weltkörper seyn, die von Gott im Anfange der Welt erschaffen worden, oder auch aus den Ausdünstungen der Planeten, oder auf andere Weise von neuem entstehen, so kann man daher nicht erweisen, daß sie den Inwohnern der Erde entweder etwas Gutes oder etwas Böses bedeuten, wenn sie von ihnen gesehen werden. Denn in beyden Fällen hätte der Schluß keinen richtigen Grund. Ja in der Bibel hat sich Gott nirgends erkläret, daß er die Cometen zum Zeichen seines Zorns oder auch seiner Gnade gesetzet. Vielmehr hat er uns warnen lassen, daß wir uns vor den Zeichen des Himmels nicht fürchten sollen, wie die Heiden, Jer. 10. Und es wäre auch ungereimt, daß die Cometen Boten des göttlichen Zorns seyn sollten, da die meisten von den wenigsten Menschen gesehen werden, wie denn von 1699. an bis 1709. fast alle Jahre, aber nur von wenigen Astronomen bey nächtlicher Weile, Cometen gesehen worden. Vid. Histoire de l' Academie Royale des Sciences A. 1699. 1700. 1701. &c. Aus der Erfahrung kann man nicht schliessen, daß die Cometen eine böse Bedeutung haben. Denn es ist keine Folge; auf die Erscheinung des Cometens ist einer gewissen Nation ein großes Unglück begegnet, derowegen hat der Comet dieses bedeutet. Zu geschweigen, daß man aus der Historie nicht erweisen kann, es sey jederzeit auf die Erscheinung eines Cometen eine große Veränderung in den Reichen der Welt erfolget. Ja, wenn Gott einem gewissen Volke durch ein Zeichen vom Himmel seinen Untergang ankündigen wollte, müßte er es in unsere Luft setzen, daß es über dem Lande oder der Stadt stehen bliebe, dem der Untergang angedeutet wird, wie man von dem Cometen erzählet, der über Jerusalem durch das ganze jüdische Land vor der Verstöhrung gesehen ward.

Erklärung.

315. Wenn der Planet mit der Sonne in einem Orte des Himmels gesehen wird, oder

von ihm um den sechsten, vierten, dritten, oder halben Theil des Himmels wegstehet, so nennet man es einen Abspekt, und zwar insbesondere in dem ersten Falle eine Conjunction oder Zusammenkunft; in dem anderen den Gesechstschein (Sextilem); in dem dritten den Geviertschein (Quadratum); in dem vierten den Gedrittschein (Trigonum); und in dem letzten die Entgegensetzung oder Opposition.

Anmerkung.

316. Die Zeichen, damit sie bemerket werden, sind folgende: ☌ ✶ □ △ ☍. Z. E. wenn Saturnus und Jupiter im Geviertscheine gegen einander stehen, schreibet man □ ♄ ♃. Hingegen wenn das Zeichen des Abspects nur zu einem Planeten gesetzet wird, verstehet man zugleich mit dabey den Mond. Also bedeutet ✶ ☿ den Gesechstschein der ☿ mit dem ☽, das ist, daß der Mond von der ☿ 60 Gr. wegstehet.

Anmerkung.

317. Die Conjunction des ♄ und ♃ wird die grosse Conjunction genennet, ja gar die größre Conjunction, wenn sie im Anfange des Widders geschiehet, welches sich alle 794 Jahre einmal zuträget, da die grossen beynahe nach 20 Jahren wieder kommen. Die Astrologen haben ihnen diese Benennung zugeleget, weil sie selbige von großer Würkung zu seyn erachtet: wie denn sie das ganze Wesen mit den Aspecten auf die Bahn gebracht, und daher nicht allein die Ursache der Witterung auf unserem Erdboden, sondern auch andere Einflüsse in die Körper auf der Erde, ja den Menschen selbst, herholen wollen. Allein da man weder aus der Natur des Abspectes, noch durch gegründete Erfahrung einigen Einfluß behaupten kann: so haben heut zu Tage alle verständige Astronomen diesen albernen Kram verlassen. Es ist allerdings kein Schluß: Saturnus stehet von dem Jupiter 90 Gr. weg in Ansehung unserer Erde, derowegen muß eine Veränderung des Wetters oder auch in den Körpern auf den Erdboden erfolgen. Eben so wenig schliesset es: Heute ist der Abspect gewesen, das ist, der oder jener Planet hat uns auf der Erde 60, 90, 120 oder 180 Gr. von einem andern weg zu stehen geschienen, und es hat geregnet; derowegen ist die Ursache des Regens gewesen, daß sie uns so weit von

einan-

einander zu stehen auf der Erde geschienen. Keine andere Erfahrung als diese kann jemand anführen.

Lehrsatz.

318. **Wenn der Mond in seiner Opposition entweder in dem Knoten oder nahe dabey anzutreffen ist, so wird er verfinstert.**

Beweis.

Wenn der Mond im Knoten ist, so stehet sein Mittelpunkt in der Ecliptik, hält er sich aber nahe bey dem Knoten auf, so ist er auch der Ecliptik nahe (§. 261.) Nun wird er verfinstert von dem Erdschatten, wenn er der Sonne entweder in der Ecliptik, oder nahe bey derselben entgegengesetzet ist (§. 155.) Derowegen ist eine Mondfinsterniß, wenn der Mond entweder im Knoten, oder nahe dabey voll wird. W. Z. E.

Zusatz.

319. **Es ist also in einer Mondfinsterniß die Summe aus dem halben scheinbaren Diameter des Mondes und des Erdschattens größer, als seine Breite.**

Anmerkung.

320. Hieraus erhellet, warum nicht alle Vollmond eine Mondfinsterniß ist, imgleichen warum eine Finsterniß grösser ist, und länger dauert, als die andere.

Aufgabe.

321. Eine Mondfinsterniß zu observiren.

Auflösung.

1. Stellet eine Perpendiculuhr nach der Sonne (§. 32.), und corrigiret die Zeit, die ihr darnach angemerket, aus observirten Höhen der Sterne. (§. 269).

2. Richtet ein Fernglas mit einem Micrometer gegen den Mond, und merket die Zeit, wenn seine Peri-

pherie die Rundung zu verlieren beginnet; so wisset ihr den Anfang der Finsterniß.

3. Merket gleichfalls die Zeit, da der Erdschatten die aus der Mondbeschreibung bekannten Flecken erreichet, imgleichen da er den ganzen Mond verlässet, so sehet ihr, wie die Finsterniß von Zeit zu Zeit zu- und abgenommen, und wenn sie aufhöret.

4. Ziehet das Ende von dem Anfange ab, so wisset ihr, wie lange sie gewähret, welche Zeit, in zwey Theile getheilet, das Mittel der Finsterniß bekannt machet.

5. Durch Hülfe des Micrometers messet die Grösse des verfinsterten Diameters (§. 182.).

321 a) Die an unterschiedenen Oertern auf der Erde beobachteten Zeiten der Antritte des Erdschattens an einerley Flecken des Mondes, sind sehr wichtig für die Geographie (m. s. unten §. 6 a Geogr.) Deswegen ist es sehr nützlich, sich die vorzüglichsten Mondsflecken, zumahl die hellern oder Berge, bekannt zu machen. Bey den Mondfinsternissen pflegt man zu bemerken, wenn ein solcher Flecken in den Erdschatten tritt, wenn er ohngefähr zur Hälfte darinn ist, und wenn er ganz in dem Schatten ist. So wird auch bey den Austritten der Flecken, aus dem Schatten, verfahren.

Lehrsatz.

322. Die auf dem Erdboden eine Sonnenfinsterniß sehen, stehen entweder im Schatten oder Halbschatten des Mondes.

Beweis.

Wir sehen eine Sonnenfinsterniß, wenn uns der Mond die Sonne decket (§. 149.). Denen nun die im Schatten des Mondes, oder in seinem Halbschatten stehen, wird die Sonne wenigstens zum Theil verdecket, nemlich um so vielmehr, je näher sie dem Schatten sind. Derowegen sehen sie eine Sonnenfinsterniß. W. Z. E.

Zusatz

Zusatz.

323. Da nun der Schatten des Mondes der Sonne gegen über geworfen wird, die Erde aber den der Sonne entgegengesetzten Ort in der Ecliptik einnimmt (§. 235.); so muß der Schatten und Halbschatten des Mondes gegen die Ecliptik fallen, wenn auf dem Erdboden eine Sonnenfinsterniß sich begeben soll, und demnach der Neumond entweder in dem Knoten, oder sehr nahe dabey seyn (§. 261.).

Zusatz.

324. Derowegen sehen die Seleniten eine Erdfinsterniß, wenn wir eine Sonnenfinsterniß haben.

Anmerkung.

325. Der Halbschatten ist in dem Orte, wo nicht von allen Theilen der Sonne Strahlen hinfallen können.

Aufgabe.

326. Eine Sonnenfinsterniß zu observiren.

Auflösung.

1. Fanget in einem verfinsterten Gemache das Bild der Sonne, welches ihr durch ein Fernglas hineinfallen lasset, mit einem weissen Papiere auf, und theilet es in seine 12 Zolle. Nemlich der halbe Diameter wird in 6 gleiche Theile getheilet, und durch jeden Theilungspunkt wird aus dem Mittelpunkt ein Circul gezogen.

2. Merket vermittelst einer richtig gestellten Perpendiculuhr die Zeit an, da die Finsterniß sich anfänget und aufhöret, auch ein jeder Zoll verfinstert erscheinet und wieder helle wird.

3. Corrigiret die Zeit, wenu die Uhr nicht recht gehet, aus den observirten Höhen der Sonne, oder durch Hülfe der Mittagslinie.

326a) Dies Verfahren möchte in der Ausübung etwas unbequem seyn. Besser und genauer beobachtet man Anfang und Ende der Finsterniß, so wie auch deren Grösse zu unterschiedenen Zeiten, wenn man die Sonne durch ein Fernrohr mit einem Micrometer betrachtet, und wie bey den Mondfinsternissen (§. 321.) verfährt. Ein Muster Sonnenfinsternisse zu beobachten, ist die Beobachtung der großen Sonnenfinsterniß 1748 von **Tob. Mayer**, in den Kosmographische Samml. auf d. Jahr 1748., wo auch gezeigt wird, was aus solchen Beobachtungen für Folgerungen zu ziehen sind. Zur **Berechnung** der Sonnenfinsternisse hat man mehrere Vorschriften. Berechnung nach neuern Tafeln und Methoden lehrt **Keccards** Abh. von den großen Sonnenfinst. d. 1. April 1764. Berlin 1764. (Es wird darinn auch die Berechnung d. Dfinst. gezeigt). Tob. Mayeri methodus facilis et accurata eclipses solares computandi, in dessen opp. ineditis Goettingae 1775. Ueber die Constructionen der Sonnen- und Mondfinsternisse giebt **Röslers** praktische Astronomie 2ter Theil die vollständigste Anweisung.

Ende der Astronomie.

Anfangs-Gründe der Geographie.

Erklärung.

1.

Die Geographie ist eine Wissenschaft von der Figur und Grösse der Erde, und den daher rührenden Eigenschaften.

Lehrsatz.

2. Die Erde ist beynahe kugelrund.

Beweis.

Der Mond wird durch den Schatten der Erde verfinstert (§. 155. Astron.). Der Erdschatten siehet wie ein Circul aus, der Mond mag in denselben hineinkommen, wo er will, gegen Osten, Westen oder Süden, weit von oder nahe bey der Erde (§. 154. Astron.). Also ist der Durchschnitt desselben ein Circul, und folgends die Erde beynahe kugelrund, (§. 44. 45. Optik.). W. Z. E.

Anmerkung.

3. Ich sage, die Erde sey beynahe kugelrund. Denn wir treffen hin und wieder große Berge an, welche die kugelrunde Figur zu hindern scheinen. Doch weil sie nicht hindern können, daß der Erdschatten sich wie ein Circul präsentirt, muß ihre Höhe gegen den Diameter der Erde keine merkliche Verhältniß haben. Ueber dieses haben die neuern Mathematiker erwiesen, daß die Erde gegen die Pole niedrig gedrücket, und mitten zwischen derselben etwas erhabener sey.

Zusatz.

Zusatz.

4. Daher ist es nicht Wunder, daß man die Erde zur See schon etlichemal umschiffet hat.

4a) Das **Umschiffen** gienge nun auch wohl an, wenn die Erde eine andere als kugelförmige Gestalt hätte.

Anmerkung.

5. **Ferdinand Magellanes**, hat A. 1519. innerhalb 1124 Tagen die Erde das erstemal umschiffet; nach ihm haben **Franciscus Draco**, ein Engländer A. 1557. innerhalb 1056; **Thomas Candisch**, auch ein Engländer, A. 1586. innerhalb 777; **Simon Cordes**, aus Rotterdam A. 1590. und **Olivier Noort**, gleichfalls ein Holländer A. 1598. innerhalb 1077; und **Wilhelm Cornelius Schouten** A. 1615. innerhalb 749; und **Jacob Heremiten** und **Johann Hugen** A. 1623. innerhalb 802 Tagen dergleichen Reise gethan.

5a) Die neuesten Reisen um die Welt sind die von dem Capitain **Cook**, Doct. **Solander** und Hrn. **Banks** 1771. und vom Cap. **Cook** und beyden Hrn. **Forsters**, 1775. und vom Cap. **Cook**, **Clerke**, und **Gore** in den Jahren 1777—1780.

Zusatz.

6. Dieses ist auch die Ursache, warum die Sonne nicht an allen Orten auf dem Erdboden zu gleicher Zeit auf- und untergehet, sondern viel eher bey denen Morgen- als Abendländern in ihrem Horizont und Meridian sich sehen lässet, daß auch dannenhero, wenn man die Stunden des Tages von dem Mittage an zählen will, die Uhr an allen Orten nicht einerley schlagen kann. Denn wenn bey uns z. E. 3 Stunden nach Mittage sind, müssen die Morgenländer schon mehrere Stunden nach Mittage zählen, nachdem sie viel oder wenig weiter gegen Morgen liegen, als wir.

6a) Den Bogen des Aequators auf unserer Erdkugel, welcher zwischen zweyen Meridianen enthalten ist, nennt man den **Unterschied der Mittagskreise.** Man kann ihn

(§. 67a. II.) in Zeit verwandeln, und auf diese Art finden, um wie viel die östlichen Meridiane eher Mittag haben, als die westlichen.

Diesen Meridianunterschied in Zeit aber unmittelbar zu finden, bedient man sich der Mondfinsternisse, der Verfinsterungen der Jupiterstrabanten und anderer Erscheinungen am Himmel, welche allen Beobachtern auf der Erde sich in einerley absoluten Augenblicke darstellen. Die östlichern Beobachter werden alsdann in diesem Augenblicke, von ihrem Mittage angerechnet, um so viel mehr Zeit zählen, als die westlichern, als sie eher Mittag gehabt haben. Gesetzt es habe bey dem Antritte des Erdschattens an einem gewissen Flecken in dem Monde ein Beobachter in Leipzig, von seinem Mittage angerechnet, an seiner Uhr gezählet 10 Uhr 16 Min. 32 Sec. Ein Beobachter in Petersburg aber 11 Uhr 29 Min. 12 Sec., so wäre der Meridian-Unterschied = 1 Stunde 12 Min. 40 Sec. um so viel würde der Petersburger Meridian östlicher liegen, als der Leipziger, und diesem **Zeitunterschiede** beyder Meridiane würde nach (§. §. 67a. II.) ein Bogen des Aequators von 18 Gr. 10′ entsprechen. So kann man aus vielen dergleichen korrespondirenden Beobachtungen ein arithmetisches Mittel nehmen, und den Meridianunterschied sehr genau finden. Ein solches arithmetisches Mittel ist aber nöthig, weil bey allen Beobachtungen kleine Fehler vorfallen, und wegen der unbestimmten Gränze des Erdschattens bey den Mondfinsternissen sich die Augenblicke, wenn der Schatten genau an diesen oder jenen Flecken kömmt, nicht ganz scharf angeben lassen. Noch unsicherer ist der Augenblick zu bestimmen, wenn sich die Mondfinsterniß anfängt oder endigt. Die **totalen** Mondfinsternisse sind übrigens zu solchen Beobachtungen der Meridianunterschiede, wegen der geschwindern scheinbaren Bewegung des Erdschattens, und dem gerade Entgegenrücken desselben gegen die Mondflecken brauchbarer, als die **partialen** Finsternisse.

Ein anderes sehr bequemes Verfahren, den Zeitunterschied der Meridiane zu finden, ist die Anwendung solcher Uhren, welche ohne Nachtheil ihrer Bewegung von einem Orte zu einem andern gebracht werden können, wie die **Taschenchronometer** (§. 26h Astr.) und während der Zeit entweder nicht aufgezogen zu werden brauchen, oder doch durch das Aufziehen nicht in ihrem Gange gestört werden. Man bestimms

stimmt an dem einen Orte, aus übereinstimmenden Sonnenhöhen (§. 26 g Astron.) genau, was die Uhr im Mittage weiset, und verfährt nun eben so an dem andern Orte, so ergiebt sich sogleich unmittelbar der verlangte Zeitunterschied beyder Oerter. Die Brauchbarkeit dieses Verfahrens hat Hr. O. W. v. Zach in dem Leipz. Mag. zur Mathematik 1787. 4tes Stück, und in Hrn. Bodens astr. Jahrbüchern durch viele Beobachtungen dargethan. Die Verfinsterungen der 4 Trabanten zur Bestimmung der Meridianunterschiede anzuwenden, sind noch allerley Vorsichten zu beobachten, die in Hells Ephem. Astron. 1764. nachgelesen werden können.

Zusatz.

7. Eben von der runden Figur der Erde kommet es, daß die Reisenden nicht allein zu Lande, sondern auch zu Wasser die Spitzen der Thürme, Mastbäume der Schiffe, und die Berge und Klippen allezeit eher sehen, als was der Erde näher ist.

Zusatz.

8. Daher müssen uns Leute die Füsse zukehren, welche man Antipodes und Antichthones zu nennen pfleget, und doch haben sie den Himmel über ihrem Kopfe, und die Erde unter ihren Füssen, wie wir.

Erklärung.

I. 9. Man bildet sich auf der Erdkugel alle Circul ein, die man auf der Weltkugel beschreibet. Nemlich die beyden Punkte A und P, um welche sich die Erde innerhalb 24 Stunden beweget, nennet man die Pole, und zwar den einen A den Nordpol, den andern P den Süderpol. Der Aequator oder die Linie, ist der Circul QR, der von jedem Pole A und P überall 90 Grad weg ist. Die Ecliptik EL, ist ein Circul, welcher den Aequator dergestalt durschneidet, daß er mit ihm einen Winkel von 23 Gr. 29′ macher.

chet. Der Tropicus cancri, EN und Tropicus capricorni, LM werden mit dem Aequator in der Weite von 23° 29′ parallel gezogen, und die beyden Polarcircul uO und yX um die Pole A und P in der Weite von 23° 29′ beschrieben. Der Horizont wird hier eben so, wie in der Astronomie, genennet.

Erklärung.

10. Der Meridian oder Mittagscircul, ist ein halber Circul, welcher durch die Pole und einen jeden Ort beschrieben wird. Zuweilen führet auch der ganze Circul diesen Namen.

Zusatz.

11. Weil die Sonne in den Meridian kommet, wenn es Mittag ist, (denn der Meridian an der Himmelskugel ist mit dem Erdmeridian in einer Fläche) so haben alle Oerter, die in einer Hälfte des Meridians liegen, zu gleicher Zeit Mittag, und gehet also die Uhr bey ihnen auf einerley Art.

Anmerkung.

12. Damit man einen gewissen Anfang auf der Erde hat, machet man einen von den Meridianen zum ersten, und zählet von ihm an die übrigen von Abend gegen Morgen zu. Einige ziehen ihn durch die Canarische Insul Teneriffa wegen des hohen Berges Pico, den man auf der See bis 60 Meilen sehen kann; andere durch die Capoverdische Insul del Fougo; andere durch die Capoverdische Insul St. Nicolai; noch andere durch die Flandrischen Insuln del Corvo und Flores; noch andere durch die Canarische Insul Palma; die Franzosen auf Befehl des Königs Ludwigs XIII. durch die Insul del Ferro.

12a) Oder vielmehr durch einen Punkt dieser Insel, welcher 20 Grade westwärts vom Pariser Meridian entfernt ist.

Aufgabe.

13. Die Grösse des Erddiameters zu finden.

Auflösung.

2. 1. Nehmet zwey hohe Berge E und G an, die etliche Meilen von einander liegen, und messet ihre Weite LM.

2. Steiget auf beyde Höhen und messet die Winkel FEG und FGE, (§. 43. Geom.); so wisset ihr den dritten F (§. 77. Geom.) dessen Maaß der Bogen LM ist (§. 16. Geom.).

3. Da euch nun der Bogen LM sowohl in Graden und Minuten, als auch in Meilen oder Schuhen bekannt ist, so könnet ihr durch die Regel Detri finden, wie viel Meilen oder Schuhe die größte Peripherie der Erdkugel, folgends auch (§. 153. Geometr.) der Diameter der Erde hat.

Z. E. Es sey LM 5 deutsche Meilen, E 89 Gr. 55′, G 89 Gr. 45′, so ist der Winkel F 20′; folgends sind 360 Gr. oder 21600 Min. 5400 und LF 860 deutsche Meilen.

Anmerkung.

14. Dieses von Wolf beschriebene Verfahren dient nur, die Möglichkeit einzusehen, wie man den Halbmesser der Erde finden könnte, ist aber in der Ausübung deswegen unbrauchbar, weil die beyden Berge sehr weit von einander entfernt seyn müssen, wenn der Winkel F am Mittelpunkte z. E. nur einen Grad betragen sollte, und von einigermaaßen beträchtlicher Größe muß er doch seyn, wenn daraus ein richtiger Schluß auf den ganzen Umfang der Erde, und folglich ihren Halbmesser soll gemacht werden können. Aber dann würden die Berge von einer sehr großen Höhe seyn müssen, wenn man wegen der Ründung der Erde, auf der Spitze des einen, sollte nach der Spitze des andern visiren können, und man würde wohl nicht leicht ein paar Berge finden können, die zu dieser Absicht tauglich wären, zu geschweigen, daß auch die Veränderlichkeit der Refractionen nehe an der Erde nicht verstatten würde, die Winkel bey E und G mit der gehörigen Schärfe zu messen. Brauchbarer ist daher folgendes Verfahren, wobey keine Berge auf der Erde nöthig sind.

I. Es

I. Es seyen (Fig. 24. Astron. Tab. V.) V und S zwey Oerter, welche in einerley Mittagskreise liegen. TZ; Tζ die Scheitellinien bey V und S. In der Richtung VN werde ein Fixstern beobachtet, und dessen Abstand NVZ vom Zenith des Ortes V gemessen, zur Zeit, wenn der Stern sich in der Mittagsfläche befindet. Wenn nun ein anderer Beobachter bey S, welcher denselben Stern nach einer mit VN parallelen Richtung Sv wahrnehmen wird, auch die Weite vSζ desselben vom Zenith ζ gemessen hat, in dem Augenblicke da der Stern im Meridiane ist, so ergiebt sich hieraus der Winkel VTS am Mittelpunkte = VmS — TVm = vSζ — NVZ. (In manchen Fällen ist dieser Winkel auch der Summe der beyden Scheitelweiten des Sternes gleich.).

II. Wenn nun dieser Winkel VTS, **den die Scheitel- oder Verticallinien zweyer Oerter mit einander machen**, z. E. einen Grad betrüge, so nennt man den Bogen VS auf der Erde, einen Grad, und es erhellet also wie durch das Verfahren (I.) gefunden werden kann, um wie viel Grade ꝛc. zwey Oerter, die in einerley Meridiane liegen, von einander entfernt sind. Mißt man nun durch geometrische Operationen den Abstand VS, so ergiebt sich hieraus die Länge eines Grades, **der Umfang der Erdkugel** und ihr **Durchmesser**.

III. Einen Bogen wie VS auf einem Meridiane zu messen, setzet voraus, daß man den Meridian auf der Erdfläche selbst ziehen, und ihn auf eine beliebige Weite hinaus verlängern könne. Ist nun der Abstand VS dabey sehr groß, so gehören sehr feine Kunstgriffe der praktischen Geometrie dazu, alles mit einer solchen Genauigkeit zu bewerkstelligen, daß man ein richtiges Resultat in Absicht auf den Durchmesser der Erde daraus erhalte. Man kann das ganze hieher gehörige Verfahren nebst den Folgerungen daraus, in den Schriften derjenigen Mathematiker finden, welche sich mit der Bestimmung der Größe und Figur der Erdkugel beschäfftiget haben. Z. E. in **Cassini** Abh. von der Figur und Größe der Erde, übers. v. J. A. Klimm. Leipz. 1741. dann in de Maupertuis figure de la terre, determinée par les observations de Mssrs de Maupertuis, Clairaut, Camus, le Monnier et Outhier. Amsterd. 1738. in Bouguer figure de la terre a Paris 1749. Mesure des trois premiers degrés du meridien dans l'hemisphere austral par M. de la Condamine in Liesganig dimensio graduum Viennensis et hungarici Viennae 1770. u. a. Schriften.

IV. Man fand bey diesen und mehreren Messungen auf der Erde die Meridiangrade, nicht durchaus von gleicher Grösse, wie doch seyn müßte, wenn die Erde eine vollkommene Kugel wäre. Man fand übereinstimmend die Grade nach den Polen zu grösser, als um den Aequator herum, und folgerte aus den Vergleichungen derselben, und durch Hülfe der höhern Geometrie, daß die Erde, nach den Polen zu flächer, als um den Aequator herum sey, und die Gestalt eines **elliptischen Sphäroids** habe, dessen Durchmesser von einem Pole zum andern kleiner, als der Durchmesser des Aequators sey, ohngefähr wie ein Körper aussehen müßte, welcher durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entstände. Es hatte zwar **Cassini** aus seinen Messungen geschlossen, daß die Erde ein länglichtes Sphäroid, oder der Durchmesser von einem Erdpole zum andern länger, als der Durchmesser des Aequators sey, allein so wohl aus physischen Gründen, als auch durch genauere Messungen, welche auf Befehl Ludwigs des XVten in Frankreich, in Lappland und Peru ꝛc. angestellt würden, fand sich, daß Cassini sich geirrt, und die Erde vielmehr die oben erwähnte nach den Polen zu abgeplattete oder zusammengedrückte Gestalt habe, und daß der kleinere Durchmesser von einem Pole zum andern, also die **Erdaxe** sich verhalte zum grössern, oder zum Durchmesser des **Aequators**, wie 177 : 178 (nach Maupertuis), oder wie 178 : 179 (nach Bouguer). Den **kleinern** Durchmesser selbst fand Maupertuis = 652560 pariser Toisen (die Toise zu 6 pariser Schuhen gerechnet) den **grössern** = 6562480 Toisen. Hr. Prof. **Klügel** (**Bodens** astron. Jahrb. 1788. S. 213.) findet aber, daß alle bisher gemessenen Grade auf der Erde, am besten auf eine Ellipse passen würden, deren kleinerer Durchmesser = 6524894 der grössere aber = 6559982 Toisen wäre.

Wollte man indessen den in Ansehung des Ganzen, geringen Unterschied des grössern und kleinern Durchmessers nicht achten, und also die Erde für eine vollkommene Kugel nehmen, deren Durchmesser dem arithmetischen Mittel zwischen jenen beyden also = 6542438, der Halbmesser folglich = 3271219 pariser Toisen wäre, so würde dies zum gewöhnlichen geographischen Gebrauche hinlänglich seyn. Auf dieser Kugel würde denn die **Länge eines Grades** 57093 Toisen betragen.

V. Den 15ten Theil eines solchen Grades nennt man eine **deutsche** oder **geographische Meile**. Diese wäre demnach = 3806⅔ Toisen = 22837⅓ paris. Schuhen.

VI. Sol-

VI. Solcher Meilen würde dann ferner der Umfang der Erdkugel enthalten 5400, und der Durchmesser beynahe 1719, also der Halbmesser 859½, wofür man nach einer runden Zahl 860 zu nehmen pflegt.

Zusatz.

15. Also ist die ganze Fläche der Erdkugel 2988000 Quadratmeilen, und der körperliche Inhalt derselben 2662560000 Cubikmeilen (§. 208. Geom.).

Aufgabe.

16. Die Grösse eines Grades in jeden Parallelcircul zu finden, dessen Abstand vom Aequator DF gegeben wird. 3.

Auflösung.

Weil euch DF gegeben wird, so wisset ihr in dem bey E rechtwinklichten Triangel ECF den Winkel C. Da nun auch der halbe Diameter der Erde CF bekannt ist (§. 14.): könnet ihr den halben Diameter des Parallelcirculs EF (§. 20. Trigon.), folgends die Peripherie (§. 132. Geom.), und daher auch die Grösse eines Grades finden.

Anmerkung.

17. Durch gegenwärtige Aufgabe ist folgendes Täfelein berechnet worden, darinnen in der ersten Reihe die Weite der Parallelen in Graden, in der andern aber die Grösse eines Grades in deutschen Meilen und ihren Minuten angegeben wird. Es ist aber eine Minute $\frac{1}{60}$ einer Meile.

0	15.00′	23	13.48	46	10.25	69	5.23
1	14.59	24	.42	47	.14	70	.8
2	.59	25	.36	48	.2	71	4.53
3	.58	26	.29	49	9.50	72	.38
4	.57	27	.22	50	.38	73	.23
5	.56	28	.15	51	.26	74	.8
6	14.55	29	13. 7	52	9. 14	75	3.53
7	.53	30	12.59	53	2.	76	.38
8	.51	31	.51	54	8. 49	77	.23
9	.48	32	.43	55	.36	78	.8
10	.46	33	.35	56	.23	79	2.52
11	14.43	34	12.26	57	8. 10	80	2.30
12	.40	35	.17	58	7. 57	81	.20
13	.37	36	.8	59	.44	82	.5
14	.33	37	11.59	60	.30	83	1.50
15	.29	38	.49	61	.16	84	1.34
16	14.25	39	11. 9	62	7. 2	85	1.18
17	.21	40	.29	63	6. 48	86	.3
18	.16	41	.19	64	.34	87	0.47
19	.11	42	.9	65	.20	88	.31
20	.6	43	10.58	66	.6	89	.16
21	.0	44	.47	67	5. 52	90	0. 0
22	13.54	45	.36	68	5. 38		

Zusatz.

18. Also könnet ihr durch die Regel Detri die vorgegebenen Grade eines jeden Circuls auf der Erdkugel in deutsche Meilen, und hinwiederum die Meilen in Grade verwandeln. Z. E. man begehret zu wissen, wie viel Meilen 16 Grade in dem Parallelcircul machen, der vom Aequator 51 Gr. abstehet. Sprechet: 1 Grad giebet 9 Meilen 26 M. was geben 16? So findet ihr 150 M. 56′.

Auf-

Aufgabe.

19. Wie weit man von einer Höhe AE sehen kann, zu finden.

Auflösung.

1. Addiret zu dem halben Diameter der Erde CE die gegebene Höhe AE, so wisset ihr in dem rechtwinklichten Triangel die Seite AC und CD. Derowegen könnet ihr den Winkel C (§. 23. Trigon.) finden, dessen Maaß der Bogen ED ist (§. 16. Geometr.) 4.
2. Verwandelt diesen in Meilen (§. 18.). So ist geschehen, was man verlangte.

Z. E. Es sey AE 300′ oder 50 französische sechsfüßige Ruthen, so ist AC 3271294, und CD 3271244. (§. 14.), und ihr findet den Bogen ED 19′ das ist $4\frac{3}{4}$ grosse deutsche Meilen.

Zusatz.

20. Wenn ihr für AE 5′ annehmet, so hoch nemlich das Auge des Menschen gemeiniglich über der Erde erhaben ist, wenn er in der Ebene steht, so werdet ihr finden, daß man in der Ebene nicht über 6′, oder folglich nicht über $1\frac{1}{2}$ Meile hinaus sehen kann.

Zusatz.

21. So weit ihr von einer Höhe sehen könnet, eben so weit kann auch die Höhe, wo euer Auge ist, gesehen werden. Und demnach könnet ihr auch durch gegenwärtige Aufgabe finden, wie weit ein Berg, Thurm, oder eine andere Höhe gesehen werden kann: folglich auch wie weit ihr von einer bekannten Höhe weg seyd, wenn ihr sie zuerst erblicket.

Erklärung.

22. Der Abstand eines Ortes L von dem Aequator AQ gegen den Pol zu AL wird die Breite des Ortes (Latitudo loci) genennet. 5.

Lehrsatz.

5. 23. Die Breite eines Ortes LA ist der Pol-höhe PH gleich.

Beweis.

PA = 90 Gr. (§. 9.). Und weil der Ort L unter seinem Zenith lieget (§. 15. Astron.); so ist LH auch 90 Gr. (§. 20. Astron.). Derowegen HL = PA, folgends PH = LA (§. 25. Arithm.). W. Z. E.

Zusatz.

24. Also wird die Breite eines Ortes wie die Polhöhe (§. 63. 69. Astron.) gefunden.

Erklärung.

25. Die Länge eines Ortes (Longitudo loci) ist der Bogen des Aequators, welcher zwischen dem ersten Meridian und dem Meridian eines Ortes enthalten ist.

Aufgabe.

26. Die Länge eines Ortes zu finden.

Auflösung.

1. Suchet den Unterschied der Zeit unter dem ersten Meridian und eurem Orte, oder zwischen eurem Orte und einem andern, dessen Länge schon bekannt ist.
2. Verwandelt denselben in Grade des Aequators, so bekommet ihr in dem ersten Falle die Länge eures Ortes. In dem andern Falle addiret die gefundenen Grade zu der gegebenen Länge, so kommet abermal die Länge eures Ortes heraus.

26a) Der Beweis hievon ist in (§. 26a) enthalten. Man hat auf diese Art für die Längen und Breiten der vorzüglichsten Oerter Tafeln verfertigt, dergleichen eine ziemlich vollständige und auf Beobachtungen sich gründende, in Mayers pract. Geom. IV. Theile zu finden ist.

Erklä-

Erklärung.

27. **Die Länder, welche von den beyden Polarcirculn eingeschlossen werden, nennet man** die kalten Striche der Erde (Zonas frigidas), **welche zwischen einem Polarcircul und einem Tropico liegen,** die temperirten oder gemäßigten (Zonas temperatas); **welcher zwischen den beyden Tropicis lieget,** den heissen Strich Landes (Zonam torridam).

Zusatz.

28. Also sind zwey kalte und zwey temperirte Striche Landes, aber nur ein heisser.

Zusatz.

29. Wenn die Breite eines Ortes unter 23 Gr. 29′ ist, so lieget er in dem heissen Striche. Ist sie über 23 Gr. 29′, aber unter 66 Gr. 31′, so lieget er in einem von dem temperirten. Endlich, wenn sie über 66 Gr. 31′ ist, in einem kalten (§. 9.).

Zusatz.

30. Denen, die unter den Tropicis liegen, kommet die Sonne einmal des Jahres über ihren Scheitel; denen in dem hitzigen, zweymal; denen ausserhalb den Tropicis in denen temperirten und kalten Strichen niemals. Denn die Sonne gehet nicht über die Tropicos von dem Aequator weg, und kommet in jeden des Jahres einmal (§. 49. Astron.); von den übrigen Tagecirculn aber durchschneidet ein jeder die Ecliptik in zwey Punkten.

Zusatz.

31. Da nun die Sonnenstrahlen wärmer machen, wenn sie perpendicular, als wenn sie schief auf die Erde fallen: so muß die Sonne in dem heissen Striche wärmer machen, als in den temperirten, und in den temperirten wärmer als in dem kalten; ja in den temperir-

ten und kalten muß sie wärmer scheinen, wenn sie in dem nächsten Tropico ist, als wenn sie sich in dem weitesten befindet.

31 a) Indessen haben doch Beschaffenheit des Erdreichs und andere Umstände viel Einfluß auf die Wärme und Kälte, so daß man **geographisches** und **physisches** Clima wohl von einander unterscheiden muß. Zwey Länder, ohngeachtet sie gleichen Abstand vom Aequator haben, z. E. Frankreich und Canada haben oft höchst verschiedene Witterungen und Wechsel von Wärme und Kälte. Südwärts des Aequators finden die Schiffer große Kälte, und in gleichen nördlichen Breiten ist es sehr warm.

Erklärung.

32. **Wenn die Sonne dem Scheitel am nächsten ist, fänget sich der Sommer an, wenn sie am weitesten davon ist, der Winter; wenn sie nach dem Winter in den Aequator tritt, der Frühling; wenn sie nach dem Sommer hineinkommet, der Herbst.**

Zusatz.

33. Also ist in dem heissen Striche alle Jahr zweymal Sommer und einmal Winter; unter dem Aequator zweymal Sommer und Winter; unter den Tropicis und in den temperirten und kalten Strichen einmal Sommer und einmal Winter (§. 29.).

Zusatz.

34. Es ist aber in den nördlichen Strichen Sommer, wenn die Sonne in den Krebs, und Winter, wenn sie in den Steinbock tritt; Frühling, wenn sie in den Widder, und Herbst, wenn sie in die Wage kommet. Hingegen in den südlichen Strichen, ist Sommer, wenn die Sonne in den Steinbock, und Winter, wenn sie in den Krebs tritt; Frühling, wenn sie in die Wage, und Herbst, wenn sie in den Widder kommet. Derowegen

wenn

wenn in den nördlichen Strichen Sommer ist, so ist in den südlichen Winter; wenn in den nördlichen Winter ist, so ist in den südlichen Sommer u. s. w. folglich sind alle Jahreszeiten zugleich auf dem Erdboden.

Lehrsatz.

35. **Wenn die Sonne im Aequator ist, so ist in allen Orten des Erdbodens Tag und Nacht gleich.**

Beweis.

Wenn die Sonne im Aequator ist, so laufet sie innerhalb 24 Stunden einen Circul durch, der mit dem Aequator auf der Erde und also auch an der Weltkugel in einer Fläche ist. Derohalben ist der halbe Tagecircul an allen Orten über dem Horizont, und solchergestalt die Sonne 12 Stunden über, und 12 unter dem Horizont, das ist, Tag und Nacht sind einander gleich. W. Z. E.

Lehrsatz.

36. **Unter dem Aequator oder der Linie, ist das ganze Jahr Tag und Nacht einander gleich.**

Beweis.

Denn sowohl die Hälfte des Aequators AQ, als 6.
der übrigen Tagecircul, zwischen den Tropicis TC und VS, ist über dem Horizont HR, und daher die Sonne so lange über, als unter dem Horizont. W. Z. E.

Erklärung.

37. **Man saget von den Völkern unter der Linie, daß sie** Sphaeram rectam **oder die Weltkugel gerade haben, weil ihnen die Sonne und die Sterne von dem Horizont gerade heraufsteigen.**

Lehr-

Lehrsatz.

38. **Unter dem Nord- und Süd-Pole ist ein halbes Jahr Tag, und ein halbes Jahr Nacht.**

Beweis.

7. Denn weil der Pol P oder N im Zenith stehet, so ist der Aequator im Horizont (§. 14. 20. Astron.) Also ist die Sonne so lange über dem Horizont, als sie über dem Aequator ist, und so lange unter dem Horizont, als sie unter dem Aequator ist, das ist, beyderseits ein halbes Jahr. W. Z. E.

Anmerkung.

39. Da die Abenddämmerung und der Anbruch des Tages unter den Polen aber auch viele Tage dauert, so ist es wenige Zeit daselbst ganz finster.

39a) Aus der Theorie der Sonne läßt sich herleiten, daß jede dieser Dämmerungen unter dem Pole, ohngefähr 54 Tage dauert. Also ist es nicht viel über zwey Monate völlig dunkel. Ausserdem steht auch der Mond in diesen Gegenden sehr hoch um diese Zeit, und erleuchtet also die Nächte daselbst viel stärker, als bey uns.

Erklärung.

40. **Man saget, daß unter dem Pole** Sphaera parallela, **oder die Weltkugel (nemlich mit der Erdkugel) parallel sey, weil die Sterne und die Sonne sich mit ihrem Horizont parallel bewegen.**

Zusatz.

41. **Derowegen gehen in der Parallelkugel die Sterne niemals unter (§. 140. Astron.), und bekommet men daselbst nur die Hälfte der Sterne zu sehen.**

Lehrsatz.

42. **Je grösser die Polhöhe in einem Orte ist, je länger ist der längste, und je kürzer der kürzeste Tag.**

Beweis.

Beweis.

Es sey HR der Horizont des einen, hr eines andern Ortes, in P der Nordpol, so ist der längste Tag, wenn die Sonne in den Tropicum cancri ST kommet; der kürzeste aber, wenn sie den Tropicum capricorni KL durchläufet. Da nun von ST ein grösserer Theil, hingegen von KL ein kleinerer Theil über den Horizont hr als über HR erhaben ist, massen SO grösser als SN und KV kleiner, als KZ; so muß die Sonne, wenn der Tag am längsten ist, länger, und wenn er am kürzsten ist, kürzer über dem Horizont hr als über HR bleiben. Und demnach ist der längste Tag länger, und der kürzeste Tag kürzer, wo die Polhöhe grösser ist, als wo sie kleiner ist. W. Z. E.

Zusatz.

43. Da nun die Polhöhe immer zunimmt, je weiter man von dem Aequator gegen den Pol fortgehet, so nimmt auch mit der Breite des Ortes (§. 23.) der längste Tag zu, und der kürzeste ab, und in den Orten, wo einerley Breite ist, sind auch die Tage von gleicher Länge.

Erklärung.

44. Von den Völkern, welchen der Pol über den Horizont erhaben ist, sagt man, daß sie Sphaeram obliquam, oder die Weltkugel schief haben, weil die Sonne und Sterne über ihren Horizont schief herauf steigen.

Erklärung.

45. Die Fläche der Erdkugel wird durch Circul, die mit dem Aequator parallel sind, in Climata eingetheilet. Nemlich durch jeden Grad der Breite, wo der längste Tag im Jahre eine halbe Stunde zugenommen, wird ein Parallelcircul gezogen.

Anmer-

Anmerkung.

46. Der Anfang eines jeden Climatis ist in folgender Tafel zu finden.

	St.	Gr. ′		St.	Gr. ′
I	12.	0. 0	XIII	18.	58. 29
II	12. 30	8. 25	XIV	18. 30	59. 58
III	13. 0	15. 25	XV	19. 0	61. 18
IV	13. 30	23. 50	XVI	19. 30	62. 25
V	14. 0	30. 20	XVII	20. 0	63. 22
VI	14. 30	36. 28	XVIII	20. 30	64. 6
VII	15. 0	41. 22	XIX	21. 0	64. 49
VIII	15. 30	45. 29	XX	21. 30	65. 21
IX	16. 0	49. 1	XXI	22. 0	65. 74
X	16. 30	51. 58	XXII	22. 30	66. 6
XI	17. 0	54. 27	XXIII	23. 0	66. 20
XII	17. 30	56. 37	XXIV	23. 30	66. 28
			XXV	24. 0	66. 41

Erklärung.

47. Die Weltgegend (Plaga) ist ein Punkt in der Fläche der Himmelskugel, darinnen sich die gerade Linie endet, welche aus dem Auge mit dem Horizont parallel gezogen wird. Diejenige Gegend, wo die Sonne zu Mittage gesehen wird, heisset Süden, die ihr entgegengesetzte Norden. Wenn ihr das Gesicht gegen Norden kehret, so ist zur Rechten 90 Grad, davon Ost; zur Linken aber West. Diese 4 Gegenden aber nennet man die Cardinal- oder die Hauptgegenden. Zwischen ihnen kommen vier Nebengegenden, welche von den beyden Cardinalgegenden zur Seite ihren Namen bekommen, dergestalt, daß Süd und Nord zuerst genennet wird. Sie heissen demnach Südost, Nordost, Nordwest, Südwest. Man theilet die

Bogen des Horizonts zwischen diesen acht Gegenden wieder in zwey gleiche Theile, und setzet noch acht andere Nebengegenden, welche abermal ihre Namen von den zwey Gegenden zu ihren beyden Seiten bekommen, und zwar dergestalt, daß die Cardinalgegenden zuerst genennet werden. Es sind also die Namen dieser Gegenden: Süd-Südost, Ost-Südost, Ost-Nordost, Nord-Nordost, Nord-Nordwest, West-Nordwest, West-Südwest, Süd-Südwest. Die Bogen des Horizonts zwischen diesen 16 Gegenden theilet noch einmal in zwey gleiche Theile, und machet noch 16 andere Nebengegenden. Diese bekommen ihren Namen von der anliegenden Cardinalgegend, oder einer von den ersten Nebengegenden, und wird dazu gesetzet, gegen welche Cardinalgegend sie liegen. Es sind demnach diese Namen: Süd gen Osten, Südost gen Süden, Südost gen Osten, Ost gen Süden, Ost gen Norden, Nordost gen Osten, Nordost gen Norden, Nord gen Osten, Nord gen Westen, Nordwest gen Norden, Nordwest gen Westen, West gen Norden, West gen Süden, Südwest gen Westen, Südwest gen Süden, Süd gen Westen.

Zusatz.

48. Wenn ihr also die Mittagslinie findet (§. 27. Astron.); so könnet ihr die übrigen alle finden.

Anmerkung.

49. Man bedienet sich insgemein der Magnetnadel. Weil aber diese nicht genau Norden zeiget; so muß man erst ihre Abweichung oder Declination von der Mittagslinie observiren, welches geschiehet, wenn ihr sie über der Mittagslinie aufrichtet, und den Winkel, den sie mit ihr machet, anmerket. Es ist aber die Declination nicht einerley zu einer Zeit an allen Orten: ja in einem Orte ist sie veränderlich.

492) Diese Benennungen der Weltgegenden (§. 47.) werden von den Schiffern gebraucht, um die Richtungen der Winde zu unterscheiden, und den Lauf des Schiffes anzugeben.

Aufgabe.

50. Eine Erdkugel zu verfertigen.

Auflösung.

Weil auf der Erdkugel alle Circul beschrieben werden, die man sich an der Himmelskugel einbildet (§. 9.), und die Oerter auf ihre Fläche aus der gegebenen Länge und Breite eben so, wie die Sterne auf die Himmelskugel, aufgetragen werden, nur daß die Erdkugel in ihren beyden Polen eingehänget wird; so könnet ihr die Erdkugel auf eben eine solche Art, wie die Himmelskugel verfertigen. Nemlich:

1. Erwählet euch auf der Kugel zwey Punkte für die beyden Pole, und hänget sie in einen meßingenen etwas dicken und breiten Circul, dessen vier Quadranten in ihre 90 Grad eingetheilet worden. Dieser stellet den Meridian vor.

2. In der Weite von 90 Graden von dem Pole haltet an den Meridian einen Stift, und beweget die Kugel, so wird der Aequator beschrieben (§. 9.), den ihr abermals in 360 Grade genau eintheilen müsset.

3. Zählet von dem Pole $23\frac{1}{2}$ Grade in dem Meridian gegen den Aequator zu, und stechet daselbst einen Punkt ab, so habet ihr den Pol der Ecliptik (§. 9.).

4. Hänget die Kugel an den Polen der Ecliptik innerhalb den Meridian, und beschreibet in der Weite von 90 Graden einen Circul um die Kugel herum, welcher die Ecliptik ist (§. 9.). Ihr müsset aber bey dem Punkte des Aequators ihn zu beschrei-

schreiben anfangen, wo ihr den Anfang, die Grade zu zählen, machet. Theilet die Ecliptik in ihre 12 himmlische Zeichen, und jedes Zeichen in seine 30 Grade.

5. Hänget die Kugel wiederum in ihren Polen innerhalb den Meridian, führet den Grad der Länge eines jeden Ortes darunter, und zählet im Meridian den Grad der Breite, so ist der Punkt darunter der gegebene Ort.

6. An die Axe, wo sie zu dem über unsern Horizont erhabenen Pole herausgehet, machet einen Zeiger, den ihr nach Gefallen herumdrehen könnet, und um diesen Theil der Axe befestiget an dem Meridian einen messingenen Circul, der in 24 gleiche Theile oder Stunden getheilet worden, so, daß die zwölfte Stunde in den Meridian fället.

7. Endlich richtet auf ein hölzernes Gestelle einen breiten hölzernen Circul dergestalt auf, daß ihn der Meridian, er aber die Erdkugel in zwey gleiche Theile theilet, und beschreibet auf ihn die Ecliptik, den Gregorianischen und Julianischen Calender und die Weltgegenden.

So ist geschehen, was man verlangte.

50a) Auch von den Erdkugeln gilt, was (§. 11a) von der Verfertigungsart der Himmelskugeln gesagt worden ist.

Zusatz.

51. Weil auf der Erdkugel die Ecliptik und der Aequator beschrieben ist, so könnet ihr, wie auf der Himmelskugel (§. 75. 77. 80. 81. 83. 84. 85. 118. Astron.) alle Tage für einen jeden Ort auf dem Erdboden finden, in welchem Orte die Sonne sich befindet, wenn und in was für einer Gegend sie auf- und untergehet, ihre schiefe und gerade Ascension, ihre Höhe auf eine gegebene Stunde, die Länge des Tages und der Nacht, die Stun-

de des Tages, den Anbruch des Tages und das Ende der Abenddämmerung.

Zusatz.

52. Wenn ihr einen Ort unter den Meridian führet, so könnet ihr daran seine Breite zählen; der Grad des Aequators, der unter dem Meridian stehet, zeiget die Länge des Ortes.

Zusatz.

53. Wenn ihr Acht gebet, was für Oerter mit euerem unter dem Meridian sind, so wisset ihr, welche Völker mit euch zugleich Mittag haben, imgleichen was für Völker auf eine gegebene Zeit Sommer, welche Winter, Herbst, Frühling haben (§. 34.).

Zusatz.

54. Wenn ihr Acht gebet, was für Oerter in dem Horizont stehen, so wisset ihr, wo die Sonne auf- und untergehet, indem es bey euch Mittag ist.

Zusatz.

55. Hingegen wenn ihr die Erdkugel so einhänget, daß die Pole auf dem Horizont liegen; könnet ihr die Eigenschaften der geraden Kugel erkennen (§. 37.). Hänget ihr sie aber ein, daß die Pole ins Zenith und Nadir kommen, so könnet ihr die Eigenschaften der Parallelkugel wahrnehmen (§. 40.).

Aufgabe.

56. Aus der gegebenen Länge und Breite etlicher Oerter und der Weite vieler andern von zweyen der vorhergehenden, eine Landcharte zu machen.

Auflösung.

1. Beschreibet ein Rectangulum ABDC (§. 99. Geom.), und traget in AC und BD die Grade der Brei-

Breite, und auf AB und CD die Grade der Länge. Die Grade der Breite werden von beliebiger Grösse angenommen; die Grade aber der Länge zu ihnen proportioniret, wie es die Breiten der Parallelcircul AB und CD mit sich bringen (§. 17.). Daher werden nicht allein die Grade in CD kleiner, als in AC und BD, sondern auch die in AB kleiner, als die in CD, weil AB dem Pole näher ist, als CD.

2. Zählet in AB und CD die Länge eines Ortes ab, und ziehet die Linie HG; in AC und BD aber nehmet den Grad der Breite F und E, und ziehet die Linie FE. Wo diese beyden Linien einander durchschneiden, nemlich in I, da ist der gegebene Ort.
3. Auf gleiche Weise traget die übrigen Oerter auf, deren Länge und Breite gegeben wird.
4. Mit der Weite des Ortes L von dem Orte I machet einen Bogen gegen die Gegend, wo er zu lieget, und mit seiner Weite von dem anderen Orte K einen andern, der den ersten in L durchschneidet. So habet ihr auch den Ort L auf der Charte.

Und auf solche Weise könnet ihr alle übrige Oerter darauf setzen, welches man verlangete.

Anmerkung.

57. Die Manier gehet nur auf Particularcharten für gewisse Länder und Provinzen an; denn da kann man die Circulbogen der Länge und der Breite durch gerade Linien verstellen. Die Verfertigung der übrigen fället Anfängern zu schwer: man findet sie aber theils in den deutschen, theils in den lateinischen Anfangsgründen ausführlicher.

57 a) Am vollständigsten wird die Entwerfungsart der Landcharten nach den verschiedenen Maximen, die man sich hiebey vorsetzt, in dem IV. Theile von Mayers prakt. Geometrie gelehrt, welcher auch besonders unter dem Titel: **Gründliche und vollständige Anweisung zur Verzeichnung der Land- See- und Himmelscharten**

und der Netze zu Koniglobien und Kugeln. Erlangen 1794. zu haben ist. In Karstens Lehrbegriff der Mathem. VII. ist insbesondere die Theorie der perspectivischen Projektionen, d. h. von Zeichnungen, welche die zu entwerfenden Stücke der Erdfläche aus einem gegebenen Standpunkte des Auges darstellen, enthalten, aber verwickelter und weitläuftiger vorgetragen, als nöthig ist. Gegenwärtig werden aber die perspectivischen Projectionen bey Zeichnungen selbst großer Stücke der Erdfläche nicht häufig mehr gebraucht. Die Schriftsteller, welche alle über das Zeichnen der Landcharten geschrieben haben, findet man in Mayers v. a. Werke vollständig.

Noch können zur mathematischen Geographie überhaupt folgende dienen:

Lulofs Einleitung zur mathematischen und physikalischen Kenntniß der Erdkugel, übers. und mit Anmerkungen von Abr. Gotth. Kästner. Göttingen und Leipz. 1755.

Mallets allgemeine oder mathematische Beschreibung der Erdkugel, aus dem Schwedischen von Röhl. Greifsw. 1774. Funks Anfangsgr. d. mathemat. Geographie. Leipzig 1771. Scheibels Unterricht vom Gebrauche der künstlichen Erd- und Himmelskugel. Bresl. 1779.

Ende der Geographie.

Anfangs-

Anfangs-Gründe der Chronologie.

Erklärung.

1.

Die Chronologie ist eine Wissenschaft, die Zeit auszumessen, und ihre Theile von einander zu unterscheiden.

1a) Eines der vollständigsten Bücher über die Chronologie ist ohnstreitig Hrn. Hofr. Gatterers Abriß der Chronologie. Göttingen 1777.

Joh. Heinr. Wasers historisch diplomatisches Zeitbuch. Zürch 1779. enthält sehr viele Tafeln und andere Hülfsmittel zu chronologischen Rechnungen, so auch ein Buch, welches den Titel hat: Allgemeine Chronologie für die Zeiten nach Christi Geburth zur Erläuterung der alten Denkmäler, Chroniken, Urkunden, nebst vollständigen chronologischen Tabellen, aus dem Französischen (l' art de verifier les dates &c. par des Religieux Benedictins de la Congregation de St. Maur. Paris 1750.) mit Hrn. Consistorialrath Walchs Vorrede. Leipz. 1779.

Erklärung.

2. Die Zeit, welche vorbeystreichet, indem die Sonne einmal um die Erde herumkommet, nennet man einen Tag. Es heisset aber auch der Tag die Zeit, welche die Sonne über unserem Horizont zubringet; und die Nacht, welche sie sich unter unserem Horizont verweilet. Jenen nennen wir den natürlichen Tag, diesen aber schlechtweg Tag.

Erklärung.

3. Der natürliche Tag wird in 24 Stunden eingetheilet; die Stunde in 60 Minuten; die Minute in 60 Secunden u. s. w.

Erklärung.

4. Die Astronomen fangen den Tag vom Mittage an, und zählen 24 Stunden in einer Reihe fort, daher nennet man auf solche Art gezählte Stunden Astronomische Stunden. Wir hingegen fangen den Tag von Mitternacht an, und zählen 12 Stunden bis zu Mittage, von Mittage aber bis Mitternacht wieder 12 Stunden, und heissen sie Europäische Stunden.

Zusatz.

5. Nach Mittage kommen die Astronomischen Stunden mit den Europäischen überein. Vor Mittage aber addiret man zu den Europäischen 12 Stunden, so hat man die Astronomischen des vorhergehenden Tages, oder subtrahiret von den Astronomischen 12 Stunden, so hat man die Europäischen des folgenden Tages.

Erfahrung.

6. Die Italiäner und Sineser (und vor Zeiten die Athenienser) setzen den Anfang des Tages in den Untergang, die Babylonier aber in den Aufgang der Sonne, mit welchem die heutigen Griechen übereinkommen. Die nach erster Art gezählte Stunden heissen Italiänische, die andern aber Babylonische Stunden. Beyde werden 24 in einer Reihe fortgezählet.

Erklärung.

7. Die Juden fangen den Tag mit dem Untergange der Sonne an. Vor diesem theileten sie jeden Tag, er mochte lang oder kurz seyn,

und

und so auch jede Nacht in 12 Stunden, und daher pfleget man solche ungleiche Stunden, Jüdische Stunden zu nennen. Sie heissen auch Planetenstunden.

Zusatz.

8. In langen Tagen sind die Jüdischen Stunden lang, in kurzen aber kurz.

Erklärung.

9. Ein Chaldäischer Scrupel ist $\frac{1}{1080}$ von einer Stunde.

Anmerkung.

10. Die Juden, Araber und andere morgenländische Völker bedienen sich derselben, und nennen sie Helakim.

Zusatz.

11. Da nun 18 Chaldäische Scrupel eine Minute machen, so werden die Minuten in Chaldäische Scrupel verwandelt, wenn ihr sie durch 18 multipliciret; hingegen die Chaldäischen Scrupel in Minuten, wenn ihr sie durch 18 dividiret. Also sind 15 Minuten 270 Chaldäische Scrupel.

Erklärung.

12. Die Woche ist eine Zeit von 7 Tagen.

Zusatz.

13. Wenn ihr in dem Calender, vom Anfange des Jahres an, alle Tage durch die ersten 7 Buchstaben des Alphabets A. B. C. D. E. F. G. andeutet, so hat jeder Tag in der Woche das ganze Jahr hindurch einerley Buchstaben.

Erklärung.

14. Der Buchstabe, welcher im Calender alle Sonntage das ganze Jahr durch andeutet, wird der Sonntagsbuchstabe genennet.

Erklärung.

15. Der Sonnenmonat ist die Zeit, in welcher die Sonne nach ihrer eigenen Bewegung ein himmlisches Zeichen durchläuft.

15a) Oder vielmehr der Sonnenmonat ist der 12te Theil eines Sonnenjahres, und zwar des **tropischen** (Astron. §. 277. II.) weil sich die Jahrszeiten nach dem Umlaufe der Sonne (oder eigentlich der Erde) in Ansehung der Aequinoctialpunkte, richten. Dieser tropische Umlauf der Sonne, oder das wahre **Sonnenjahr**, ist 365 Tage, 5 Stunden, 48 Min. 48 Sec., wie a. a. O. gefunden worden, und hievon der 12te Theil giebt den Sonnenmonat, wie im nächsten Zusatze steht.

Zusatz.

16. Nach der mittleren Bewegung ist ein Sonnenmonat 30 Tage, 10 Stunden, 29′ 5″; welcher also im bürgerlichen Leben, da man nur ganze Tage zählen muß, nicht in Acht genommen werden kann.

Erklärung.

17. Ein Mondenmonat ist die Zeit von einem Neumonden bis zu dem andern.

17a) Oder der 12te Theil der **synodischen** Umlaufszeit des ☽ (Astron. §. 238. II.)

Zusatz.

18. Weil nach den Astronomen die Grösse eines Mondenmonats 29 Tage, 12 Stunden, 44′ 3″ hält, so kann sie im bürgerlichen Leben gleichfalls nicht genau beobachtet werden.

Erklärung.

19. Ein Sonnenjahr ist die Zeit, in welcher die Sonne die 12 himmlischen Zeichen durchläuft.

Zusatz.

20. Also bestehet es aus 12 Sonnenmonaten (§. 15.).

Zusatz.

Zusatz.

21. Weil die Grösse des Sonnenjahres 365 Tage, 5 Stunden, 49′ ist, so kann man im bürgerlichen Leben dieselbe nicht in Acht nehmen, weil große Verwirrung entstehen würde, wenn das Jahr nicht immer mit dem Anfange eines Tages angefangen würde. Derowegen müssen einem gemeinen Sonnenjahre 365 Tage gegeben werden. Wenn aber die übrigen Stunden und Scrupel gleichfalls einen Tag ausmachen, so muß das Jahr 366 Tage bekommen.

Zusatz.

22. Wenn ihr 365 durch 12 dividiret, so kommen 30 heraus, und bleiben 5 übrig. Derowegen da das Sonnenjahr 12 Monate hat, gehören für 7 Monate 30 und für 5 Monate 31 Tage. Hat aber das Jahr 366 Tage, so sind 6 Monate von 31 Tagen.

Erklärung.

23. **Ein Sonnenjahr von 366 Tagen heisset ein Schaltjahr, und der Tag, so eingeschaltet wird, ein Schalttag.**

Zusatz.

24. Weil der Ueberschuß der Grösse des Sonnenjahres über 365 Tage in 5 St. 49′ bestehet, so müssen innerhalb 100 Jahren 24 Tage eingeschaltet werden, und bleiben noch 5 Stunden 40 Min. übrig, welche in 400 Jahren 12 St. 40 Min. und also nicht völlig einen Tag ausmachen.

Erklärung.

25. **Ein Mondenjahr ist eine Zeit von 12 Mondenmonaten.**

Zusatz.

26. Die Grösse des Mondenjahres ist 354 Tage 8 St. 48 Min. 36 Sec.

Zusatz.

27. Also ist der Unterschied zwischen dem Mondenjahre und Sonnenjahre 10 Tage 21. St. 0 Min. 24 Secund.

Zusatz.

28. Wenn man 354 durch 12 dividiret, so kommen 29 heraus, und bleiben 6 übrig. Derowegen kommen im Mondenjahre für 6 bürgerliche Monate 30, für 6 aber 29 Tage.

Zusatz.

29. Da nun der Unterschied zwischen dem bürgerlichen Mondenjahre und zwischen dem wahren Sonnenjahre 11 T. 9 St. 49 Min. ist, so müßten innerhalb 100 Mondenjahren 37 Monate, nemlich 23 von 30 und 14 von 31 Tagen eingeschaltet werden, wenn der Anfang des Jahres nicht durch alle Jahreszeiten durchwandern soll. Und bleiben doch noch in 100 Jahren 5 St. 40 Min. übrig.

Erklärung.

30. Ein gemeines Julianisches Jahr hat 365 Tage; ein Schaltjahr aber 366, und ist allezeit das vierte ein Schaltjahr.

30a) Der Grund hievon liegt darinn, weil nach der zunächst folgenden Anmerkung Julius Cäsar das Sonnenjahr zu 365 Tagen 6 Stunden annahm, und man also alle Jahr um 6 Stunden zu kurz kommen würde, wenn man es nur zu 365 Tagen annähme. Da nun diese 6 Stunden in 4 Jahren einen Tag geben, so muß man, um diesen Fehler wieder einzubringen, das 4te bürgerliche Jahr allemahl um einen Tag länger machen, d. h. man muß einen Tag einschalten, und das Jahr zu 366 Tagen annehmen, wenn 4 bürgerliche Jahre beynahe mit 4 astronomischen übereinstimmen sollen. Völlig genau können aber auch bey dieser Einrichtung 4 bürgerliche Jahre nicht mit 4 astronomischen übereinkommen, weil Julius Cäsar das Sonnenjahr etwas zu

groß

groß angenommen hat, welches nach Verlauf mehrerer Jahre wieder eine Correktion nöthig macht.

Anmerkung.

31. Es hat nemlich Julius Cäsar, der Verbesserer des Römischen Calenders, auf Einrathen seines Astronomen, des Sossygenis, die Grösse des Sonnenjahres auf 365 Tage 6 Stunden angenommen, und also am 11 Minuten zu groß, welches in 100 Jahren 18 Stunden 20 Minuten austrägt. Das Julianische Jahr ist unter den Christen in Europa bis 1582. bey allen im Brauch gewesen, da der Papst Gregorius den Calender geändert. Allein die protestirenden Potentaten und Stände des Reichs haben es aus einem ungegründeten Eifer bis A. 1700. behalten, und die Engelländer und Russen haben es noch bis auf den heutigen Tag.

Erklärung.

32. Das Gregorianische gemeine Jahr hat wie das Julianische 365 Tage, und das Schaltjahr 366. Allein weil in hundert Jahren nur 24 Schaltjahre seyn können, doch aber in vierhundert Jahren 22 St. 40 Min. noch übrig bleiben, so hat der Pabst Gregorius zwar alle vier Jahre ein Schaltjahr, aber in dem hunderten Jahre dreymal hinter einander ein gemeines Jahr behalten, und nur das vierte hunderte Jahr ein Schaltjahr seyn lassen.

Zusatz.

33. Also weichet er in 400 Jahren um 1 Stunde 20 Min. von dem wahren Sonnenjahre ab.

33 a) Oder vielmehr 400 Jahre nach der gregorianischen Einrichtung der gemeinen und Schaltjahre, weichen nur um 1 St. 20 Min. von 400 Sonnenjahren ab.

Zusatz.

34. Hingegen in 400 Jahren fänget sich allemahl das Gregorianische Jahr um 3 Tage früher an, als das Julianische.

Anmer-

Anmerkung.

35. Da nun von dem Concilio Nicäno an bis zu des Gregorii Zeiten der Unterschied 10 Tage war, und A. 1700 auf 11 Tage anwuchs; haben die evangelischen Stände des Reichs sich in gedachtem Jahre resolviret, das Gregorianische Jahr, obgleich nicht den Gregorianischen Calender, wenigstens auf eine Zeit anzunehmen, bis vielleicht auch denen von der Römischen Kirche belieben wird, auf eine bequemere Einschaltung mit zu gedenken.

Anmerkung.

36. Die Namen und ihre Grösse, beydes in dem Julianischen und Gregorianischen Jahre, sind aus beygesetzten Tafelein zu ersehen.

Januar	Jenner	31	Julius	Heumonat	31
Februar	Hornung	28	Augustus	Augustmon.	31
Martius	März	31	Septemb.	Herbstmon.	30
Aprilis	April	30	October	Weinmon.	31
Majus	May	31	November	Winterm.	30
Junius	Brachmon.	30	December	Christmon.	31

Der Schalttag wird nach dem 23 Febr. eingeschoben, und bekömmt daher im Schaltjahre dieser Monat 29 Tage. Anfangs hatten die Römer nur zehen Monate. Daher sind die Namen September, October, November, December kommen.

Anmerkung.

37. Es haben aber die Römer eine ganz besondere Art, die Tage zu zählen gehabt. Den ersten Tag nenneten sie Calendas, darauf folgten im März, May, Julio und October 6, in den übrigen Monaten 4 Nonä, auf diese 8 Idus, und die übrigen Tage wurden Calendä des folgenden Monats genennet, nach den bekannten Versiculn:

Prima dies mensis cujusque est dicta Calendae.
Sex Majus Nonas, October, Iulius & Mars.
Quatuor at reliqui: dabit Idus quilibet octo.
Inde dies reliquos omnes dic esse Calendas.

Es werden aber sowohl die Nonä und Idus, als die Calendä rückwärts gezählet. Z. E. der andere März heisset sextus Nonarum Martii. Der 16. März, decimus quintus Calendarum Aprilis.

Anmerkung.

38. Wir fangen das Jahr mit dem ersten Jenner an, nach dem Exempel Julius Cäsars, zu dessen Zeiten der Anfang des Winters, oder der Eintritt in den Steinbock ihm sehr nahe war.

Erklärung.

39. **Das heutige Judenjahr ist eigentlich ein Mondenjahr von 354 Tagen, dessen 12 Monate,** Tisri, Marcheshvan, Casleu, Tebeth, Schebat, Adar, Nisan, Jiar, Sivan, Tamuz, Ab, Elul, **zuweilen wechselsweise 30 und 29 Tage haben. Sie schalten zuweilen nach dem Monden** Adar **einen ganzen Monat ein von 30 Tagen, den sie** Veadar **nennen. Unter 19 Jahren sind die Schaltjahre** 3. 6. 8. 11. 14. 17. 19. **Der Anfang des Jahres geschiehet von dem Neumonde, welcher nach der mittleren Bewegung des Mondes dem Herbst-Aequinoctio am nähesten ist. Unterweilen wird sowohl in gemeinen als in den Schaltjahren im Monat** Casleu **ein Tag weggenommen, daß jenes nur 353, dieses 383 Tage hat: hingegen wird wiederum unterweilen in beyden ein Tag hinzugesetzet, daß jenes 355; dieses 385 Tage hat. Die Ursache ist, weil sie den Neumond** Tisri, **nach der Satzung der Alten, niemals am 1. 4. 6. Tage der Woche fevern, oder das neue Jahr davon anfangen wollen.**

39 a) Umständlich über die jüdische Zeitrechnung in Hrn. Hofr. Gatterers oben (§. 1 a) angeführten Buche.

Erklärung.

40. **Der Anfang, von welchem man die Jahre zählet, wird der** Jahrtermin, Aera **oder** Epocha **genennet.**

Zusatz.

Zusatz.

41. Weil es frey stehet, wovon man den Anfang, die Jahre zu zählen, nehmen will, so haben auch weder vor diesem alle Völker einerley Jahrtermin gehabt, noch haben sie jetzund einerley.

Anmerkung.

42. Damit man nun die verschiedenen Jahrzahlen in einander verwandeln könnte, hat man auf allerhand Mittel gedacht, die Zeiten genau zu bezeichnen, von welchen demnach umständlich zu reden ist.

Erklärung.

43. Die Zeichen der Zeit (Characteres Chronologici) sind dergleichen Merkmale, wodurch eine Zeit von andern ihres gleichen unterschieden werden kann.

Anmerkung.

44. Ausser den Begebenheiten, die aus der Astronomie und Historie genommen werden, gehören hieher der Sonnencircul, der Mondcircul, der Römer Zinszahl, und die Epacten.

Erklärung.

45. Der Sonnen-Circul (Cyclus Solis) ist die Zahl der Jahre, nach deren Verlauf die Sonntage und übrigen Tage der Woche wieder mit einerley Buchstaben bemerket werden, als vorhin in einem anderen Jahre geschahe.

Zusatz.

46. Weil ein gemeines Jahr aus 365, ein Schaltjahr aber aus 366 Tagen bestehet (§. 21.), und also jenes aus 52 Wochen und einem Tage, dieses aus 52 Wochen und 2 Tagen (§. 12.), so rücket der Anfang des Jahres um einen Tag, nach einem Schaltjahre um zwey Tage in der Woche fort.

46a) I. D. h. nemlich so viel, wenn sich ein gemeines Jahr von 365 Tagen z. E. mit einem **Donnerstage** anfienge, so würde es sich auch mit einem Donnerstage endigen, und das folgende würde sich mit einem **Freytage** anfangen, und auch wieder mit einem Feeytage endigen, wenn es aber ein Schaltjahr wäre, mit einem **Sonnabende.** Da nun der erste Tag im Jahre allemahl mit A bezeichnet wird (§. 13.), so würde, wenn es sich mit einem Donnerstage anfinge, und ein gemeines Jahr wäre, jeder Donnerstag desselben den Buchstaben A, und jeder Sonntag den Buchstaben D bekommen. Weil sich aber das folgende Jahr mit einem Freytage anfängt, und also dieser jetzt den Buchstaben A bekömmt, so wird wie aus folgendem Schema zu ersehen ist

☿	♄	☉	☽	♂	☿	♃	♀	ꝛc.
A	B	C	D	E	F	G	A	&c.
1 Jan.	2	3	4	5	6	7	8	ꝛc.

der Donnerstag den Buchstaben G und der Sonntag den Buchstaben C (zunächst vor dem D, welchen der Sonntag in dem vorhergehenden Jahre hatte) bekommen, und man begreift also warum in dem folgenden Jahre, jeder Wochentag einen Buchstaben haben muß, der in dem A B C um eine Stelle weiter vorwärts liegt, als der Buchstabe eben dieses Wochentages in dem vorhergehenden Jahre. Es versteht sich, daß man sich die 7 Buchstaben gleichsam in einen Kreis geschrieben vorstellen muß, so daß G als der nächste vor A, anzusehen ist, wie C vor D u. s. w.

II. Man sieht aus diesem Schema zugleich, daß jeder Tag des Jahres (in einem Jahre wie in dem andern) immer einen bestimmten Buchstaben haben wird. Z. E. der 5te Januar immer den Buchstaben E, der 1ste März den Buchstaben D u. s. w, wie aus der weitern Fortsetzung des obigen Schema erhellet. Nur in einem Schaltjahre würde diese Ordnung unterbrochen, und der 1. März nicht mehr wie in einem gemeinen Jahre den Buchstaben D behalten, sondern den folgenden E bekommen, wenn man nicht die Einrichtung getroffen hätte, dem im Februar fallenden Schalttage (den 24. Febr. §. 36.) **eben den Buchstaben** zu geben, welchen der vor ihm fallende Tag der 23. Febr. hat. Dadurch wird denn vom 1. März angerechnet, auf jeden Monatstag

wieder

wieder derselbe Buchstabe gebracht, wie in einem gemeinen Jahre, und nur von dem Schalttage an, bis zu Ende des Februars, werden die Monatstage andere Buchstaben, als in dem gemeinen Jahre bekommen. Z. E. in einem gemeinen Jahre würde der 25te Februar den Buchstaben G haben, in einem Schaltjahre aber den F, wie aus folgendem Schema erhellet:

Gemeines Jahr.

22 Febr.; 23; 24; 25; 26; 27; 28; 1 März; 2; 3; ꝛc.
D; E; F; G; A; B; C; D; E; F; ꝛc.

Schalt-Jahr.

22 Febr. 23; 24; 25; 26; 27; 28; 29; 1; 2; 3; ꝛc.
D E E; F; G; A; B; C; D; E; F; ꝛc.

Vom 1. März an, ist die Ordnung wieder hergestellt, und wie in dem gemeinen Jahre.

Zusatz.

47. Fienge sich das Julianische oder Gregorianische Jahr z. E. mit einem Freytage an, wie in dem Schema (§. 46 a I) und wäre es zugleich ein Schaltjahr, so würde es bis zum Schalttage (den 24. Febr.) den Sonntagsbuchstaben C haben, wie ein gemeines Jahr, aber nach dem Schalttage werden die Sonntage den Buchstaben B erhalten. Denn wenn man das Schema (§. 46 a I.) fortsetzt, so wird der 22te Febr. des Schaltjahres (§. 46 a II.) ein Montag seyn, also der 28ste ein Sonntag, und dieser würde den Buchstaben B haben. So würde denn jeder folgende Sonntag nach dem Schalttage, den Buchstaben B haben, welcher in dem ABC um eine Stelle weiter vorwärts liegt, als der C, welchen die Sonntage vor dem Schalttage hatten. Ein jedes Schaltjahr hat also zwey Sonntagsbuchstaben, und wäre z. E. der erste Sonntagsbuchstabe in einem Schaltjahre G, so würde auf eine ähnliche Art der andere F seyn müssen.

Was

Was von den Sonntagen gesagt worden ist, gilt auch von andern Wochentagen in einem Schaltjahre.

Zusatz.

48. Dannenhero muß der Sonnencircul aus 28 Jahren bestehen, nemlich weil alle 4 Jahr ein Schaltjahr ist, und 7 Buchstaben sind, aus viermal 7 Jahren: wie aus beygesetztem Täfelein zu ersehen, welches nach den vorhergehenden Zusätzen eingerichtet worden.

1	GF	5	BA	9	DC	13	FE	17	AG	21	CB	25	ED
2	E	6	G	10	B	14	D	18	F	22	A	26	C
3	D	7	F	11	A	15	C	19	E	23	G	27	B
4	C	8	E	12	G	16	B	20	D	24	F	28	A

Anmerkung.

49. Dieses Täfelein dienet beständig in dem Julianischen Jahre den Sonntagsbuchstaben zu finden, allein weil in dem Gregorianischen Calender in dem hunderten Jahre dreymal hinter einander ein gemeines Jahr ist, so muß alle hundert Jahre ein neues Täfelein construiret werden, von dem das dritte auch das vierte Jahrhundert durch gilt, weil in dem vierten hundersten Jahre ein Schaltjahr ist (§. 32.). Von A. 1700 bis 1800. gilt folgendes:

1	DC	5	FE	9	AG	13	CB	17	ED	21	GF	25	BA
2	B	6	D	10	F	14	A	18	C	22	E	26	G
3	A	7	C	11	E	15	G	19	B	23	D	27	F
4	G	8	B	12	D	16	F	20	A	24	C	28	E

Aufgabe.

50. Auf ein gegebenes Jahr nach Christi Geburt den Sonntagsbuchstaben zu finden.

Auflösung.

1. Weil der Sonnencircul nach der Einrichtung Dionisii, den wir in der Festrechnung folgen, sich 9 Jahre vor Christi Geburt anfänget, so addiret zu

dem gegebenen Jahr Christi 9, und die Summe dividiret durch 28; was überbleibet, ist der Sonnencircul. Bleibet aber nichts übrig, so ist 28 der Sonnencircul.

2. Suchet den Sonnencircul entweder in dem Julianischen oder Gregorianischen Täfelein auf; so findet ihr den Sonntagsbuchstaben im Julianischen oder Gregorianischen Jahre darneben.

Z. E. Ihr verlanget den Sonntagsbuchstaben für 1710. zu wissen.

1710	I	
9	ßß I	
1719	xπxϑ	61
	ΔßS	
	Δ	

Der Sonnencircul ist 11. Also der Sonntagsbuchstabe im Julianischen Jahre A, im Gregorianischen E.

Zusatz.

51. Wenn ihr in einem immerwährenden Calender, darinnen für jeden Tag des Monats die gehörigen Buchstaben gesetzet sind, den Sonntagsbuchstaben durch alle Monate aufsuchet, so wisset ihr, auf welche Tage im Jahre die Sonntage fallen.

Zusatz.

52. Wenn euch der Sonntagsbuchstabe bekannt ist, wisset ihr zugleich den Buchstaben eines jeden andern Tages (§. 13.), und könnet wie vorhin finden, auf welche Tage des Jahres alle Montage, Dienstage u. s. w. fallen.

Erklärung.

53. Der Mondcircul (Cyclus Lunae) ist die Zahl der Jahre, in welcher die Neu- und Vollmonden wieder auf Einen Tag des Julianischen Jahres kommen.

Anmer-

Anmerkung.

54. Man giebet den Mondecircul 19 Jahre, und daher kann er nicht länger als 312 Jahre die Tage richtig zeigen, auf welche in einem Jahre die Neu- und Vollmonden fallen. Ursache ist diese. Nach Verlauf 19 Jahre fallen zwar die Neu- und Vollmonden wieder auf Einen Tag des Monats, aber nicht eben wieder auf dieselbe Stunde und Minute.

Erklärung.

55. Die Zahl, welche das Jahr von dem Anfange des Mondcirculs zeiget, wird die Güldene Zahl genennet.

Aufgabe.

56. Die Güldene Zahl in einem gegebenen Jahre nach Christi Geburt zu finden.

Auflösung.

1. Weil nach Dionysii Einrichtung der Mondencircul sich ein Jahr vor Christi Geburt anfänget, so addiret zu dem gegebenen Jahre nach Christi Geburt 1.
2. Die Summe dividiret durch 19; so bleibet die Güldene Zahl übrig. Wenn es aber ganz aufgehet, so ist 19 die güldene Zahl.

Z. E. Ihr verlanget zu wissen, was 1710. für eine güldene Zahl ist.

1710	8	
1	XVIII	90
1711	XXX	
	X	

Weil nach geschehener Division 1 übrig bleibet, so ist 1. die güldene Zahl.

Erklärung.

57. Die monatlichen Mond-Epacten sind der Ueberschuß eines bürgerlichen Julianischen

oder Gregorianischen Monats über einen Mondenmonat.

Zusatz.

58. Ein Mondenmonat ist 29 T. 12 St. 44′ 3″. Wenn demnach der bürgerliche Monat 31 Tage hat, so sind die Epacten 1 T. 11 St. 15′ 57′. Hat aber der bürgerliche Monat nur 30 Tage, so sind die Epakten 11 St. 15′ 57″. Nemlich im ersten Falle sind die Epakten beynahe 1 Tag 12 Stunden, im andern beynahe 12 Stunden.

Erklärung.

59. Die jährliche Mondepakten sind der Unterschied zwischen einem bürgerlichen Sonnen-Jahre und einem astronomischen Monden-Jahre.

Zusatz.

60. Sie kommen also heraus, wenn ihr die 12 monatliche Epakten zusammen addiret, und machen 11 Tage.

60a) Oder sie sind dem Unterschiede eines Mondenjahres (§. 26.) und eines Julianischen Sonnenjahres (§. 31.) gleich. Dieser Unterschied beträgt 10 Tage 21 St. 11 Min. 24 Sec. also beynahe 11 Tage.

Zusatz.

61. Also fallen die Neu- und Vollmonden in dem folgenden Jahre 11 Tage im Monate früher, als im vorhergehenden.

Zusatz.

62. Wenn ihr in den Mondencircul zu den güldenen Zahlen die Epakten setzen wollet, so schreibet in dem ersten Jahre 11, in dem andern 22, in dem dritten aber anstatt 33 nur 3, in dem vierten 14 u. s. w. so werdet ihr finden, daß nach 19 Jahren die Epakten alle durch

durch sind, und sich wieder von neuem, nemlich von 11, mit der güldenen Zahl 1 anfangen.

Aufgabe.

63. Aus der gegebenen güldenen Zahl eines Jahres die ihm zugehörige jährliche Epakte im Julianischen Jahre zu finden.

Auflösung.

Multipliciret die güldene Zahl durch 11; was herauskommet, ist die verlangte Epakte, wenn sie weniger als 30 ist, sonst aber dividiret das Produkt durch 30, so bleibet sie übrig. Als 1710. war die güldene Zahl 1; also ist die Julianische Epakte 11 (§. 62.).

Zusatz.

64. Wenn ihr den Unterschied der Tage zwischen dem Julianischen und Gregorianischen Calender davon abziehet, so bleibet die Gregorianische Epakte übrig. Z. E. 1711. war die Julianische Epakte 22, und also die Gregorianische 11. Wenn nichts übrig bleibet, wie 1710. so ist die Gregorianische 30 oder *.

Anmerkung.

65. Wenn ihr die Epakten nicht jederzeit von neuem ausrechnen wollet, könnet ihr sie aus beygefügtem Täfelein nehmen, in welchem in der ersten Reihe die güldenen Zahlen, in der andern die immerwährenden Julianischen Epacten, und in dem dritten die Gregorianischen Epacten von 1700 bis 1900 zu finden.

1	XI	*		11	I		XX
2	XXII	XI		12	XII		I
3	III	XXII		13	XXIII		XII
4	XIV	III		14	IV		XXIII
5	XXV	XIV		15	XV		IV
6	VI	XXV		16	XXVI		XV
7	XVII	VI		17	VII		XXVI
8	XVIII	XVII		18	XVIII		VII
9	IX	XXVII		19	XXIX	30	XVIII
10	XX	IX					

Erklärung.

66. Der Römer Zinszahl (Cyclus Indictionum) ist eine Reihe von 15 Jahren, in deren drittes Jahr Christi Geburt gesetzet wird.

Anmerkung.

67. Wenn und zu was Ende dieser Cyclus zuerst eingesetzet worden, ist ganz ungewiß.

Aufgabe.

68. Auf ein gegebenes Julianisches oder Gregorianisches Jahr der Römer Zinszahl zu finden.

Auflösung.

Addiret zu dem gegebenen Jahre nach Christi Geburt 3, und dividiret die Summe durch 15, so bleibet der Römer Zinszahl übrig. Gehet es aber auf, so ist sie 15.

Z. E. ihr verlanget der Römer Zinszahl für 1710. zu wissen.

1710	XX	
3	XØ	
1713	XIIX3	114
	X888	
	XX	

Weil nach geschehener Division 3 übrig bleibet, so ist 3 der Römer Zinszahl.

Erklärung.

69. Der Julianische Periodus ist eine Zeit von 7980 Jahren, welche herauskommet, wenn man den Sonnen- und Mondcircul und der Römer Zinszahl in einander multipliciret, und nach deren Verlauf alle diese drey Circul sich wieder mit einander in einem Jahre anfangen.

Zusatz.

Zusatz.

70. Da nun die Welt noch nicht 6000 Jahr gestanden, so sind alle Jahre nach Erschaffung der Welt bis auf das gegenwärtige durch diese drey Zeichen in dem Julianischen Periodo dergestalt von einander unterschieden, daß keines unter allen die Zeichen hat, welche einem andern zukommen.

Erklärung.

71. Wir Christen zählen jetzund unsere Jahre von Christi Geburt. Der Juden Jahrzahl gründet sich auf die Erschaffung der Welt; der alten Römer auf die Erbauung der Stadt Rom; der Griechen auf die Einsetzung der Olympischen Spiele. Die Jahrzahl von Christi Geburt fället in das 4713. Jahr des Julianischen Periodi nach gemeiner Rechnung; die Jüdische in das 953. den 7. Oct. Die Jahrzahl von Erschaffung der Welt nach dem Scaliger in das 764. den 26. Oct.; die von Erbauung der Stadt Rom in das 3961. den 21. Apr.; die Griechische oder Olympische in das 3938. in Herbst.

Aufgabe.

72. Eine gegebene Jahrzahl in eine andere zu verwandeln.

Auflösung.

1. Addiret das gegebene Jahr zu dem Jahre des Julianischen Periodi, in welchem sich die Jahrzahl anfänget, so habet ihr das Jahr des Julianischen Periodi, welches mit ihm übereinkommet, und
2. ziehet davon ab das Jahr des Julianischen Periodi, in welchem sich die andere Jahrzahl anfänget (§. 71.).

Z. E. ihr verlanget zu wissen, wie viel in dem 1710ten Jahre die jüdische Jahrzahl ist.

1710	6423
4713	953
6423	5470 jüdische Jahrzahl vom Oct. an.

Erklärung.

73. Die beweglichen Feste sind, welche nicht immer auf einen Tag des Jahres fallen, als Ostern, Pfingsten, Trinitatis. Die unbeweglichen aber, die immer auf einen Tag fallen, als Weynachten.

Anmerkung.

74. Die beweglichen Feste, so die gesammte Christenheit in der Abendländischen Kirche feyert, sind folgende Sonntage, so sich alle nach Ostern richten, nebst andern wenigen Tagen.

Septuagesimä.	Ostermontag.
Sexagesimä.	Osterdienstag.
Quinquagesimä, oder Esto mihi.	Quasimodogeniti.
Quadragesimä, oder Invocavit.	Misericordias Domini.
Reminiscere.	Jubilate.
Oculi.	Cantate.
Lätare.	Rogate.
Judica.	Den Donnerstag darauf Himmelfahrt.
Palmarum.	Exaudi.
Grüner Donnerstag.	Pfingstsonntag.
Charfreytag.	Pfingstmontag.
Ostern.	Pfingstdienstag.
Ostersonntag.	Trinitatis.

Alle Sonntage vor Septuagesimä werden von dem Feste Epiphaniä, die übrigen nach dem Feste der Dreyeinigkeit von Trinita-

nitatis gezählet und benennet. Im Sächsischen Landen sind die unbeweglichen Feste:

Neu-Jahr, oder Beschneidung Christi, 1 Januar.
Epiphania, oder Heilige drey Könige, 6. Januar.
Mariä Reinigung oder Lichtmesse, 2. Februar.
Mariä Verkündigung, 25. März.
Johannes der Täufer, 24. Juni.
Mariä Heimsuchung, 2. Jul.
Michael, 29. Septemb.
Weynachten, 25. December.
Stephanus, 26. December.
Johannes der Evangelist, 27. December.

Vor diesem wurden auch die Feste der Apostel gefeyert, so jetzt nur in Kirchenfeste verwandelt worden.

Anmerkung.

75. In der Römischen Kirche werden ausser den Apostel-tagen auch noch Laurentius, Mariä Himmelfahrt, Mariä Geburt, Aller Heiligen, und Mariä Opferung, nebst vielen Kirchenfesten, als Ignatius, Franciscus, Porziuncula, gefeyert. Imgleichen nehmen sie die vier Quatember wegen der Fasten fleißig in Acht, welche wir im bürgerlichen Leben noch sehr gebrauchen. Es fället aber der erste auf die Mittewoche nach Invocavit, der andere auf die Mittewoche nach Pfingsten, der dritte auf die Mittewoche nach Creutzerhöhung, oder nach dem 14 Sept., der vierte auf die Mittwoche nach Lucia, oder nach dem 13. Dec. Daher nennen wir sie insgemein das Quartal Reminiscere, oder auch Invocavit, das Pfingstquartal, das Quartal Crucis, und das Quartal Luciä.

Schluß des Consilii Nicäni.

76. Das Osterfest soll stets den ersten Sonntag gefeyert werden, welcher auf den Vollmond nach dem Frühlings-Aequinoctio folget. Daher wenn der Vollmond auf den Sonntag fället, muß es 8 Tage hernach gefeyert werden.

76a) I. Die **Ostergränze** (terminus pachalis) heist der Tag, auf welchen der erste Vollmond nach der Frühlingsnachtgleiche fällt. Da im Jahre 532, als die Einrichtung des Kalenders, nach Dionysius Vorschrift eingeführt ward, die Frühlingsnachtgleiche auf den 21. März einfiel, die güldene Zahl 1, und die Ostergränze der 5te April war, so suchte man nach dem 19 jährigen Mondszirkel, auf was für einen Tag eines jeden Jahres dieses Zirkels, die Ostergränze oder der **Ostervollmond** fallen würde, und so entstand das Täfelchen der julianischen Ostervollmonde, wie es in dem folgenden §. zur Berechnung der Julianischen Ostern angegeben ist. Die neben einem jeden Ostervollmonde befindliche Zahl in dem Mondszirkel, also die güldene Zahl wird nach §. 56. berechnet.

II. Da aber der Mondszirkel die Neu- und Vollmonde nicht länger als ohngefähr innerhalb eines Zeitraums von 300 Jahren richtig geben kann (§. 54.) so konnte dieses Täfelchen, welches zu Dionysius Zeiten die Ostergränzen richtig gab, nur ohngefähr bis auf das Jahr 800 gelten, und schon um diese Zeit hätte eine Correction angebracht, und ein neues Täfelchen berechnet werden müssen. Um so viel mehr hätte dieses in den folgenden Jahrhunderten 1100; 1400; geschehen müssen. Ausserdem war von Dionisius Zeit, bis zu Pabst Gregors (1582.) wegen der von Julius Cäsar unrichtig angenommenen Grösse des Sonnenjahres (§. 31.) eine beträchtliche Verrückung der Nachtgleichen vorgegangen, so daß die julianischen Nachtgleichen um 10 Tage von der Wahrheit abwichen, und statt auf den 21ten März zu fallen, auf den 11ten fielen, weswegen denn auch vom Pabst Gregor im Jahre 1582. die Einrichtung getroffen wurde, daß man auf den 5ten October sogleich den 15ten folgen ließ, also gleichsam das Jahr um 10 Tage verkürzte, um in dem folgenden Jahre, die Nachtgleiche wieder, wie zu Dionysii Zeit, auf den 21 März zurückzubringen. Nicht allein diese Wegwerfung der 10 Tage in dem Jahre 1582, sondern auch die erwähnten Correctionen wegen des Mondzirkels, waren Ursache, daß das von Dionysius berechnete Täfelchen der Ostergränzen, zu Gregors Zeiten gänzlich umgeändert, und überhaupt eine gänzliche Reform des Julianischen Kalenders, und der nach ihm geführten Festrechnung vorgenommen werden mußte, wenn in der Folge jene Verrückung der Nachtgleichen nicht wieder statt finden, und nach der Anordnung des Nicäischen Concilii (§. 76.) Ostern allemahl auf den ersten Sonn-

Sonntag nach dem Vollmonde gefeyert werden sollte, welcher zunächst nach der Frühlingsnachtgleiche fiele. Zu Anfang des gegenwärtigen Jahrhunderts, war wegen der Nachtgleichen wieder eine Correction von einem Tage nöthig, und auf diesen Verbesserungen beruht nunmehr dasjenige Täfelchen, welches in dem folgenden §. zur Berechnung der gregorianischen Ostergränzen, und Osterfestes angegeben ist. Es gilt bis zum Jahre 1900.

Aufgabe.

77. Das Osterfest auszurechnen.

Auflösung.

1. Suchet den Sonntagsbuchstaben (§. 50.) und die güldene Zahl (§. 56.).

2. Die güldene Zahl suchet in dem Julianischen Ostertäfelein, so stehet darneben der Tag, auf welchen der Ostervollmond fället, und wenn ihr den dabey gesetzten Buchstaben mit dem Sonntagsbuchstaben vergleichet, erkennet ihr, was es für ein Tag in der Woche sey (§. 52.), folgends auf welchen Tag des Jahres Ostern fället (§. 76.).

3. Verlanget ihr aber die Gregorianische Ostern, so suchet durch Hülfe der güldenen Zahl die Gregorianische Epakte (§. 65.).

4. Mit der Epakte gehet in das Gregorianische Ostertäfelein, so stehet abermal der Tag daneben, auf welchen der Ostervollmond fället, und im übrigen verfahret ihr wie n. 2.

5. Allein weil die Neu- und Vollmonde vermittelst der bloßen Epakten nicht auf einzelne Stunden angegeben werden, so kann auch die daraus hergeleitete Ostergränze nicht immer so ausfallen, daß Ostern genau dem Schlusse des Nicäischen Concilii gemäß (§. 76.) gefeyert wird. Der wahre

Oster-

Ostervollmond könnte z. E. Sonnabends Nachmittags fallen, dann müßte nach (§. 76.) sogleich den folgenden Sonntag Ostern gefeyert werden. Hingegen könnte die gregorianische Epaktenrechnung den erwähnten Vollmond erst an dem Sonntage selbst geben, und dann fiele Ostern eine Woche später. Dies eräugnete sich 1724. würklich. Der wahre Ostervollmond fiel den 8. April Nachmittags um 4 Uhr (nach dem Uranienburgischen Meridian, und Keplers Rudolphinischen Tafeln) und das war ein Sonnabend, also hätte sogleich den nächsten Sonntag als am 9. April das Osterfest seyn müssen. Die gregorianische Epakten-Tafel gab aber den Ostervollmond auf den 9ten April, also an einem Sonntage selbst, und man feyerte also Ostern erst 7 Tage darauf, den 16ten April. Die evangelischen Stände hatten indessen schon im Jahre 1700. auf dem Reichstage beschlossen, Ostern allemahl nach der wahren astronomischen Angabe, sowohl des Frühlingsäquinocti, als auch des Ostervollmondes, wie er sich nach oberwähnten Rudolphinischen Tafeln ergeben würde, zu feyern, und man nannte dies den **verbesserten Kalender**, nach welchem also würklich im Jahre 1724. Ostern von den Protestanten 8 Tage früher, als von den Katholiken, welche die gregorianische Epaktenrechnung beybehielten, gefeyert wurde. Im Jahre 1744. eräugnete sich dieser Uebelstand wieder, daß Ostern in einem und demselben Reiche von den Protestanten um eine Woche früher als von den Römischkatholischen gefeyert wurde. Dies verursachte wegen der Ferien in dem Cammergerichte und in andern Geschäften allerley Unordnungen, weswegen denn endlich die protestantischen Stände im Jahre 1776. den Entschluß faßten, von der bisherigen Einrichtung ihres verbesserten Kalenders abzugehen,

hen, und künftig Ostern, nebst den davon abhängenden Festen, allemahl mit den Katholiken zugleich zu feyern, mit Vorbehalt aller andern Rechte in geistlichen und weltlichen Dingen, und so einem allgemeinen Reichskalender beyzutreten, der mit dem Jahre 1777. seinen Anfang nahm.

Man sieht indessen leicht, daß es in alle Fälle einfacher und besser gewesen wäre, bey der Berechnung des Osterfestes den Mond ganz wegzulassen, und Ostern etwa nach dem Vorschlage Joh. Bernoullis Opp. Tom. IV. n. 188. p. 497. den ersten Sonntag nach der Frühlingsnachtgleiche zu feyern. Indessen wollte man von einer Verordnung des Nicäischen Concilii nicht abgehen, nach welcher man nicht zugleich mit den Juden das Pasah feyern sollte, und wählte daher die bisher beygebrachte Osterrechnung, welche das unbequeme hat, daß ein wichtiger Abschnitt des Jahres zum Nachtheil mancher Geschäfte, den ganzen Zeitraum vom 22ten März bis zum 25sten April durchwandert. Auf diese äussersten Gränzen fällt nun zwar Ostern sehr selten. Doch wäre eine andere Einrichtung zu wünschen. (M.)

Julianisches	Gregorianisches

Oster-Täfelein.

Guld. Zahl.	Ostervollmond.		Epakten.	Ostervollmond.	
1	5 April	D	*	13 April	E
2	25 Mart.	G	XI	2 April	A
3	13 April	E	XXII	22 Mart.	D
4	2 April	A	III	10 April	B
5	22 Mart.	D	XIV	30 Mart.	E
6	10 April	B	XXV	18 April	C
7	30 Mart.	E	VI	7 April	F
8	18 April	C	XVII	27 Mart.	B
9	7 April	F	XXVII	15 April	G
10	27 Mart.	B	IX	4 April	C
11	15 April	G	XX	24 Mart.	F
12	4 April	C	I	12 April	D
13	24 Mart.	F	XII	1 April	G
14	12 April	A	XXIII	21 Mart.	C
15	1 April	G	IV	9 April	A
16	21 Mart.	C	XV	29 Mart.	D
17	9 April	A	XXVI	17 April	B
18	29 Mart.	D	VII	6 April	C
19	17 April	B	XVIII	26 Mart.	A

Z. E. ihr verlanget die Julianischen und Gregorianischen Ostern 1711. zu wissen. So ist beyderseits die güldene Zahl 2, der Sonnencircul 12, die Gregorianische Epakte XI, der Julianische Sonntagsbuchstabe G, der Gregorianische D. Da nun der Ostervollmond nach der Julianischen Cyclischen Rechnung auf den 25. März fället, und dieser ein Sonntag ist, indem G dabey stehet, so müssen die Julianischen Ostern den 31. März gefeyert werden. Hingegen die Epakte XI. zeiget den Gregorianischen Ostervollmond an auf den 2. April, und aus dem dabey stehenden Buchstaben A erhellet, daß es ein Donnerstag sey. Demnach werden die Gregorianischen Ostern den 5ten April gefeyert.

Immerwährender Gregorianischer Kalender.

Ianuarius.		Februarius.		Martius.	
1. *	A	1. XXIX.	d	1. *	d
2. XXIX	b	2. XXVIII	e	2. XXIX.	e
3. XXVIII	c	3. XXVII	f	3. XXVIII	f
4. XXVII	d	4. 25. XXVI	g	4. XXVII	g
5. XXVI	e	5. XXV. XXIV	A	5. XXVI	A
6. 25. XXV	f	6. XXIII	b	6. XXV	b
7. XXIV	g	7. XXII	c	7. XXIV	c
8. XXIII	A	8. XXI	d	8. XXIII	d
9. XXII	b	9. XX	e	9. XXII	e
10. XXI	c	10. XIX	f	10. XXI	f
11. XX	d	11. XVIII	g	11. XX	g
12. XIX	e	12. XVII	A	12. XIX	A
13. XVIII	f	13. XVI	b	13. XVIII	b
14. XVII	g	14. XV	c	14. XVII	c
15. XVI	A	15. XIV	d	15. XVI	d
16. XV	b	16. XIII	e	16. XV	e
17. XIV	c	17. XII	f	17. XIV	f
18. XIII	d	18. XI	g	18. XIII	g
19. XII	e	19. X	A	19. XII	A
20. XI	f	20. IX	b	20. XI	b
21. X	g	21. VIII	c	21. X	c
22. IX	A	22. VII	d	22. IX	d
23. VIII	b	23. VI	e	23. VIII	e
24. VII	c	24. V	f	24. VII	f
25. VI	d	25. IV	g	25. VI	g
26. V	e	26. III	A	26. V	A
27. IV	f	27. II	b	27. IV	b
28. III	g	28. I.	c	28. III	c
29. II	A			29. II	d
30. I	b			30. I	e
31. *	c			31. *	f

Aprilis		Majus.		Iunius.	
1. XXIX	g	1. XXVIII	b	1. XXVII	e
2. XXVIII	A	2. XXVII	c	2. 25. XXVI	f
3. XXVII	b	3. XXVI	d	3. XXVXXIV	g
4. 25. XXVI	c	4. 25. XXV	e	4. XXIII	A
5. XXV,XXIV	d	5. XXIV	f	5. XXII	b
6. XXIII	e	6. XXIII	g	6. XXI	c
7. XXII	f	7. XXII	A	7. XX	d
8. XXI	g	8. XXI	b	8. XIX	e
9. XX	A	9. XX	c	9. XVIII	f
10. XIX	b	10. XIX	d	10. XVII	g
11. XVIII	c	11. XVIII	e	11. XVI	A
12. XVII	d	12. XVII	f	12. XV	b
13. XVI	e	13. XVI	g	13. XIV	c
14. XV	f	14. XV	A	14. XIII	d
15. XIV	g	15. XIV	b	15. XII	e
16. XIII	A	16. XIII	c	16. XI	f
17. XII	b	17. XII	d	17. X	g
18. XI	c	18. XI	e	18. IX	A
19. X	d	19. X	f	19. VIII	b
20. IX	e	20. IX	g	20. VII	c
21. VIII	f	21. VIII	A	21. VI	d
22. VII	g	22. VII	b	22. V	e
23. VI	A	23. VI	c	23. IV	f
24. V	b	24. V	d	24. III	g
25. IV	c	25. IV	e	25. II	A
26. III	d	26. III	f	26. I	b
27. II	e	27. II	g	27. *	c
28. I	f	28. I	A	28. XXIX	d
29. *	g	29. *	b	29. XXVIII	e
30. XXX	A	30. XXIX	c	30. XXVII	f
		31. XXVIII	d		

Julius.		Augustus.		September.	
1. XXVI	g	1. XXIV	c	1. XXIII	f
2. XXV	A	2. XXIII	d	2. XXII	g
3. XXIV	b	3. XXII	e	3. XXI	A
4. XXIII	c	4. XXI	f	4. XX	b
5. XXII	d	5. XX	g	5. XIX	c
6. XXI	e	6. XIX	A	6. XVIII	d
7. XX	f	7. XVIII	b	7. XVII	e
8. XIX	g	8. XVII	c	8. XVI	f
9. XVIII	A	9. XVI	d	9. XV	g
10. XVII	b	10. XV	e	10. XIV	A
11. XVI	c	11. XIV	f	11. XIII	b
12. XV	d	12. XIII	g	12. XII	c
13. XIV	e	13. XII	A	13. XI	d
14. XIII	f	14. XI	b	14. X	e
15. XII	g	15. X	c	15. IX	f
16. XI	A	16. IX	d	16. VIII	g
17. X	b	17. VIII	e	17. VII	A
18. IX	c	18. VII	f	18. VI	b
19. VIII	d	19. VI	g	19. V	c
20. VII	e	20. V	A	20. IV	d
21. VI	f	21. IV	b	21. III	e
22. V	g	22. III	c	22. II	f
23. IV	A	23. II	d	23. I	g
24. III	b	24. I.	e	24. *	A
25. II	c	25. *	f	25. XXIX.	b
26. I	d	26. XXIX	g	26. XXVIII	c
27. *	e	27. XXVIII	A	27. XXVII	d
28. XXIX	f	28. XXVII	b	28. XXVI	e
29. XXVIII	g	29. 25. XXVI	c	29. XXV. XXIV	f
30. XXVII	A	30. XXV	d	30. XXIII	g
31. 25. XXVI	b	31. XXIV	e		

October.		November.		December.	
1.	XXII A	1.	XXI d	1.	XX f
2.	XXI b	2.	XX e	2.	XIX g
3.	XX c	3.	XIX f	3.	XVIII A
4.	XIX d	4.	XVIII g	4.	XVII b
5.	XVIII e	5.	XVII A	5.	XVI c
6.	XVII f	6.	XVI b	6.	XV d
7.	XVI g	7.	XV c	7.	XIV e
8.	XV A	8.	XIV d	8.	XIII f
9.	XIV b	9.	XIII e	9.	XII g
10.	XIII c	10.	XII f	10.	XI A
11.	XII d	11.	XI g	11.	X b
12.	XI e	12.	X A	12.	IX c
13.	X f	13.	IX b	13.	VIII d
14.	IX g	14.	VIII c	14.	VII e
15.	VIII A	15.	VII d	15.	VI f
16.	VII b	16.	VI e	16.	V g
17.	VI c	17.	V f	17.	IV A
18.	V d	18.	IV g	18.	III b
19.	IV e	19.	III A	19.	II c
20.	III f	20.	II b	20.	I d
21.	II. g	21.	I c	21.	* e
22.	I A	22.	* d	22.	XXIX f
23.	* b	23.	XXIX e	23.	XXVIII g
24.	XXIX c	24.	XXVIII f	24.	XXVII A
25.	XXVIII d	25.	XXVII g	25.	XXVI b
26.	XXVII e	26.	25. XXVI A	26.	25. XXV c
27.	XXVI f	27.	XXV. XXIV b	27.	XXIV d
28.	25. XXV g	28.	XXIII c	28.	XXIII e
29.	XXIV A	29.	XXII d	29.	XXII f
30.	XXIII b	30.	XXI e	30.	XXI g
31.	XXII c			31.	XX A

Ende der Chronologie.

Anfangs-Gründe der Gnomonik.

Erklärung.

1.

Die Gnomonik ist eine Wissenschaft, auf einer jeden gegebenen Fläche eine Sonnenuhr zu beschreiben.

1a) Bücher, woraus man die Zeichnung der Sonnenuhren erlernen kann, giebt es in sehr großer Menge. Ich will nur einige anführen.

Die Theorie der Sonnenuhren und die genauere Verzeichnung derselben durch Anwendung analytisch-trigonometrischer Formeln lehrt am gründlichsten Hrn. H. **Kästners** Gnomonica analytica Lipſ. 1754. Noch vollständiger ausgeführt in dessen dissert. math. et Phyſ. VII.

Die Handgriffe und das praktische bey diesem Geschäfte lehren **Welpers** Gnomonik III. Ausgape mit dem 4ten Theile vermehrt (von Joh. Christ. **Sturm**) Nürnb. 1708.

Penthers Gnomonica fundamentalis et mechanica. Augsp. 1734.

De la Hire Gnomonique Par. 1698.

Böttgers erleichterte Gnomonica. Lemgo 1748.

Joh. Jac. **Shüblers** neue und deutliche Anleitung zur praktischen Sonnenuhrkunſt. Nürnb. 1726.

La Gnomonique pratique par Dom. Bedos 1774.

Bruckner deſcription et uſage d'un cadran ſolaire univerſel. Petersb 1735.

Bions, Grubers, Helfenfrieders u. a. hieher gehörige Schriften übergehe ich.

Erklärung.

2. Die Sonnenuhr ist eine Verzeichnung gewisser Linien auf einer gegebenen Fläche, darauf der Schatten des eingesteckten Zeigers eine Stunde nach der andern anzeigt.

Aufgabe.

3. Ein Instrument zu machen, dadurch man die Abweichung einer Verticalfläche von Süden oder Norden, imgleichen von der Horizontalfläche erforschen kann.

Auflösung.

I. 1. Theilet einen halben Circul in seine 180 Grade,
1. und zählet von E bis in A und D in jedem Quadranten 90 Gr.

2. In dem Mittelpunkte F befestiget ein Lineal HI daran ein Kästlein K mit einer Magnetnadel befestiget. Es muß aber darinnen nicht allein die Mittagslinie, sondern auch die Declinationslinie der Magnetnadel beschrieben seyn.

Ich sage, durch dieses Instrument könnet ihr finden, wie viel Grad eine Verticalfläche von Süden oder Norden entweder gegen Osten oder Westen, imgleichen eine inclinirte von der Horizontalfläche abweichet.

Beweis.

I. Denn wenn die Fläche gegen Mittag oder Mitter-
2. nacht siehet, so muß die Mittagslinie auf einer jeden Linie, die an derselben horizontal gezogen wird, perpendicular stehen. Derowegen wenn ihr die Seite des Instruments AD an die Fläche anleget, und es horizontal stehet, das Lineal aber an dem Mittelpunkte F so lange verschiebet, bis die Magnetnadel auf ihrer Declinationslinie stehet, so wird die Schärfe desselben in E fallen, wenn die Fläche nicht abweichet; hingegen wenn sie abwei-

chet

chet, entweder gegen Osten oder gegen Westen den verlangten Grad der Abweichung auf dem Instrumente abschneiden, welcher nemlich den Winkel QFN = PFM (§. 40. Geom.) zeiget, den eure Fläche mit der Fläche, so nach Mittag siehet, machet. Denn es sey PQ die Seite der Fläche so nach Mittag siehet, MN aber die Seite der abweichenden Fläche, so ist PFM der Declinationswinkel. Nun sey EF die Perpendicularlinie auf euer Fläche, FG aber die Mittagslinie, welche auf PQ perpendicular stehet. Da nun

EFG + GFM = 90 Gr. und
GFM + MFP = 90 Gr., so ist
EFG + GFM = GFM = MFP

(§. 22. Arithm.), folgends

EFG = PFM (§. 25. Arithm.)

Welches das erste war.

Wenn die Seite des Instruments BC an die gegen den Horizont inclinirte Fläche IL angeleget, und an den Mittelpunkt F ein Bleywurf FH angemachet wird, so ist der Winkel EFG dem Inclinationswinkel ILK gleich, wovon der Beweis völlig in der Mechanik (§. 82.) zu finden. **Welches das andere war.** I. 3.

3a) Die Astronomie giebt genauere Verfahren, die Abweichung einer vorgegebenen Fläche von der Mittagsfläche zu finden. Sonnenuhren zu beschreiben mag der Gebrauch einer guten **Magnetnadel** hinlänglich seyn, wozu insbesondere das **Branderische** Declinatorium magneticum Augsp. 1779. dienlich ist. Die Abweichung jeder Ebene aus dem Schatten eines auf sie lothrechten Stiftes zu finden, lehrt **Jac. Bernoulli**, Opp. N. 36. Hat man auf der Horizontalfläche, worauf eine Wand steht, eine Mittagslinie nach astronomischen Methoden (§. 27. Astr.) gezogen, so wird es auf diese Art auch nicht schwer fallen, den Winkel zu messen, den die Wand mit der Mittagsfläche macht.

Erklärung.

4. Die Aequinoktialuhr ist diejenige, welche auf einer Fläche beschrieben wird, die mit dem Horizont einen Winkel machet, welcher der Höhe des Aequators gleich ist.

Erklärung.

5. Die Horizontaluhr ist diejenige, so auf einer Horizontalfläche beschrieben wird.

Erklärung.

6. Die Verticaluhren sind, welche auf Verticalflächen beschrieben werden. Siehet die Fläche gegen Mittag, so nennet man die darauf beschriebene Uhr eine Mittagsuhr; hingegen eine Mitternachtsuhr, wenn sie gegen Mitternacht siehet. Endlich heisset es eine declinirende Uhr, wenn die Fläche decliniret.

Erklärung.

7. Die Morgenuhren sind, die auf einer gegen Morgen gerichteten Fläche beschrieben sind. Die Abenduhren aber, welche auf einer Fläche stehen, die gegen Abend siehet.

Erklärung.

8. Die Polaruhren sind die, welche auf einer Fläche beschrieben werden, die gegen Norden dergestalt incliniret, daß sie mit der Horizontalfläche einen Winkel machet, welcher der Polhöhe gleich ist. Wenn die Flächen Winkel mit der Horizontalfläche machen, die weder der Höhe des Aequators noch des Poles gleich sind, so nennet man es inclinirte Uhren; decliniret die Fläche zugleich von Mittage oder Mitternacht, declinirte Uhren.

Auf-

Aufgabe.

2. Eine Aequinoktialuhr zu verfertigen. I. 4.

Auflösung.

1. Beschreibet einen Circul, und theilet ihn in 24 gleiche Theile, so sind die Linien, welche aus dem Mittelpunkte C in die Theilungspunkte in der Peripherie gezogen werden, die Stundenlinien.

2. Schreibet auf die Abendseite die Vormittagsstunden, und auf die Morgenseite die Nachmittagsstunden.

3. Endlich richtet in dem Mittelpunkte C die Zeigerstange perpendicular auf, so nicht allzugroß seyn darf.

So. ist geschehen, was man verlangete.

Beweis.

Weil in Ansehung der Sonnenweite von der Erde ihr halber Diameter nur für einen Punkt zu halten (§. 58. Astron.); so könnet ihr den Mittelpunkt des Circuls C für den Mittelpunkt der Erde, und weil der Circul in der Fläche des Aequators ist, die auf der Mittagslinie C 12 perpendicular erhöhete Zeigerstange für die Weltaxe annehmen (§. 13. 14. Astron.). Da nun die Sonne ihre Tagecircul mit dem Aequator parallel beschreibet, und sich einmal so geschwinde wie das andere beweget, so muß auch der Schatten der Weltaxe auf der Aequinoktialfläche in gleicher Zeit gleiche Theile des Circuls beschreiben. Da nun die Sonne in 24 Stunden herumkommet, so darf die Peripherie des Circuls nur in 24 gleiche Theile getheilet werden, um die Stundenlinien zu haben. Und weil der Schatten der Sonne gegen über geworfen wird (§. 34. Optik), so fallen die Vormittagsstunden gegen Abend, die Nachmittagsstunden gegen Mor-

Morgen. Solchergestalt ist die Aequinoktialuhr richtig beschrieben worden. W. Z. E.

Zusatz.

10. Demnach muß der Punkt 12 auf der Mittagslinie liegen.

Zusatz.

11. Da in unsern Landen die Sonne nicht viel vor 4 Uhr aufgehet, und nicht lange nach 8 Uhr über dem Horizont bleibet, werden die Stunden Vormittags von 4 Uhr an, Nachmittags aber bis 8 Uhr auf die obere Aequinoktialfläche geschrieben: hingegen auf der unteren Fläche an allen Orten die Stunden frühe von 6 Uhr an bis Abends um 6 Uhr.

Anmerkung.

I. 5. 12. Wenn ihr auf den Deckel ADCB des Magnetkästleins CFED oben die obere und unten die untere Aequinoctialuhr beschreibet, und ihm nach der gegebenen Höhe des Aequatoris in einem jeden Orte vermittelst des Quadrantens I. H erhöhet, vermittelst der Magnetnadel aber die Uhr gegen die Gegenden der Welt richtet, so habet ihr eine allgemeine Aequinoctialuhr, die ihr überall gebrauchen könnet.

Aufgabe.

I. 6. 13. **Eine Horizontaluhr zu beschreiben.**

Auflösung.

1. Ziehet die Mittagslinie AB (§. 27. Astron.), oder nehmet sie auf einer beweglichen Fläche nach Belieben an.

2. In dem nach Belieben erwählten Punkte C richtet eine Perpendicularlinie CD von beliebter Länge auf (§. 70. Geom.), und machet den Winkel CAD der gegebenen Polhöhe gleich (§. 48. Geom.).

3. In D machet den Winkel CDE = CAD, und ziehet die Linie DE.

4. Durch

4. Durch E ziehet die Linie GH, welche AB rechtwinkelicht durchschneidet (§. 70. Geom.).

5. Machet EB = ED, und beschreibet den Quadranten EF.

6. Theilet ihn in 6 gleiche Theile, und ziehet aus dem Mittelpunkte B durch die Theilungspunkte bis an die Linie GH die Linie Ba, Bb, Bc &c.

7. Traget aus E gegen G die Theile Ea, Eb, Ec &c.

8. Aus A beschreibet mit beliebiger Eröffnung des Circuls einen kleinen Circul, und ziehet gegen den Mittelpunkt A bis an die Peripherie und die nach Belieben gemachte Einfassung der Uhr durch alle Theilungspunkte der Linie GH gerade Linien, so bekommet ihr die Stundenlinien A 5, A 4, A 3 &c.

9. Ziehet durch A die sechste Stundenlinie 6. 6. auf die zwölfte A 12 perpendicular (§. 70. Geom.).

10. Verlängert A 7 bis 7 über den Circul, und A 8 bis in 8; A 5 bis in 5; A 4 bis in 4, damit ihr die Abendstunden A 7 und A 8, imgleichen die Frühestunden A 4 und A 5 bekommet.

11. In A richtet die Zeigerstange entweder nach der Linie AD oder CD auf, jedoch dergestalt, daß der Triangel ADE in der Fläche des Meridians ist, oder auf der Uhrfläche perpendicular stehet; wie ihr dann auch anstatt der Zeigerstange den Triangel ADE oder ACD von starkem Bleche, doch oben in AD scharf abgeschliffen, nehmen könnet.

Beweis.

Stellet euch vor, als wenn AD die Zeigerstange der Aequinoktialuhr wäre, welche in A die Horizontalfläche erreichet, und GH die Linie, da die Aequinoktialfläche die Horizontalfläche berühret, so ist klar, daß die Eintheilungen für die Standenlinien in der Linie GH II. 7.

gefunden werden, wenn man die Stundenlinien der Aequinoktialuhr bis an GH verlängert. Wenn man nun sich ferner vorstellet, als wenn die Aequinoktialuhr auf die Horizontalfläche dergestalt niedergeleget würde, daß die verlängerte Stundenlinien noch in den vorigen Punkten die Linie GH durchschneiden, so fället DE auf EB, und der eine Quadrant der Aequinoktialuhr auf EFB.

I. 6. Und demnach sind die Stundenlinien in der Horizontaluhr richtig gefunden worden. W. Z. E.

Anmerkung.

14. Der Beweis wird handgreiflich, wenn man eine Aequinoctialuhr bey der Hand hat, und alles im Werke selbst zeiget. Auch ist zugleich klar, daß man vermittelst der Aequinoktialuhr eine Horizontaluhr, darauf die Mittagslinie AB gefunden worden, gar leicht beschreiben kann.

Zusatz.

I. 6. 15. Weil der Winkel EBA 15°, EBb 30, EBc 45, EBd 60, EBH 75°, so ist vermöge der Tafeln über die Tangenten, wenn EB 1000 angenommen wird, EA 267, EB 577, EC 1000, ED 1732, EH 3732, welches zu großen Sonnenuhren dienet.

Aufgabe.

II. 8. 16. Eine Mittagsuhr zu zeichnen.

Auflösung.

Die Beschreibung ist völlig wie vorhin, außer daß die Winkel CAD und CDE der Höhe des Aequators gleich gemachet werden.

Beweis.

Der Beweis wird wie der vorige eingerichtet.

Aufgabe.

II. 9. 17. Eine Mitternachtsuhr zu zeichnen.

Auflö-

Auflösung.

1. Ziehet die Mittagslinie EA auf eine Fläche, die gegen Mitternacht siehet (§. 30. Astron.), und beschreibet aus A nach Belieben einen kleinen Circul. II. 9.

2. Machet die Winkel DAC und EDC des Aequators Höhe gleich, und über dieses EB = ED.

3. Ziehet durch E die Linie GH auf EA perpendicular, und theilet den aus B durch F beschriebenen Quadranten EF in 6 gleiche Theile.

4. Durch die zwey letzten Theilungspunkte ziehet aus A die Linien Ad und AH, welche die siebente und 8. Stundenlinie nach Mittag geben.

5. Machet Eh = Ed und EG = EH; so bekommet ihr auch die vierte und fünfte Stundenlinie vor Mittage.

6. Ziehet durch A die Linie 6. 6 auf AE perpendicular; so habet ihr die sechste Stundenlinie vor- und nach Mittage.

7. Richtet die Zeigerstange nach der Linie AD oder CD über die Mittagslinie AE auf, oder nehmet dafür den Triangel EDA.

Beweis.

Der Beweis wird wie bey der Horizontaluhr eingerichtet, und stellet man sich hier vor, als wenn die Aequinoctialuhr nach dem Winkel DEA, welcher der Höhe des Pols gleich ist, angeleget, die Zeigerstange aber DA durch den Mittelpunkt der Aequinoktialuhr bis in A gestossen würde.

17a) Die Linie EA bedeutet hier auf der Mitternachtsuhr den Durchschnitt einer über der Mittagslinie errichteten Mittagsfläche, mit derjenigen Fläche, worauf in gegenwärtiger Aufgabe die Uhr construiret werden soll. Um diese EA zu erhalten, so braucht man nur die auf der Horizontalfläche gezogene Mittagslinie, bis an die Fläche, worauf man die

Uhr

Uhr zeichnen will, zu verlängern, und in dem Punkte, wo jene Mittagslinie in die Fläche einschneidet, eine lothrechte Linie zu errichten, so hat man die gesuchte EA. Noch besser: Man errichtet in A einen Stift senkrecht auf die Wand, und ziehet in den Augenblicken, da eine gehörig gestellte Aequinoctialuhr Morgens 5 Uhr und Abends 7 Uhr weiset, auf der Wand aus A die Richtungen, nach denen der Schatten des von der Sonne beschienenen Stiftes fällt, so liegt die Mittagslinie EA, von der Wolf redet, in der Mitte zwischen jenen beyden Schattenlinien, die gleichen Stunden Vor- und Nachmittags zugehören.

Aufgabe.

III. 10. **18. Eine Morgenuhr zu beschreiben.**

Auflösung.

1. Auf der Seite der Mittagsfläche die gegen Morgen stehet, ziehet eine gerade Linie AB mit dem Horizonte parallel, und eine andere AK, die mit AB einen Winkel KAB machet, so der Höhe des Aequators gleich ist.

2. Aus einem nach Belieben angenommenen Punkte D beschreibet mit beliebiger Weite DE einen Circul, und ziehet durch D auf KA die Linie EC perpendicular.

3. Theilet einen jeden Quadranten in 6 gleiche Theile, und ziehet aus dem Mittelpunkte D durch die Theilungspunkte bis an EG und CI Linien; so bekommet ihr die Stundenlinien, wie die Figur weiset.

4 Richtet in D eine Zeigerstange perpendicular auf, die der Linie DE gleich ist, oder eine andere in der Höhe dieser Linie mit EC parallel.

Beweis.

Wenn man sich vorstellet, als wenn die Aequinoctialuhr auf die Linie FG perpendicular dergestalt aufgerich-

richtet würde, daß FG von der sechsten Stundenlinie in E berühret wird, und also der Zeiger mit EC parallel ist, so lässet sich der Beweis wie bey der Horizontaluhr (§. 13.) einrichten.

Aufgabe.

19. Eine Abenduhr zu beschreiben. III.

Auflösung. II.

Die Abenduhr wird wie die Morgenuhr auf der Abendseite des Meridians gezeichnet: nur werden die Stunden anders geschrieben, wie die Figur zeiget.

Aufgabe.

20. Ein Polaruhr zu beschreiben. III.

Auflösung. 12.

1. Ziehet die Linie AB mit dem Horizonte parallel, und suchet die Mittagslinie CE (§. 30. Astron.).
2. Theilet dieselbe in zwey gleiche Theile in D, und beschreibet aus D mit der Hälfte DE einen Quadranten.
3. Theilet ihn in 6 gleiche Theile, und ziehet aus D durch alle Theilungspunkte gerade Linien, welche AB in 1. 2. 3. 4. 5. durchschneiden.
4. Traget die Theile E 1, E 2, E 3 &c. aus E in 11, in 10, in 9 ꝛc. und ziehet beyderseits aus den Theilungspunkten mit der Mittagslinie CE Parallellinien, so habet ihr die Stundenlinien.
5. Endlich richtet die Zeigerstange in der Höhe DE über der Mittagslinie CE perpendicular auf, so ist die obere Polaruhr fertig.
6. Wenn ihr alle Stunden bis auf 4 und 5, imgleichen 8 und 7 wegstreichet, so habet ihr die untere Polaruhr.

Beweis.

Beweis.

Bey dem Beweise ist eben das zu merken, was bey der Morgenuhr (§. 18.) erinnert worden.

Anmerkung.

21. Ueberall können die Eintheilungen der Linie AB für grosse Uhren, wie oben (§. 15.), gefunden werden.

Aufgabe.

III. 22. Eine Uhr zu beschreiben, die von Mit-
13. tage gegen Morgen oder gegen Abend abweichet.

Auflösung.

1. Beschreibet eine Horizontaluhr AGH (§. 13.), und GH sey die Linie, in welcher die Aequinoktialfläche die Horizontalfläche durchschneidet.
2. Durch E, wo die Mittagslinie AE die Linie GH schneidet, ziehet eine Linie IK, welche mit GH einen so großen Winkel machet, als die Abweichung der gegebenen Fläche ist, so geben sich die Eintheilungen für die Stundenlinien auf der Linie IK.
3. Ziehet auf der gegebenen Fläche eine Linie IK mit dem Horizonte parallel, und traget die gefundenen Theile E 1, E 2, E 3 &c. darauf.
4. In E richtet den Perpendicul EC in der Länge auf, als die Weite des Mittelpunkts in der Mittagsuhr von der Horizontalfläche (§. 16.) beträget, so habet ihr den Mittelpunkt, daraus die Stundenlinien CE, C 1, C 2, C 3 &c. gezogen werden.
5. Lasset auf dem Papiere aus A auf IK das Perpendicul AD fallen, und traget die Weite ED auf die Mauer, darüber die Uhr beschrieben wird, so ist DC die Linie, darüber der Zeiger kommt.
6. Setzet endlich AD und DC rechtwinklicht zusammen, so ist AC die Zeigerstange, welche unter dem

dem Winkel DCA in C an der Mauer befestiget wird.

Aufgabe.

23. **Eine Uhr zu zeichnen, die von Mitternacht gegen Morgen oder Abend abweichet.**

Auflösung.

Weil die Mitternachtsuhren in der That nichts anders sind als verkehrte Mittagsuhren (§. 16.) so beschreibet eine Uhr, die von Mittag abweichet, und wendet sie dergestalt um, daß ihr Mittelpunkt C gegen den Horizont, und der Punkt E gegen das Zenith gekehret wird. Ueber dieses müssen die Stunden, wie in der Mitternachtsuhr, gehörig (§. 17.) eingeschrieben werden.

Anmerkung.

24. Man darf nur die nöthigen Punkte in der Mittagsuhr auf dem Papiere mit einer Nadel durchstechen, so ist auf der umgekehrten Seite die Mitternachtsuhr zu sehen.

Aufgabe.

25. **Eine Uhr zu zeichnen, die von dem Zenith gegen Morgen oder Abend abweichet.** I. 14.

Auflösung.

Es sey HR der Horizont, PR die Polhöhe, Z das Zenith und N das Nadir, so ist klar, daß unsere Horizontalfläche in einem Orte, der von uns 90 Gr. weg lieget, die Verticalfläche sey, und demnach die Polhöhe an demselben Orte das Complement unserer zu 90 Gr. PZ. Derowegen darf man nur eine abweichende Mittagsuhr auf das Complement der Polhöhe (§. 22.) verzeichnen, so ist selbige die bey uns von dem Zenith abweichende Uhr.

Gleichergestalt erhellet hieraus, daß man vermittelst der Mittagsuhr unseres Ortes, als welche die Horizontaluhr unter dem Complement unserer Polhöhe ist,

die

die von dem Zenith abweichende Uhr zeichnen kann, wie man die vom Mittage abweichende vermittelst der Horizontaluhr verzeichnet (§. 22.)

Aufgabe.

II. 15. **26. Auf einer schiefliegenden Fläche eine Uhr zu beschreiben.**

Auflösung.

1. Wenn die schiefliegende Fläche DC zwischen die Aequinoktialfläche CE und die Verticalfläche CB fället, so daß der Winkel DCA gröfer ist, als die Höhe des Aequators ECA, so beschreibet oben eine Mitternachtsuhr, unten aber eine Mittagsuhr auf die Höhe des Aequators, welche der Summe aus gedachter Höhe und dem Complement des Abweichungswinkels vom Horizonte zu einem Quadranten gleich ist.

Beweis.

Es sey CG auf CD perpendicular, so ist DC die Mittagsfläche unter der Höhe des Aequators ECG. Da nun BCA = DCG = 90 Gr. (§. 37. Geom.); so ist ACG = DCB (§. 25. Arithm.), das ist, dem Complement des Abweichungswinkels zu einem Quadranten, und demnach ECG = ECA + DCB. W. Z. E.

II. 15. II. Wenn die schiefliegende Fläche FC zwischen die Aequinoctial-Fläche CE und Horizontalfläche CA fället, so daß der Winkel FCA kleiner, als die Höhe des Aequators, so beschreibet oben eine Horizontaluhr auf die Polhöhe, welche der Summe aus der Polhöhe eures Ortes und dem Abweichungswinkel FCA gleich ist.

Beweis.

Weil bey F ein rechter Winkel, und ECF die Höhe des Aequators über der Fläche CF ist, so ist EFC die

die Polhöhe auf derselben Fläche (§. 62. Astron.) Da nun gleichergestalt FAC die Polhöhe eures Ortes ist, so ist klar, daß die Polhöhe der Uhr EFC der Polhöhe eures Ortes FAC und dem Abweichungswinkel vom Horizonte FCA gleich sey. W. Z. E.

III. Wenn HC zwischen die Verticalfläche BC und die Polarfläche IC fället, so daß der Winkel HCL grösser ist, als die Polhöhe ICL, so beschreibet oben eine Mittagsuhr, unten aber eine Mitternachtsuhr auf die Höhe des Aequators, welche dem Unterschiede zwischen der Höhe des Aequators in eurem Orte und der Abweichung vom Zenith HCB gleich ist. II. 15.

Beweis.

Wenn HC für die Verticalfläche angenommen wird, so ist HCI der Höhe des Aequators gleich (§. 62. Astron.). Es ist aber ICB der Höhe des Aequators in eurem Orte gleich (§. cit.). Derowegen ist die Höhe des Aequators für die Uhr ICH der Unterschied zwischen der Höhe des Aequators in eurem Orte ICB und der Abweichung von dem Zenith HCB. W. Z. E. II. 15.

IV. Wenn KC zwischen die Horizontalfläche CL und die Polarfläche CI fället, daß der Winkel KCL kleiner ist, als die Polhöhe ICL, so beschreibet eine Horizontaluhr für die Polhöhe, welche dem Unterschiede zwischen der Höhe des Aequators in eurem Orte und der Abweichung vom Zenith KCB gleich ist.

Beweis.

Wenn KC für eine Horizontalfläche angenommen wird, so ist ICK die Polhöhe. Da nun ICB die Höhe des Aequators in dem gegebenen Orte ist (§. 62. Astron.), so ist klar, daß die Polhöhe auf der Uhr dem Unterschiede der Höhe des Aequators in eurem Orte ICB und der

Abweichung der Fläche von dem Zenith KCB gleich sey. W. Z. E.

26a) I. Die bisher beschriebenen Verfahren, wird man in der Ausübung, meistens nicht so leicht finden, als sie auf dem Papiere erscheinen. Am bequemsten kann man um die Zeit des längsten Tages herum, durch Hülfe einer guten Aequinoktialuhr, auf jeder vorgegebenen Fläche, durch folgendes **mechanisches** Verfahren, eine Uhr verzeichnen.

16. GI (Fig. 16.) Gnom.) sey eine beliebige Fläche worauf die Uhr gezeichnet werden soll, und PQ eine Horizontalfläche, z. E. ein horizontalgestelltes Bret, worauf eine Mittagslinie AE gezogen worden sey (§. 27. Astron.) Aus einem Punkte e dieser Mittagslinie errichte man auf die Horizontalfläche ein Perpendikel ef, oder eine lothrechte Linie, nehme von dem Punkte e nach Süden zu, auf der gezogenen Mittagslinie, eA von beliebiger Länge, je grösser je besser, und schließe hierauf nach der Trigonometrie

Sin. tot. : tang. Polhöhe = eA : ef

so findet man ef, und wenn man diese aufgetragen hat, so wird eine durch A und f gezogene gerade Linie mit der Horizontalfläche einen Winkel fAe machen, welcher der Polhöhe gleich seyn wird. Man kann auch

eA : ef = col. Polhöhe : Sin. Polhöhe nehmen, welches in dem Falle anzurathen ist, wenn die Tangente zu groß würde.

II. Es wird nicht schwer halten, in dieser Richtung Af selbst, einen Zeiger DA oder HD an die Wand GI zu befestigen, oder wenn dies nicht bequem angehet, doch durch einen beliebigen Punkt der Wand, eine Parallele mit fA zu ziehen, und den Zeiger anzubringen. Dieser wird nun mit der Weltaxe, oder dem Zeiger einer richtig nach der Mittagslinie und Polhöhe gestellten Aequinoktialuhr parallel seyn, und dies ist das Wesentliche einer jeden Sonnenuhr. **Jeder Weiser einer Sonnenuhr, der durch seinen Schatten die Stunden des Tages anzeigen soll, muß der Weltaxe parallel seyn.**

III. Ist diese Bedingung, auf welche Art man will, erfüllt, so kann jede Stundenlinie der auf die Fläche GI zu zeich-

zeichnenden Uhr durch Hülfe einer richtig gestellten Aequinoctialuhr bestimmt werden. Man ziehe nemlich in dem Augenblicke, da der Zeiger einer Aequinoctialuhr eine gewisse Stunde weiset, auf der Wand GI die Lage des Schattens, den der Weiser DA, oder DH darauf wirft, so hat man auch auf GI die entsprechende Stundenlinie und so jede andere. Wählt man zu dieser Arbeit, die Zeit um den längsten Tag herum, so kann man auf diese Art, auch die frühesten und spätesten Stuudenlinien erhalten, die auf der Fläche GI nach Maasgabe ihrer Lage noch angezeigt werden können.

IV. Wenn einmahl der Zeiger DA seine richtige Lage hat, so können die Stundenlinien auf GI begreiflich auch vermittelst einer andern Sonnenuhr die richtig gezeichnet und gestellt worden ist, bestimmt werden. Die Aequinoctialuhr ist aber die bequemste zu Verzeichnung anderer Uhren, weil sie selbst so leicht entworfen werden kann.

V. Das bisher beschriebene mechanische Verfahren eine Sonnenuhr auf jeder Fläche zu verzeichnen, ist freylich nur für diejenigen, welche nicht Zeit oder Lust haben, sich vollständig mit der Theorie der Gnomonik zu beschäftigen, aber für die Ausübung ist es in den meisten Fällen vollkommen hinlänglich. Wenn man auch aus Mangel an Sonnenschein an einem gewissen Tage nicht alle Stundenlinien zeichnen kann, so lassen sich die noch fehlende doch an andern Tagen ergänzen. Denn, wenn der Weiser mit der Weltaxe parallel ist, so muß sein Schatten zu einerley Stunde eines jeden Tages, auch immer auf dieselbe Linie hinfallen, und man kann also diese oder jene Stundenlinien bestimmen, wenn die bequemste Zeit und Witterung dazu ist.

VI. Wenn man auf dem horizontal an die Wand befestigten Brete PQ die Mittagslinie AE gezogen, und über ihr unter dem gehörigen Winkel EAD die Weltaxe oder den Zeiger befestigt hat, so ist es nicht gerade nöthig, daß der Zeiger DA, bis D an die Wand selbst hingehe, und daselbst festgesteckt werde. Ja es könnte sich ereignen, daß der Weiser beynahe mit der Wand GI parallel ausfiele, und also der Punkt D so weit weg zu liegen käme, daß man den Zeiger weder in D befestigen, noch auch von D selbst aus, die Schattenlinien D 10, D 11 u. s. w. für die einzeln Stunden ziehen könnte. In diesem Falle läßt man nur ein Stück des Weisers z. E. np stehen, und zieht die Schattenlinien β 10;

α II u. s. w. nur so lang, als nöthig ist, um sie einem entfernten Auge deutlich in Absicht auf ihre Lagen darzustellen. Zum Weiser selbst nimmt man am bequemsten ein Stück Blech mnqp von schicklicher Grösse, und befestigt es so an die Wand, daß die Schärfe desselben np, welche durch ihren Schatten auf der Wand GI, die Stundenlinien abschneidet, in die gehörige Richtung AD der Weltaxe zu liegen komme.

Ende der Gnomonik.

Anfangs-Gründe der Artillerie.

Erklärung.

1.

Die Artillerie oder Geschützkunst ist eine Wissenschaft des Geschützes, welches man in Belagerung der Vestungen zu gebrauchen pfleget.

1a) Einige der vorzüglichsten hieher gehörigen Bücher sind Casimiri Simienovicz ars magna Artilleriae ins Deutsche übersetzt von **Thom. Leonh. Beeren**, und mit einem zweyten Theile versehen von **Daniel Elrich**, Frankf. a. M. 1676.

Joh. Sigm. Büchners Theoria et praxis artilleriae. 3 Theile Nürnberg 1682 — 1685.

Mich. Mieths Geschützbeschreibung, Dresden und Leipz. 1705.

La Forge de Vulcain ou l'appareil des machines de guerre par le Chev. de St. Iulien. Haag 1606.

Memoires d' artillerie recueilles p. M. Surirey de St. Remy. Paris 1745.

L' artillerie raisonnée &c. par Mr. le Blond. Paris 1761.

L' art de jetter des Bombes p. Mr. Blondel. Paris 1683.

Le bombardier françois par Mr. Belidor. Amsterdam 1734.

Neue Grundsätze der Artillerie, aus dem Englischen des Hrn. Benj. Robies, mit vielen Anmerkungen von Leonh. Euler. Berl. 1745.

Essai d'une Theorie d' artillerie p. le Chev. d' Arcy Dresden 1766. mit Anmerkungen, deutsch von Joh. Heinr. Lambert. Das. 1766.

Anfangsgründe der Artillerie von Carl Aug. Struensee. Leipz. 1769. ohnstreitig das beste und vollständigste, was wir jetzt in der Artillerie haben.

Tempelhoff bombardier Prussien Berl. 1781. V. Messenbachs Erläuterungen darüber. Halle 1785.

Anmerkung.

2. Die Artillerie hat noch viele andere Namen. Einige nennen sie die Feuerwerkerkunst, andere die Zeugmeisterey-kunst; noch andere die Büchsenmeistereykunst. Im Lateinischen heisset sie Pyrobologia und Pyrotechnia. Das Wort Artillerie brauchet man auch von dem Geschütze selbst, welches in Belagerungen erfordert wird.

Anmerkung.

3. Das Pulver ist die Hauptsache in der ganzen Artillerie, welches zu der Erfindung alles Geschützes Anlaß gegeben hat.

Aufgabe.

4. Pulver zu machen.

Auflösung.

1. Nehmet geläuterten und in Mehl gebrochenen Salpeter, zerriebenen Schwefel und klein zerstossene Kohlen in solcher Proportion, wie hernach folget.

2. Schüttet diese drey Materien zusammen in einen Mörser, feuchtet sie an mit Wasser, und stampfet sie 24 bis 30 Stunden; vergesset aber nicht, sie alle 4 Stunden von neuem anzufeuchten, damit sie sich nicht entzünden.

3. Nachdem sie wohl unter einander gemischet, nehmet das Pulver heraus und körnet es: welches geschiehet, wenn ihr es mit einem hölzernen Teller durch ein Härensieb drucket.

4a) Die Verfertigung des Pulvers im Großen, geschieht in besonders dazu eingerichteten **Pulvermühlen**, wovon man Beschreibungen und Abbildungen in Belidors architect. hydraul. findet.

Anmerkung.

5. Wenn ein Funken in das Pulver fället, wird ein Theilchen Kohle glühend, und weil alle Materien wohl unter einander gemischet sind, schmelzet das anliegende Theilchen des Schwefels, imgleichen das anliegende Theilchen des Salpeters, und alsdann steiget die angezündete Materie in einer hellen, rasselnden und sich ausbreitenden Flamme in die Höhe, und machet zugleich das anliegende Kohlentheilchen glühend. Derowegen, wenn ein Körnlein angezündet wird, stecket es gleich die übrigen an, und gehet behende in einer sich ausbreitenden Flamme mit einem Geräusche auf.

5a) Die neuern Kenntnisse von den Luft- oder Gasarten haben in Absicht auf die fürchterliche Gewalt des Schießpulvers sehr vieles aufgeklärt. Diesen zufolge ist es gewiß, daß alle Erscheinungen des angezündeten Pulvers ein Erfolg der plötzlichen Entwickelung einer großen Menge von Wärmestoff, Dämpfen und Gasarten sind, welche durch ihre ausdehnende Kraft, zumahl in einem eingeschlossenen Raume, jene Würkung hervorbringen. Die vollständige Erklärung hievon setzt aber zu viel chemische Kenntnisse hier voraus, und muß in Büchern nachgesehen werden, welche sich mit diesem Gegenstande, in so fern er chemisch ist, beschäftigen. Z. E. **Grens** Handbuch der Chemie §. 738 ꝛc. der neuern Ausgabe 1794. Uebrigens ist es wohl gewiß, daß beym Abbrennen des Schießpulvers in Geschützen, nicht die ganze Ladung plötzlich entzündet wird, daß nur ein Theil davon seine Würkung äussert, und der andere Theil noch brennt, wenn der Widerstand schon gehoben ist. Wenn daher die Länge des Geschützes nicht der **Pulverladung** angemessen ist, so daß z. E. noch vieles Pulver nachbrennt, wenn die Kugel vielleicht schon aus der Mündung heraus ist, so kann es nicht seine ganze Wirkung auf die Kugel verwenden. Durch die Theorie hat man die vortheilhafteste Ladung nach der Länge des Geschützes zwar zu bestimmen gesucht, man nimmt aber selten in der Ausübung so viel Pulver, als die Theorie vorschreibt.

Anmerkung.

6. Simienowicz part. I. c. 14. fol. 61. recommandiret zu großem Geschütze auf 100 Pf. Salpeter 20 Pf. Schwefel und 24 Pf. Kohlen: für Musketen auf 100 Pf. Salpeter, 18 Pf. Schwefel und 20 Pf. Kohlen; für Pistolen auf 100 Pf. Salpeter, 12 Pf. Schwefel und 15 Pf. Kohlen. **Büchner** part. 3. f. 44. 45. setzet überhaupt die Proportion des Schwefels zu dem Salpeter wie 1 zu 7, der Kohlen aber zu dem Salpeter wie 5 zu 28. **Mieth** part. 2. c. 40. f. 55. rühmet sich durch vielfältige Proben gefunden zu haben, daß das Pulver am stärkesten werde, wenn man auf ein Pf. Salpeter 6 Loth Kohlen und zum höchsten bis $4\frac{1}{2}$ Loth Schwefel giebet und diese Materie 20 Stunden lang mit schlechtem Wasser arbeitet. Er zeiget aber in folgenden Capiteln deutlich, daß man mit großem Schaden und keiner Ersparung der Kosten das Stückpulver insgemein schwächer machet als das andere.

6a) In den meisten Pulvermühlen in Frankreich, werden auf $76\frac{1}{2}$ Pf. Salpeter gerechnet $12\frac{1}{2}$ Pf. Schwefel und $12\frac{1}{2}$ Pf. Kohlen. Andere Verhältnisse s. m. in Grens Chemie, (§. 725.) Pulversätze zu **Brandröhren, Raketen, Feuerkugeln, Leuchtkugeln, Schwärmern**, und andern zur Lustfeuerwerkerey gehörigen Dingen findet man in **Struensees** Artillerie, in **Maquers** chemischen Wörterbuche IV. Thl. S. 677. der **Leonhardischen** Uebers. und andern Schriftstellern.

Anmerkung.

7. Das gekörnte Pulver hat mehr Stärke, als das zerriebene, imgleichen das kleinkörnichte ist stärker, und entzündet sich schneller, als das großkörnichte.

Anmerkung.

8. Zur Lust pfleget man ein knallendes Pulver folgendergestalt zu machen. Nehmet 3 Theile Salpeter, 2 Theile Salis Tartari, und einen Theil Schwefel. Zerstosset es klein zu Pulver, und mischet es wohl unter einander. Wenn ihr ein wenig davon in einen Löffel thut, und über das Licht oder glühende Kohlen haltet, wird es einen sehr großen Knall geben, so bald es schmelzet.

Aufgabe.

9. **Das Pulver zu probiren, ob es gut sey oder nicht.**

Auflö-

Auflösung.

1. Leget ein Häuflein Pulver auf ein weisses Papier.
2. Zündet es mit einer glühenden Kohle an.

Wenn es sich bald anzündet, der Rauch fein gerade aufsteiget, auf dem Papiere nichts zurücke bleibet, auch dasselbe nicht verbrannt wird, so ist das Pulver gut.

9a) Man hat auch sogenannte **Pulverproben**, Werkzeuge vermittelst deren man die Gewalt des entzündeten Pulvers dadurch bestimmt, daß man angiebt, wie hoch eine gewisse Menge desselben eine gegebene Last, oder sonst einen Widerstand z. E. eine gespannte Feder u. d. g. hebt. Sie sind aber von keinem großen Nutzen. Zuverlässiger beurtheilt man die Güte des Pulvers nach der Weite auf welche eine bestimmte Menge desselben eine Kugel aus einem gegebenen Mörser unter einem gegebenen Winkel treiben kann. (Struensee §. 39.). Die ausdehnende Kraft des Pulvers theoretisch zu bestimmen, hat sehr große Schwürigkeiten.

Erklärung.

10. Die Stücke sind Geschütze, daraus man große eiserne, bleyerne und steinerne Kugeln in die Weite durch die Gewalt des Pulvers treiben kann, und zwar nach einem Orte, der mit dem Geschütze ohngefähr in einer Horizontallinie lieget. 1.

Erklärung.

11. Der Unterschied der Stücke oder Kanonen entstehet hauptsächlich aus ihrer Länge und aus der Schwere der Kugeln, die sie schiessen, und bekommen daher unterschiedene Namen. Die kurzen werden Carthaunen, die langen Schlangen genennet. Der Unterschied von beyden Arten bey den Deutschen ist aus beygefügter Tafel zu ersehen.

A	B	C	D	E	F	G	H
Ganze Car: thaun.	Cal. 18	P. 48	Pf. 54	Centner 90	4	12–16	24
Drey Viert: tel Carth.	20	36	40	78	4	10–14	20
Halbe Car thaun.	22	24	27	50–60	3	10–12	16
Viert. Car: thaune	24	12	14	28–36	2	6 – 8	8–10
Achtel Car: thaun.	27	6	7	19–20	1	3 – 4	6
Regiments od. Viertel: Feldstücke.	14. 16 bis 18	3–4	4 – 5	6 – 9	1	2 – 4	4 – 6
Ganze Feldschl.	30	18	21	50	3	9 – 10	14
Halb. Feld: schlange	36	9	10	30	2	6	8–10
Viert. oder Quartier: Feldschl.	34	4–5	6 – 7	25	1	4	5 – 6
Falkaune	27	6.	7	25	1	4	6
Falkonet	35–36	2–3	$2\frac{1}{2}$ – $3\frac{1}{2}$	10–12	1	2	3 – 4
Halbes Falkonet	38	1	$\frac{17}{18}$	6 – 7	1	1	2
Serpentis nel	40	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{18}$	$4\frac{1}{2}$	1	1	2

11a) Die ganzen und Dreyviertel Carthaunen sind jetzt abgeschafft.

Anmerkung.

12. Unter A sind die Namen der Stücke, unter B ist die Länge des Rohrs, unter C die Schwere der Kugel von Eisen, so daraus geschossen wird, unter D die Schwere der eisernen Kugel, nach deren Diameter es gebohret wird, unter E die Schwere des ganzen Stückes nach Nürnbergischen Centnern von 100 Pfunden, unter F die Zahl der Constabler und unter G die

E die Zahl der Handlanger, so dazu nöthig sind, endlich unter
H die Zahl der Pferde, damit man sie wegführet.

Zusatz.

13. Damit die Stücke der großen Gewalt des Pulvers widerstehen können, werden sie aus Metall, zuweilen aus Eisen gegossen.

13 a) Die äussere Figur der Kanonen ist im ganzen kegelförmig, weil das Metall vorne nicht so dick, als hinten, wo die Würkung des Pulvers ganz beysammen ist, zu seyn braucht. Das Gießen und Ausbohren der Kanonen kann man im allgemeinen aus Struensees Artillerie ersehen.

Anmerkung.

14. Das Metall ist eine Mixtur aus Kupfer, Zinn und Messing. Die Proportion wird verschieden angegeben. Einige rechnen auf 100 Pfund Kupfer an Zinn 10, an Messing 8 Pfund.

Erklärung.

15. **Der Diameter der Mündung des Stückes AB, oder eines Geschützes, imgleichen einer Kugel die daraus geschossen wird, heisset der Caliber.** 1.

Erklärung.

16. Der Caliberstand ist ein Maaßstab, darauf die Grösse der Diameter von den steinernen, eisernen und bleyernen Kugeln, wie sie mit ihrem Gewichte zunehmen, verzeichnet ist. Z. E. es stehet darauf die Länge des Diameters einer pfündigen, zweypfündigen, dreypfündigen Kugel, u. s. w.

Erklärung.

17. Der Spielraum oder Windraum ist der Unterschied zwischen der Mündung des Stückes und dem größten Circul der Kugel, oder zwischen dem Caliber des Stückes und dem Diameter der Kugel.

Auf-

Aufgabe.

18. Den Diameter einer pfündigen Kugel zu finden.

Auflösung.

1. Wieget ein Pfund Eisen, Bley und Stein auf einer richtigen Wage ab, und suchet den körperlichen Inhalt in Cubiklinien (§. 217. Geom.).

2. Sehet ihn als den Inhalt einer Kugel an, und suchet daraus ihren Diameter (§. 204. Geom. und 85. Arithm.).

Aufgabe.

19. Einen Caliberstab zu verfertigen.

Auflösung.

1. Bildet euch ein, es sey der Diameter einer pfündigen Kugel in 100 gleiche Theile getheilet; so ist der Cubus 1000000.

2. Dupliret denselben, und ziehet aus 2000000 die Cubikwurzel heraus (§. 79. Arithm.). Dieser ist der Diameter einer zweypfündigen Kugel in eben solchen Theilchen.

3. Wenn ihr den Cubum 1000000 mit 3 multiplicirt, und aus dem Produkte abermals die Cubikwurzel ausziehet, so kommet der Diameter einer dreypfündigen Kugel heraus.

4. Auf eben solche Weise könnet ihr den Diameter von einer vier- fünf- sechspfündigen Kugel u. s. w. finden.

5. Nehmet den Diameter einer pfündigen Kugel von Bley (§. 18.), und theilet ihn in 100 gleiche Theile, wie in der Geometrie die Ruthe auf dem verjüngten Maaßstabe (§. 163. Geom.).

6. Traget von diesem Maaßstabe auf den Callberstab die gehörigen Hunderttheilchen, nach Anleitung der aus-

ausgerechneten Tafel für die ein- zwey- drey- vier- pfündigen Kugeln u. s. w.
So ist der Caliberstab fertig. W. Z. T.

Beweis.

Man soll erweisen, daß, wenn der Diameter einer einpfündigen Kugel 100 Theile hat, die vielpfündigen so viel derselben haben müssen, als durch die angegebene Rechnung gefunden wird.

Wenn nun die Kugeln von einerley Materie sind, so verhalten sich ihre Schweren, wie ihre Grössen, das ist, eine bleyerne Kugel von zwey Pf. ist zweymal so groß, als eine von 1 Pf., eine von 3 dreymal, eine von 4 viermal so groß, als eine von 1 Pf. u. s. w. die Grössen aber der Kugeln verhalten sich wie die Cubi ihrer Diameter (§. 212. Geom.) Derowegen ist der Cubus des Diameters einer zweypfündigen Kugel zweymal, einer dreypfündigen dreymal, einer vierpfündigen viermal so groß, als einer einpfündigen, u. s. w. Wenn man solchergestalt den Cubum des Diameters einer einpfündigen Kugel mit 2. 3. 4. u. s. w. multipliciret und aus den Produkten die Cubikwurzel ausziehet, so kommen die Diameter der zwey- drey- vierpfündigen Kugeln u. s. w. heraus. W. Z. E.

Erklärung.

20. Das Stück wird in drey Theile eingetheilet, nemlich in das Bodenstück MK, das Zapfenstück KG, darinnen die Zapfen P sind, damit es auf den Laffetten aufliegt, und das Mundstück GA. Die innere Höhle heisset die Seele oder der Lauf. 1.

Anmerkung.

21. Das Bodenstück ist dicker als das Zapfenstück, und dieses dicker als das Mundstück, weil die Kraft des Pulvers immer mehr und mehr abnimmt, je weiter es sich ausdehnet und die Kugel treibet.

Erklä-

Erklärung.

I. 22. Die Delphine I sind die Handhaben, damit das Stück gehoben wird.

Erklärung.

I. 23. Die Laffetten sind das Gerüste LN, darauf das Stück lieget.

23 a) Man unterscheidet **Feld- Wall-** und **Schifflaffetten.** Feldlaffetten haben höhere Räder und längere Wände als die Walllaffetten. Die Schifflaffetten deren man sich in Festungen an engen Plätzen bedient, haben sehr kurze, stuffenweis abgesetzte Wände, und vier Räder. Die Kanonen fortzuschaffen, dienen die sogenannten **Prozwagen,** die wie das Vordergestelle eines Wagens beschaffen sind.

Erklärung.

2. 24. Die Ladeschauffel ist das **Instrument,** damit die Ladung, das ist, das zum Schiessen nöthige Pulver, bis auf den Boden der Seele in das Stück gebracht wird.

24 a) Das Pulver wird gegenwärtig nicht mehr mit der Ladeschaufel in die Kanone geladen, sondern vortheilhafter in eine **Patrone** gethan, vor welche alsdann nach der Mündung des Stücks zu die Kugel zu liegen kömmt. In der Gegend des Zündlochs durchsticht man die Patrone mit der sogenannten **Raumnadel,** welche auch zur Reinigung des Zündlochs dient, und wie dieses eine conische Gestalt hat.

I

Anmerkung.

25. Die Ladung ist insgemein in Carthaunen das halbe Gewichte der Kugel. Nemlich in einer Carthaune, die 48 Pfund schiesset, ist die Ladung 24 Pfund Pulver. In Schlangen hingegen ist sie $\frac{2}{10}$. Einige nehmen anstatt des grobkörnichten Stückpulvers Musketenpulver, und machen die Ladung nur halb so groß wie sonst.

25 a) **Belidor** hat gefunden, daß die stärkste Ladung ohngefähr ein Drittel der Kugelschwere seyn muß.

Anmer-

Anmerkung.

26. Wie viel ein Schuß kostet, und wie viel Schüsse man des Tages aus jedem Stücke thun kann, ist aus folgendem Täfelein zu ersehen. Nemlich man rechnet einen Centner gemein Pulver auf 14, und einen Centner gegossenes Eisen auf 4 Thaler.

	Thlr.	
Ganze Carthaune	6	50 bis 60
Halbe Carthaune	3	80
Viertel Carthaune	1 1/2	100
Regimentstück	1 1/2	100
Viertel-Feldstück	1/2	100
Ganze Schlange	3	80
Halbe Schlange	1 1/2	90
Viertel Schlange	3/4	100
Falkonet	1/2	100
Halbes Falkonet	1/4	so viel man will
Serpentinel	1/8	so viel man will

26 a) Begreiflich ändern sich diese Preise nach Verschiedenheit der Zeiten und Länder. Wolfs Angaben dienen nur, ohngefähr einen Begriff davon zu geben. Vollständigere Nachrichten hierüber findet man in dem Anhange zur Struenseeischen Artillerre.

Erklärung.

27. Der Setzkolben, Setzer oder Stampfer, ist das Instrument, damit die Ladung auf einander gestossen wird. 3.

Anmerkung.

28. Es wird in der Gestalt eines Cylinders zubereitet, aus starkem Holze, und ist sein Diameter AB 1 Caliber, die Länge AD 1 1/2, auch wohl 2. Auch wird er hinten und vorne mit Kupfer überkappet, und eine Stange EC daran geschiftet. 3.

Erklärung.

29. Der Wischkolben oder Wischer ist das Instrument, damit das Stück ausgewischet wird, nachdem es losgezündet worden. 4.

Anmer-

Anmerkung.

4. 30. Der Kolben AB wird von Lindenholz gedrehet, in Gestalt eines Cylinders, 2 Caliber lang, $\frac{3}{4}$ breit im Diameter, und mit Schaaffellen überzogen, bis er sich genau in die Seele des Stückes schicket. Es werden aber die Felle mit kupfernen Nägeln angenagelt, daß dadurch dem Stücke im Abwischen kein Schaden geschiehet, und die Stange BC wird, wie in dem Setzkolben und der Ladeschaufel, eingeschiftet.

Erklärung.

31. Anstatt der Kugeln ladet man zuweilen Kartetschen in die Stücke, die aus Papier, Pergament, Zwillig, oder auch eisernem Bleche, in der Gestalt eines Cylinders, abgekürzten Kegels und vollkommenen Kegels gemacht, und mit Musketen-Kugeln, Nägeln, Ketten und dergleichen gefüllet werden.

Zusatz.

32. Weil die eingefüllete Materie sich ausbreitet, indem sie durch die Gewalt des Pulvers herausgetrieben worden, so muß der Ort, wo man sie hinschießt, nicht gar zu nahe seyn, damit sie sich recht ausbreiten könne; doch nicht gar zu weit, damit sie sich nicht allzusehr ausbreite, und ihre Kraft verliere.

32 a) Die Kartetschen werden nur gegen Menschen und Pferde gebraucht. Man verfertigt sie auch so, daß man ein conisches Stück Eisen, oder eine hölzerne Spindel mit einer Scheibe an dem einen Ende in zerlassenes Pech tunkt, sie darauf über bleyerne Kugeln wälzt, und mit einem Ueberzuge aus Leinewand durch Bindfaden befestigt. Man heist sie alsdann Hagelpatronen oder Traubenhagel, und wenn sie eine kegelförmige Gestalt haben, Tannzapfen.

Erklärung.

33. Der Kernschuß wird genennet, wenn das Stück horizontal gerichtet ist: wird es aber über die Horizontallinie erhöhet, so nennet man

man es einen Bogenschuß, insbesondere den Visirschuß, wenn es bis in den ersten Grad erhöhet worden, hingegen den Bogenschuß nach der höchsten Elevation, wenn er im 45 Gr. geschiehet.

Namen des Geschützes.	Weite des Kernschusses.	Weite des Bogenschusses von 45 Gr.
Ganze Carthaune	500 Schritte	6000 Schritte
Halbe Carthaune	420	5000
Viert. Carthaune	370	4400
Regimentstück	320	3600
Viert. Feldstück	etwas weniger	etwas weniger
Ganze Schlange	600	7140
Halbe Schlange	450	5470
Viert. Schlange	350	4180
Falkonet	280	3320
Halbes Falkonet	206	2450
Serpentinel	160	1870

33 a) Man hat noch eine Art Schüsse, welche man **Ricochetschüsse** oder **Prellschüsse** nennt. Man ladet die Kanone nur mit dem 5ten oder 6ten Theil der gewöhnlichen Ladung, und richtet sie unter einem kleinen Winkel von 6 bis 12 Graden gegen den Horizont. Die Kugel macht alsdann Sprünge auf dem Boden, wie ein Stein, den man schief auf das Wasser wirft, wodurch die Kanonen, die Bedeckungen und die Mannschaft auf den Linien der Belagerten sehr beschädigt werden. Man braucht jetzt auch kleine Bomben zum **Ricoschettiren.**

33 b) Es ist nöthig hier auch etwas von den **Bahnen der Geschützkugeln**, d. h. von dem Wege den sie beschreiben, wenn sie unter diesem oder jenem Winkel schief gegen die Horizontalfläche abgeschossen werden, zu erwähnen.

I. Um hievon einen allgemeinen Begriff zu geben, so sey (Fig. 9. Art.) AW eine horizontale Fläche, und AG die Direction nach der eine Kugel aus dem Geschütze A abgeschossen wird, also **GAW der Elevationswinkel** des Geschützes. 9.

II. Die Geschwindigkeit mit der die Kugel aus dem Geschütze fährt, sey so groß, daß sie in einer Secunde den Raum AB beschreiben würde, so ist klar, daß wenn sie durch die Schwerkraft nicht beständig aus der geraden Richtung AG niedergezogen würde, sie mit dieser Geschwindigkeit ohne Ende fort sich in der Linie AG bewegen, und nach Verfluß der ersten Secunde sich bey B, nach zwey Sekunden bey C, nach drey bey D u. s. w. befinden würde, dergestalt, daß

$$AB = BC = CD = DE$$

u. s. w. oder

$$AC = 2 . AB;\ AD = 3 . AB;\ AE = 4 . AB \text{ \&c.}$$

seyn müßte.

III. Da sie aber von der Schwere beständig aus der Richtung AG niedergezogen wird, so kann sie am Ende der (II.) genannten Zeittheile nicht bey B, C, D &c. sich befinden, sondern sie muß so tief unter diesen Punkten seyn, als sie innerhalb jener Zeittheile niedergefallen seyn würde. Da nun die Tiefen des Falles eines Körpers sich wie die Quadrate der Fallzeiten verhalten (§. 48 p Mech.) so ist klar, daß wenn die lothrechten Linien BN, CM, DO, EP &c die Tiefen des Falles in 1; 2; 3; 4; &c. Secunden ausdrücken, diese Linien sich wie die Quadrate dieser Zahlen; also wie 1; 4; 9; 16; &c. verhalten müssen. Die aus A geworfene Kugel wird also am Ende der ersten, zweyten, dritten &c. Secunde sich nicht bey B; C; D; &c. sondern bey N; M; O; &c. um jene Falltiefen, unterhalb den Punkten B, C, D, &c. sich befinden. Hängt man diese Punkte A, N, M, O, &c. bis zu demjenigen w, wo die Kugel niederfällt (denn begreiflich muß sie durch die Wirkung der Schwere endlich ganz bis auf den Boden AW niedergezogen werden) durch eine krumme Linie zusammen, so wird diese einen Begriff von der **Bahn des geworfenen Körpers** geben, von der man sehr leicht beweisen kann, daß sie eine **Parabel** seyn muß, deren Scheitelpunkt P (§. 23. V. höh. Geom.) lothrecht über dem Mittelpunkt R, der **Schußweite** AW liegen wird.

IV. Diese Schußweite AW hängt von der Geschwindigkeit, mit der die Kugel aus A abgeschossen wird, und von dem Erhöhungswinkel des Geschützes, d h. von dem Winkel GAW ab. Man nenne jene $= c$ diesen α, so daß c den Weg AB ausdrücke, den die Kugel in einer Secunde längst

AG

AG beschreiben würde, wenn die Schwere sie nicht niederzöge, so ist für jede Zeit t, von dem Augenblicke angerechnet, da die Kugel abgefeuert worden, der Raum AX den sie würde in der Richtung AG beschrieben haben, wenn die Schwere sie nicht niederzöge $=$ c . t. Vermöge der Würkung der Schwere aber ist

$$XY = BN . t^2 \text{ oder } = g . t^2$$

(wenn g die Tiefe des Falles in der ersten Secunde, oder die Linie BN bezeichnet) und der Körper ist am Ende der Zeit t in dem Punkte Y seiner Bahn.

V. Man verlängere XY lothrecht herab, so ist in dem rechtwinklichten Dreyecke AXQ für den Sinus totus $=$ 1

$$QX = AX . \text{Sin } \alpha = c . t \text{ Sin } \alpha$$

$$AQ = AX \text{ col } \alpha = c . t \text{ col } \alpha$$

Also für die dem Punkte Y entsprechende Ordinate YQ $=$ y hat man

$$y = QX - YX = c . t \text{ Sin } \alpha - g . t^2$$

oder auch

$$y = (c \text{ Sin } \alpha - g . t)\, t .$$

VI. Diese Ordinate y wird zweymahl $=$ o, einmahl für t $=$ o also bey A selbst, und dann für

$$c \text{ Sin } \alpha - g . t = o$$

d. h. wenn die Zeit

$$t = \frac{c \text{ Sin } \alpha}{g}$$

verflossen, und der Körper in W angelangt seyn wird.

VII. Setzt man diesen Werth von t in die Formel für AQ, so kömmt für die dem Punkte W entsprechende Abscisse AW, also für die Schußweite der Werth

$$AW = \frac{c^2 \text{ Sin } \alpha \text{ cos } \alpha}{g},$$

wofür man auch

$$Aw = \frac{c^2 \operatorname{Sin} 2\alpha}{2g}$$

setzen kann, wie aus Trigon. (§. 44. I) erhellt, wenn man das dortige $\beta = \alpha$ setzt. Die Schußweite AW verhält sich also für einerley c, wie der Sinus des doppelten Erhöhungswinkels, und für einerley α, wie das Quadrat der anfänglichen Geschwindigkeit der Kugel.

VIII. Um die größte Höhe RP zu finden, auf welche die Kugel steigen kann, suche man die Ordinate y für eine Zeit t, welche der halben Zeit gleich ist, welche die Kugel braucht, die ganze Bahn APW zu beschreiben, d. h. man setze in die Gleichung für die Ordinate (v)

$$t = \frac{c \operatorname{Sin} \alpha}{2g}$$

(IV.) so wird

$$PR = \frac{c^2 \operatorname{Sin} \alpha^2}{4g}.$$

IX. Aus diesen Formeln für AW und PR läßt sich alles herleiten, was in der Ausübung bey dem **Werfen der Bomben und Kanonenkugeln** vorkommen kann. So ist z. E. die **größte** Weite auf welche eine Kugel bey einer gegebenen anfänglichen Geschwindigkeit c gelangen kann, d. h. AW am größten, wenn $2\alpha = 90$ Gr., also der Erhöhungswinkel $\alpha = 45$ Gr. ist. Ferner wird die Kugel auf einerley Weite geworfen, wenn der Erhöhungswinkel so viel über 45 Gr. als darunter ist. Z. E. AW wird von gleichem Werth ausfallen, man mag $\alpha = 30$ Gr. oder $\alpha = 60$ Gr. nehmen, und so in andern Fällen, welches alles bey den Schriftstellern, welche von dem Bombenwerfen handeln, umständlich zu ersehen ist.

X. Ein besonderer Fall ist noch zu erörtern, wenn die Richtung des Geschützes wie in (Fig. 10. Art.) horizontal ist. Hier wird die Kugel, wenn die Höhe des Geschützes über dem Boden TP = AT ist, auch einen parabolischen Bogen ANMOP beschreiben, dessen Scheitelpunkt aber bey A selbst seyn wird. Die Linien AB, BC &c. BN, CM &c. Haben in der gegenwärtigen Figur eben die Bedeutung, wie in (II. III.) und die dortigen Schlüsse sind hier dieselben.

XI. Die

XI. Diese Lehren von der parabolischen Bahn der Geschützkugeln würden bey der Anwendung ihre vollkommene Richtigkeit haben, wenn kein **Widerstand der Luft** in Betrachtung zu ziehen wäre. Allein dieser verursacht, daß obige Lehren in der Ausübung sehr große Einschränkung leiden. Nur in einem luftleeren Raume würden die Bahnen der geworfenen Körper vollkommen parabolisch seyn, aber in der Luft selbst weichen sie desto mehr von einer Parabel ab, je grösser die Geschwindigkeit der geworfenen Körper, und folglich der Widerstand der Luft ist. Daher obige Theorie einer sehr grossen Verbesserung bedarf, wenn sie in der Ausübung zutreffen soll. Bey dem Werfen der **Kanonenkugeln** kann sie fast gar nicht gebraucht werden, weil diese gewöhnlich eine sehr große Geschwindigkeit haben. Eher läßt sie sich beym Werfen der **Bomben** anwenden, welche gewöhnlich keine so große Geschwindigkeit als die Kanonenkugeln haben, und man begnügt sich daher bey jenen mit der parabolischen Theorie, so lange man keine bessere für die Ausübung hat. Denn wenn gleich die größten Mathematiker sich damit beschäftigt haben, die Bahnen der Geschützkugeln mit Betrachtung des Widerstandes der Luft zu bestimmen, so fehlt diesen Bemühungen doch noch gar vieles zur würklichen Ausübung. Man kann indessen hierüber vorzüglich die oben (§. 12a) angeführten Schriften von Robies, Euler, **D'Arcy Tempelhof** nachlesen, denen man noch viel andere beyfügen könnte. Die Ausübung der parabolischen Theorie hat **Belidor** a. a. O. am besten und vollständigsten ausgeführt, und die meisten Artilleristen richten sich bis jetzt noch nach den Belidorischen Regeln, daher ich es für nützlich gehalten habe, einige Begriffe und Hauptformeln, die dabey vorkommen, hier kürzlich anzuführen. Werden mit dieser Theorie unmittelbare Erfahrungen (z. E. über die Schußweiten) verbunden, so weicht sie doch nicht gar zu sehr von der Wahrheit ab, und kann daher dienen, bis mehrere Untersuchungen über den Widerstand der Luft genauere Bestimmungen zulassen. Erfahrungen dieser Art sind in **Struensees** Artillerie §. 272. aus dem Belidor angeführt.

Erklärung.

34. Die Mörser oder Böller **sind Geschütze, daraus man Granaten, Bomben, Carcassen,** 5.

und andere Feuerkugeln nach einem Bogen werfen kann.

Erklärung.

5. 35. Es bestehet aber der Mörser aus dem Kessel oder Lause ABCD, darein die Bombe oder eine andere Feuerkugel geladen wird; aus der Kammer GEH, darein das Pulver kommt, und aus dem Stosse oder Boden EI. Der obere gleich weite Theil des Laufes ABDC heisset der Flug; der untere runde CGHD das Lager.

Erklärung.

36. Hangende Mörser werden genennet, welche die Schildzapfen in der Mitte haben: hingegen stehende heissen diejenigen, welche die Schildzapfen an dem Boden haben: Fuß- oder Schemmel-Mörser sind, die gar keine Schildzapfen haben.

Erklärung.

6. 37. Die Bomben sind hohle eiserne Kugeln, welche mit Pulver angefüllet werden, und in deren Mundloch A eine hölzerne Brandröhre geschlagen wird, mit einem besondern Brande angefüllet.

Anmerkung.

38. So bald der Zeug in der Brandröhre bis an das Pulver brennet, entzündet sich dieses auf einmal, und weil es nicht Raum hat sich auszubreiten, zersprenget es die Bombe mit großer Gewalt, daß durch die herumfliegenden Stücke Eisen Menschen und Gebäude sehr beschädiget, auch diese in den Brand gestecket werden. Der Brand in der Brandröhre bestehet aus 2 Loth Salpeter, 1 Loth Schwefel, 4 Loth Mehlpulver. Zu dem Kütte nehmet gegossenen ungelöschten Kalk, Ziegelmehl, reine Asche und Feilspäne, menget alles wohl unter einander, und feuchtet es mit Leimwasser an.

Erklä-

Erklärung.

39. Die Granaten sind von den Bomben nur der Grösse nach unterschieden: daher auch einige die Bomben Granaten nennen. Wenn sie sehr klein sind, und nicht über zwey Pfund wiegen, wirfet man sie mit den Händen, und werden dannenhero Handgranaten genennet.

Anmerkung.

40. Die Granaten schlagen Arme und Beine entzwey, und verwunden auch an dem Kopfe, auch an andern Orten des Leibes, öfters tödtlich.

Erklärung.

41. Die Carcassen sind länglichte Kugeln, welche mit kleinen Stücken von Musqueten-Läufen, die mit bleyernen Kugeln geladen, Handgranaten und anderm Feuerkugel-Zeuge gefüllet, und mit zwey eisernen Reifen und Stricken, gleich anderen Feuerkugeln, gebunden werden.

Anmerkung.

42. Der Feuerkugelzeug wird auf gar verschiedene Art zubereitet. Ich will zum Exempel nur Einen Satz anführen. Nehmet 3 Pfund Mehlpulver, 1 Pfund Salpeter, und 1 Pfund Schwefel. Mischet alles wohl unter einander.

Erklärung.

43. Durch die Feuerkugeln verstehen wir diejenigen, welche angezündet werden und brennen können.

Anmerkung.

44. Es sind derselben gar vielerley Arten, nachdem sie entweder die Häuser anzustecken, oder die Besatzung zu beschädigen, oder aus andern Absichten gebrauchet werden. So hat man zum Exempel Leuchtkugeln, die man an einen Ort wirft, den man erleuchten will. Dampfkugeln, welche es

finster machen, daß man an einem Orte nicht sehen kann. Stinkende Kugeln, dadurch man die Luft mit einem garstigen Gestanke verunreiniget.

Erklärung.

45. Die Haubitzen sind ein grobes Geschütz, so eine Kammer, aber dabey einen längeren Flug als ein Mörser haben, und daraus sowohl Granaten, als andere Feuerkugeln, auch Cartetschen und nicht allzugroße Steine geschossen werden.

Anmerkung.

46. Die Haubitzen sind von den alten Kammerstücken hauptsächlich der Länge und Weite nach unterschieden, welche Anfangs zu dem Ende erfunden worden, daß man große steinerne Kugeln mit wenig Pulver daraus schiessen könnte. Daher sie auch von einigen Steincarthaunen oder Steinstücke genennet worden. Nach diesem hat man sie abgeschaffet, weil sie langsam zu laden sind.

Erklärung.

K. 47. Die Petarde ist ein Instrument von Metall in Gestalt eines abgekürzten Kegels, welches mit Pulver gefüllet, und zum Zersprengen, z. E. der Thore, Mauern, Brücken, Pallisaden u. s. w. gebrauchet wird.

Zusatz.

K. 48. Damit man die Petarde da anhängen kann, wo etwas gesprenget werden soll, wird sie auf das Matrillbret gen:gelt, und damit dieses angehet, werden gegen die Mündung eiserne Handhaben eingegossen.

Erklärung.

49. Die Minen sind unter der Erde gegrabene Keller, die man mit etlichen Tonnen oder Stücken Pulver füllet, um die auf dem Keller

liegen-

liegende Last in die Luft zu sprengen, wenn das Pulver anzündet.

Anmerkung.

50. Z. E. Wenn man einen alten Thurm untergrübe, und in der gemachten Grube einige Tonnen Pulver dergestalt verschlösse, daß man sie doch noch anzünden, und dadurch den Thurm über einen Haufen werfen könnte, so nennet man dieses den Thurm unterminiren.

Erfahrung.

51. Wenn die Mine zu scharf geladen ist, machet sie nur eine enge Grube, deren Diameter nicht grösser ist als die Weite der Kammer, darinnen das Pulver gestanden. Wenn sie aber rechte Ladung hat, sprenget sie alles, was um die Kammer gelegen, mit in die Höhe. Wenn sie zu schwach geladen, machet sie nur eine kleine Erschütterung auf der schwächsten Seite.

Erfahrung.

52. Aus sehr vieler Erfahrung, welche der berühmte Vauban bey vielen Belagerungen selbst gehabt, ist endlich folgendes für gut befunden worden. Es werden nemlich in einer Mine erfordert für jede Cubikruthe Französisch, das ist, 216 Cubikschuh:

Lockere Erde	9—10	Pf. Pulver
Feste und sandichte Erde	11—12	
Thon	15—16	
Neues Mauerwerk	15—20	
Altes Mauerwerk	25—30	

Aufgabe.

53. Eine Mine anzulegen.

Auflösung.

§. 1. Nachdem z. E. in einem gemauerten Bollwerke schon durch die Kanonen ein Loch gemachet worden, so treibet daselbst einen Gang AB 4′ bis 5′ hoch und breit.

2. Wenn ihr durch die Mauer bis in die Erde kommen seyd, so treibet sowohl zu der Rechten als zu der Linken andere Gänge, CB und BD nach der Seite 18 bis 20 Schuh lang.

3. An deren Ende C und D machet eine Kammer.

4. Treibet gerade aus B den dritten Gang EB, und leget an dessen Ende die dritte Kammer.

5. Füllet die Kammer mit ihrem gehörigen Pulver (§. 52.), und stopfet sie aus.

6. Fasset die Minengänge, die $2\frac{1}{2}$ Schuh weit, $3\frac{1}{2}$ hoch sind, mit Holz, daß sie nicht einfallen.

7. In die Minenkammer leget eine Wurst mit einem Leitfeuer, und führet sie durch die Minengänge bis an den Graben.

8. Ueber dieselbe leget ein Dächlein mit Bretern, damit es ihr nicht schaden kann, wenn etwas im Minengange einfallen sollte.

9. Endlich leget an die Wurst angezündete Lunte, aber umgekehret.

53 a) Bey der würklichen Ausübung ist noch gar vieles in Betrachtung zu ziehen, was hier in Anfangsgründen keinen Platz finden kann. Struensees Artillerie §. 298. u. f. behandelt auch das hieher gehörige sehr gründlich und vollständig. Auch sehe man hierüber Le Febre, Essai sur les mines, woselbst auch der Nutzen derjenigen Minen, welche man Globes de compression neunt, gewiesen wird.

Ende der Artillerie.

Anfangs-Gründe
der
Fortification,
oder
Krieges-Baukunst.
Der erste Theil
von den
Grundregeln der Fortification.

Erklärung.

1.

Die Fortification oder Kriegsbaukunst ist eine Wissenschaft, einen Ort dergestalt zu befestigen, daß sich wenige gegen viele, die ihn belagern, mit Vortheil wehren können.

1a) **Succows** erste Gründe der Kriegsbaukunst. Frkf. und Leipz. 1769. **Struensees** Anfangsgründe der Kriegsbaukunst 3 Theile 1771—74. **Tielke** Unterricht für die Officiers, die sich zu Feldingenieurs bilden. Zweyte Ausg.

D. Gaudi, Anweisung für Officiers von der Infanterie, wie Feldschanzen angelegt werden. Wesel 1767.

Belidor Science des Ingenieurs a la Haye 1734.

L'Ingénieur de la Campagne par le Chev. de Clairac. à Paris 1749. ist auch ins Deutsche übers.

Kurze, jedoch gründliche und deutliche Anweisung zur Fortification von Joh. Rud. **Fäsch**. Nürnberg.

Anweisung zur Kriegsbaukunst. Berlin 1757.

Traité

Traité de l'attaque des placés par Mr. le Blond Paris 1762. Traité de la defense des places von ebendemſ. 1762. Memoires pour ſervir d'inſtruction dans la Conduite des Sieges et dans la defenſe des places p. Mr. le Maréchal de Vauban. Leiden 1740. Das obengenannte Struenſeeiſche Werk macht faſt alle übrigen entbehrlich.

Die Feldbefeſtigungskunſt iſt vorzüglich einem Officier wichtig, und damit ſollte eigentlich jeder Unterricht in der Fortification angefangen werden. Eine Feſtung anzulegen kömmt ſehr ſelten vor, aber eine Schanze aufzuwerfen, ein Lager zu befeſtigen, eine Batterie anzulegen ꝛc. darinn ſollte wohl jeder Officier ſich Kenntniſſe verſchaffen. Wer darinn geübt iſt, findet ſich in die Feſtungen leicht, bey deren Anlage aber oft viel Unnützes iſt. Wolfs Unterricht dient, um Anfänger zur Leſung gröſſerer Werke vorzubereiten.

Zuſatz.

2. Die Manier, zu befeſtigen, muß alſo nach der Beſchaffenheit der Attaken eingerichtet werden.

Zuſatz.

3. Die Werke an einer Feſtung müſſen der Gewalt des größten Geſchützes, das man in den Attaken brauchet, ſo viel möglich widerſtehen können.

Zuſatz.

4. Die Beſatzung ſoll auf den Werken nicht allein wider die Stückkugeln, ſondern auch wider Bomben, Granaten und andere Fuerkugeln zulänglich bedeckt ſeyn, der Feind aber muß für ſich nirgend um die Feſtung einige Bedeckung finden.

Zuſatz.

5. Es muß demnach um die Feſtung kein erhabener Ort ſeyn, der nicht aus einem anderen kann geſehen und beſtrichen werden.

Lehrſatz.

6. Die Defenſion ſoll in der Nähe auf einen Musketenſchuß eingerichtet werden.

Beweis.

Beweis.

Die Defension aus Musketen ist geschwinder als aus Stücken, und nicht so kostbar. Die Kraft einer Stückkugel ist in der Weite, wo eine Muskete hinträgt, um so viel stärker, ja man kann auch in solcher Weite mit gutem Nachdruck Carterschen brauchen (§. 31. Artill.).

Zusatz.

7. Die Linie, welche einen beängstigten Ort secundiret, muß von ihm nicht einen Musketenschuß abliegen.

Lehrsatz.

8. **Die Festung muß an allen Orten gleich stark fortificiret seyn.**

Beweis.

Sie ist verlohren, sobald der Feind sich an einem Orte einen offenen und sicheren Gang in dieselbe gemachet. Denn wenn sich wenige in einer Festung gegen viele wehren sollen (§. 1.): so findet man keine so starke Besatzung darinnen, die nach so vielen Bemühungen, als die Defension erfordert hat, noch in dem Stande seyn könnte, den Feind wieder herauszuschlagen: wie sich denn auch solches anderer Umstände halber (z. E. wegen des Proviants und der Munition) nicht wohl würde thun lassen. Ist nun die Festung an einem Orte schwächer, als an dem andern, so wird der Feind sie an dem schwachen attakiren, und ist die Stärke an den übrigen Orten vergebens.

Lehrsatz.

9. **Wenn ein Ort fortificiret wird, so muß man einen Wall um ihn aufwerfen.**

Beweis.

Der Feind greifet einen Ort mit dem groben Geschütze an, und also muß man sich auch mit dem groben

Geschütze gegen ihn wehren, folgends Stücke auf die Festung pflanzen können. Da nun die Stücke nicht allein wegen ihrer Länge einen ziemlichen Raum einnehmen, sondern auch zurücke laufen, wenn sie gelöset werden, so kann man nicht, wie vor Alters, ehe das Geschütze erfunden wurde, mit einer Mauer zufrieden seyn, sondern man muß einen breiten Wall von Erde aufwerfen. W. Z. E.

Zusatz.

10. Damit man zu dem Walle Erde habe, so soll ein Graben um den ganzen Wall von aussen herum gehen.

Zusatz.

11. Weil die Besatzung vor dem feindlichen Canoniren sicher seyn soll (§. 4.); so muß der Wall gegen das Feld höher seyn als gegen die Stadt.

Zusatz.

12. Daß das Erdreich wohl zusammen hält, so muß man ihn sowohl gegen den Graben, als gegen die Stadt abhängig machen.

Erklärung.

I. 1. 13. Den hohen Theil des Walles IG, dadurch die Besatzung wider die Stückkugeln des Feindes bedecket wird, nennet man die Brustwehre (Parapet).

Zusatz.

14. Sie muß also 6 bis 7 Schuh hoch, und, damit sie einen Canonenschuß aushalten kann, 20 bis 24′ dicke seyn.

Zusatz.

15. Damit die Soldaten von dem Walle feuern können, so machet man die Brustwehre gegen das Feld

2 bis

2 bis 3 Schuhe niedriger als gegen die Stadt, und daran ein oder auch wohl zwey Banquets oder Bänklein, 3 Schuhe breit, $1\frac{1}{2}$ hoch.

Erklärung.

16. Den niedrigen Theil des Walles gegen die Stadt A I, darauf die Besatzung sich befindet, und die Stücke gepflanzet werden, nennet man den Wallgang (Terreplain). I. 1.

Zusatz.

17. Die Breite muß wegen der Stücke 24 bis 30′ seyn.

Erklärung.

18. Die Schräge AB, PC und HN, welche der Wall beyderseits bekommet, nennet man die Böschung, Abdachung oder Dossirung (Talud): die Linie BA oder DC und MN ihre Anlage. Unterweilen heisset auch wohl die Anlage DC und MN die Böschung. I. I.

Anmerkung.

19. Für gutes Erdreich ist die Anlage der äusseren Böschung MN der halben, für mittelmäßiges $\frac{2}{3}$, und für schlimmes der ganzen Höhe des Walles gleich. Hingegen die Anlage der inneren DC mag man auch im guten Erdreiche der Höhe DA gleich machen, im mittelmäßigen und schlimmen noch grösser.

Anmerkung.

20. Wenn man eine Futtermauer hat, wie in unserer Figur nach Vaubans Manier genommen wird, rechnet man im guten Erdreich auf 6′, im mittelmäßigen auf 5′, im schlimmen auf 4′ der Höhe, einen Schuh für die Anlage der Böschung. Das Mauerwerk selber bekommet $\frac{1}{8}$ bis $\frac{1}{9}$, oder auch wohl, wenn es nicht das beste ist, $\frac{2}{7}$ der Höhe zu seiner Böschung.

Lehrsatz.

21. Der Wall muß lieber etwas niedrig, als gar zu hoch gemachet werden.

Beweis.

Beweis.

Wenn der Wall hoch ist, so kann der Feind bald unter die Stücke rücken. Ueber dieses gehen die Schüsse nicht mit dem Horizont parallel. Es ist aber bekannt, daß die Horizontalschüsse mehr als die andern rassiren, das ist, wegnehmen, was sie unterwegens finden.

Lehrsatz.

22. **Der Wall kann nicht in einer Linie, oder auch wie ein Vieleck nach den Seiten des Platzes fortgeführet werden, sondern es müssen hin und wieder einige Werke über den übrigen Wall weiter herausgeleget werden.**

Beweis.

Eine jede Linie an der Festung soll von einer andern können bestrichen werden (§. 5.). Wollte man nun um die Festung den Wall in einer Circullinie, oder in einer andern krummen in sich selbst laufenden Linie, oder auch nach den Seiten des Platzes in Gestalt eines Vielecks herumführen, so könnte keine Linie die andere secundiren, wenn sie beängstiget würde.

Erklärung.

23. **Die Werke, welche über den Wall, der nach der Seite des Platzes aufgeworfen worden, weiter herausgeleget werden, heissen Bollwerke oder Basteyen (Baltions).**

Lehrsatz.

24. **Die Bollwerke müssen spitzig zulaufen.**

Beweis.

1. Man lasse sie nicht spitzig zulaufen, sondern man
2. gebe ihnen die Gestalt eines viereckichten Thurmes, als ABDC. Ziehet von beyden Seiten die äussersten Defenslinien FE und GE; so bleibet an dem Bollwerke ein

Trian-

Triangel BED, der von den secundirenden Linien nicht kann bestrichen werden, und dahin sich der Minirer, so das Bollwerk sprengen will, sicher logiren kann. Da nun dieses ungereimt ist (§. 5.); so muß das Bollwerk spitzig zulaufen, wie BED. W. Z. E.

Erklärung.

25. Die Linien AN und AF, welche die Bollwerkspünte A formiren, heissen die Gesichtslinien (Faces). I. 3.

Zusatz.

26. Damit der Feind, der die Festung an den Facen attakiret, daselbst keinen Vortheil zum Unterminiren und Stürmen finde, muß die Pünte nicht allzugroß, und also nicht über 30 Ruthen seyn; damit sie aber zu einer Contrebatterie wider den Feind dienen kann, muß sie nicht allzuklein, und also nicht unter 24 Ruthen seyn.

Erklärung.

27. Der mittlere Wall zwischen zwey Bollwerken wird die Curtine (la Courtine) genennet.

27 a) In den Curtinen werden allemahl die Thore einer Festung angelegt. Man macht sie nach Beschaffenheit der Umstände in unterschiedener Weite und Höhe, gewöhnlich 12 Schuh weit und 16 hoch. Man führt sie nicht mehr, wie sonst, nach einer gewissen Krümmung, sondern nach einer geraden Richtung quer durch die Curtine, und versieht sie mit einem Fallgatter von Holz oder Eisen, welches man niederlassen kann, um einen unvermuthet eingedrungenen Feind abzuhalten. Auch dienen hiezu die Fallbäume, die man einzeln an Ketten niederlassen kann. Die Thore werden oben mit einem Bombenfesten Gewölbe versehen. Von innen werden zu beyden Seiten noch ein paar Gewölbe angelegt, welche der Thorwache zu einem Aufenthalte dienen. Ausser den großen Thoren kommen bey einem Walle noch verschiedene kleinere Oeffnungen vor, welche einen Zugang zu diesen oder jenen Theilen der Festung, oder wenigstens zu dem Graben verstatten. Dergleichen kleine Thüren heissen Ausfälle, oder auch Poternen. Jener Nahme rühret

daher, weil sie zur Erleichterung der Ausfälle einer Besatzung dienen. Man pflegt sie gerne hinter den Schulterwehren (§. 32 a) anzubringen, weil sie daselbst bedeckt sind, und die schönste Gelegenheit zu Ausfällen verstatten.

Vor den Thoren werden **Brücken** angelegt, welche bey Festungen nie ganz von Steinen gebaut werden, damit die großen Pfeiler und Bogen keine Aussicht verhindern. Sie werden vielmehr von Holz aufgeführt, und ruhen auf einer Balkenverbindung, welche man **Joche** nennt. Oben werden sie gepflastert, so weit sie **unbeweglich** (Ponts dormants) sind. Zunächst am Thore ist die **Zugbrücke** mit ihnen verbunden, die wie eine große Fallthüre auf- und niedergelassen werden kann. Umständlich handelt von den Brücken und Thoren **Belidor** in v. a. Werke im 4ten und 6ten Buche.

Unter den Cortinen werden auch am vortheilhaftesten allerley Gewölbe zur Aufbewahrung der Kriegs- und Mundbedürfnisse, auch wohl zum Aufenthalte der Soldaten angelegt, um sie gegen Bomben und alle Arten von Wurffeuer zu bedecken, wenn sie nicht gerade im Dienste sind. Auch unter den Bollwerken werden zuweilen dergleichen Gewölbe angelegt, welche, wenn sie mit Schießlöchern versehen sind, **Schießgewölbe, Mordkeller, Casematten** heisen.

Die Bollwerke sind aber entweder **voll** oder **hohl**, je nachdem der Raum zwischen den Facen und Flanken ganz mit Erde angefüllt ist oder nicht. Nur die hohlen dienen zu Casematten, weil hier die Gewölbe hinten eine zureichende Oeffnung zur Abführung des Rauchs erhalten können, wozu bloße Rauchröhren über den Kanonen nicht hinlänglich sind. Die vollen Bollwerke haben aber darinn wieder Vorzüge, daß man auf ihnen Versammlungsplätze für die Soldaten anlegen kann, und Platz genug hat, auch noch Mörser hinter die Kanonen aufzupflanzen.

Lehrsatz.

28. **Die Bollwerke können nicht aus bloßen Facen bestehen.**

Beweis.

Denn es kämen todte Winkel, welches der Hauptmaxime (§. 5.) zuwider ist. Es sind auch die Bollwerke nicht geräumig genug.

Erklä-

Erklärung.

29. Also sind ausser den Facen noch zwey andere Linien zu den Bollwerken kommen, nemlich NO und EF, welche die Bollwerke an die Curtine anhängen, und die Flanken oder Streiche (les Flancs) genennet werden. I. 3.

Zusatz.

30. Weil die Flanken nicht allein einander selbst, sondern auch eine jede die Face des überstehenden Bollwerks defendiren; so sind große besser als kleine.

Zusatz.

31. Weil die geraden Schüsse gewisser sind, als die schiefen; so soll die Flanke auf der Defenslinie perpendicular stehen, zumal da man auch mehr Stücke darauf pflanzen und mehr Mannschaft daran stellen kann, als wenn sie von eben der Grösse ist, und einen schiefen Winkel machet.

Zusatz.

32. Damit sie nun aber dem Feinde nicht zu sehr in Augen lieget; soll der untere Theil IG bis in LK 2 bis 3 Ruthen zurücke gezogen werden. II.

32 a) Der hervorstehende Theil der Flanke heist auch die **Schulterwehre** (epaulement.) Man pflegt ihn abzuründen, und giebt ihm dann den Nahmen des **Bollwerksohres** (Orillon.).

Zusatz.

33. Weil die Flanke KL die Face CB von dem überstehenden Bollwerke defendiret, so muß sie der Feind nicht eher zu sehen bekommen, als bis er sich in die Breche an der Face leget. Darum sollen die Linien BI und BG, nach welchen die Flanke IG zurückgezogen wird, aus der Bollwerkspünte B, oder, da die Breche eben nicht an der Bollwerkspünte, sondern etwas besser her-

unter geschossen wird, die obere Linie BF auch wohl aus einem andern Punkte der Face gezogen werden.

Zusatz.

34. Wenn die Flanken nach einer geraden Linie aufgeführet werden, so kann der Feind eine Batterie dagegen aufwerfen, davon er alle Punkte der Flanke geradezu bestreichen kann. Hingegen wenn sie eingebogen ist, kann nicht mehr als ein Schuß die Flanke gerade zu treffen. Da nun die Schüsse so geradezu gehen, stärker sind als die andern, so kann man die Flanke KL eingebogen machen.

Zusatz.

35. Zu der Defension des Grabens können niedriggesenkte Flanken angeleget, und mit Stücken bepflanzet werden.

Zusatz.

36. Damit aber der Feind nicht mit so gutem Vortheile Bomben und Granaten hineinwerfe, noch die von der obern Flanke herunterfallende Erde oder Steine denen in der unteren beschwerlich fallen, wenn sie eingeschossen wird, so soll die niedrige Flanke von der oberen durch einen kleinen Graben abgesondert werden.

Erklärung.

II. 37. Der obere Theil der Flanke DI, welche zur Bedeckung des unteren Theiles LK dienet, wird das Drillon genennet.

Zusatz.

38. Damit die Flanke nicht ohne Noth verkürzet wird, soll das Drillon so klein gemachet werden, als es sich thun lässet.

Erklärung.

I. 39. Die äussere Polygon ist die Linie AB, welche von einer Bollwerkspünte A bis zu der andern B gezogen wird,

3,

Erklä-

Erklärung.

40. Wenn man die Face AF bis an die Curtine EH continuiret, so heisset AG die kleine oder die streichende Defenslinie (la ligne de defense flanquante). Hingegen die Linie AH, welche von der Bollwerkspünte A gegen das Ende der Flanke H des überstehenden Bollwerks gezogen wird, nennet man die beständige Defenslinie (la ligne de defense fichante). I. 3.

Zusatz.

41. Die beständige Defenslinie kann nicht über 60 Ruthen seyn.

Anmerkung.

42. Vauban erlaubet bis 75 Ruth. Es können aber nicht wohl in Bestürmung der Festung die Cartetschen gebrauchet werden.

Erklärung.

43. Das Stück von der Curtine GH, welches die beyden Defenslinien abschneiden, nennet man die Second Flanc, oder Nebenstreiche. I. 3.

Erklärung.

44. Die Linien CO und CE, welche den Eingang in das Bollwerk formiren, nennet man die Kehllinien (Demigorges). I. 3.

Zusatz.

45. Große Kehlen sind besser als enge (§. 32. 35.). I. 3.

Erklärung.

46. Die Linie CD, welche aus der Curtine EH und zwey Kehllinien CE und HD bestehet, das ist, die Seite von der Figur des Platzes, wird die innere Polygon genennet. (Coté interieur).

Erklärung.

I. 47. Die Linie AC, welche von der Kehle C
3. bis an die Bollwerkspünte A gezogen wird, heisset die Capital- oder Hauptlinie (la Capitale).

Erklärung.

I. 48. Der Radius CI, damit der Circul be-
3. schrieben wird, darein man die innere Polygon träget, wird der kleine Radius genennet.

Erklärung.

I. 49. Der Radius AI, damit der Circul be-
3. schrieben wird, der durch die Bollwerkspünte gehet, heisset der große Radius.

Erklärung.

I. 50. Der Polygonwinkel OCE ist derjenige, den
3. die äusseren Polygonen AB und AK, oder auch die inneren Polygonen MC und DC mit einander machen.

Erklärung.

I. 51. Der Bollwerkswinkel FAN ist derjenige,
3. den die Facen AN und AF mit einander machen.

Zusatz.

52. Damit er der Gewalt des groben Geschützes widerstehen kann, und das Bollwerk nicht zu enge wird, soll er nicht unter 60 Graden seyn.

Erklärung.

I. 53. Der Streichwinkel AHE ist derjenige,
3. welchen die beständige Defenslinie AH mit der Curtine HE machet.

Erklärung.

I. 54. Der kleine Winkel GAB (Angle diminué)
3. ist derjenige, den die kleine Defenslinie AG mit der äusseren Polygon AB machet.

Erklä-

Erklärung.

55. Der Schulterwinkel AFE (Angle de l' Epaule) ist derjenige, den die Face mit der Flanke machet. I. 3.

Erklärung.

56. Der Centriwinkel (Angle du Centre) CID ist derjenige, den die beyden Radii CI und DI, so aus den Enden der inneren Polygon CD gezogen werden, mit einander machen. I. 3.

Erklärung.

57. Die Berme (Berme) ist ein Gang oder breiter Rand um den Fuß des Walles unten an dem Graben.

Zusatz.

58. Weil die Berme nicht allein hindert, daß der Wall, wenn er sich setzet, nicht einfället, sondern auch die Erde oder Ziegel aufhält, wenn die Brustwehre eingeschossen wird, daß sie nicht in den Graben fallen, und ihn dem Feinde zum Vortheile füllen kann, so soll überall um den Wall eine Berme angeleget, und entweder mit lebendigen Dornhecken besetzet, oder verpallisadiret werden.

Erklärung.

59. Die Faussebraye oder der untere Wall, ist ein Gang um den Wall mit einer Brustwehre und dazu gehörigem Banket.

Zusatz.

60. Wenn die Faussebraye niedrig ist, so kann man daraus das Glacis nicht bestreichen, und sie dannenhero nicht eher brauchen, als bis der Feind in den Graben kommet. Ist sie dabey enge, so verlieret sie öfters gar ihren Gebrauch. Denn wenn der Feind die

Brustwehren des oberen Walles einschließet, wird die Faussebraye davon gefüllet, ehe man sie brauchen kann.

Zusatz.

61. Derowegen, wenn man eine Faussebraye haben will, so soll sie billig etwas erhöhet werden. Daher aber muß sie geräumig und von dem oberen Walle durch einen besonderen Graben abgeführet seyn.

Lehrsatz.

62. Man soll den Graben lieber breit, als tief machen.

Beweis.

Wenn der Graben sehr breit ist, so brauchet der Feind eine große Gallerie darüber, und also fället es ihm beschwerlicher, über einen breiten, als über einen schmalen Graben zu kommen. Ist er sehr tief, so kann man ihn nicht recht horizontal bestreichen; in welchem Falle doch die Kugeln am besten rasiren. Demnach bringet ein breiter und nicht allzutiefer Graben den Belagerten Vortheile, dem Feinde aber ist er nachtheilig.

Zusatz.

63. Damit der Graben von der Flanke ganz bestrichen werden kann, machet man ihn beynahe der Flanke gleich, und ziehet ihn daher mit der Face parallel, wenn die Flanke auf der Defenslinie perpendicular stehet. In andern Fällen lässet man ihn gegen die Schulterwinkel zulaufen.

Anmerkung.

64. Um der Festigkeit willen giebet man dem Graben beyderseits eine Böschung mit dem Walle, daß also die untere Breite des Grabens kleiner wird, als die obere. Die Schranken der Tiefe des Grabens setzet man insgemein zwischen 1 Rth. und 2 Rth.; die Breite muß grösser seyn als die Länge der größten Bäume, 8 bis 12 Ruthen: damit der Feind nicht mit leichter Mühe seine Gallerie über den Graben schlagen kann.

64 a) Ob nasse oder trockene Graben vortheilhafter seyen, muß aus Beschaffenheit der Umstände beurtheilt werden. Ein nasser Graben verursacht dem Feinde freylich manche Schwierigkeiten, aber er erschwert auch die Gemeinschaft zwischen dem Hauptwalle und den Aussenwerken, und macht es fast unmöglich, auf den Feind, wenn er einmahl bis zu dem Graben vorgedrungen ist, Ausfälle zu thun. Ist das Wasser im Graben stehend oder todt, so verursacht es einen üblen Geruch, und kann der Besatzung schädlich werden. Festungen mit nassen Graben sind bey starkem Frost der Gefahr eines Ueberfalles oder einer Leitererersteigung eben so gut, ja noch mehr ausgesetzt, als Festungen mit trockenen Graben, in welchen man sich vortheilhafter allerley Arten von Kunstfeuern bedienen, und Minen anlegen kann, wodurch der Besatzung eines der schönsten Vertheidigungsmittel verschafft wird. Es sind also auf beyden Seiten Vortheile und Nachtheile. Belidor glaubt, daß sich nasse Graben am besten für kleine Festungen schickten, trockene Graben hingegen für große, die eine zahlreiche Besatzung haben, um Ausfälle thun zu können. Indessen kann man einigermaßen die Vortheile trockner und nasser Graben mit einander verbinden, wenn man in dem trocknen einen schmalen aber tiefen nassen Graben anbringt. Kann dieser fließendes Wasser haben, so verschafft dies den Bedürfnissen der Besatzung unendliche Vortheile. Dergleichen kleine Graben in der Mitte eines trocknen, nennen die Ingenieurs eine Cünette (cunette ou couvette). Kann man aber durch angelegte Schleussen einen trocknen Graben nach Gutbefinden unter Wasser setzen, so sind die Vortheile eines trocknen und nassen Grabens noch viel besser verbunden, als es durch eine Cünette würde geschehen können, weil diese, wenn sie nicht breit ist, dem Feinde doch keinen Widerstand leisten kann.

Erklärung.

65. **Die Aussenwerke (les Dehors) sind alle diejenigen, welche man über den Graben des Hauptwalles hinausleget, theils den Feind dadurch fein lange von der Festung entfernet zu halten, theils die Werke des Hauptwalles dadurch zu bedecken, theils die Macht des Feindes durch derselben Bestürmung zu brechen, theils aus andern dergleichen Absichten.**

Zusatz.

66. Weil diese Absichten bey Fortificirung eines Ortes höchst nöthig sind, so sind auch die Aussenwerke bey einer Festung nöthig, wenn sie nur starke Defension haben, und so angeleget werden, daß sie nicht der Feind, wenn er sie mit Sturm erobert, zu Batterien wider den Hauptwall gebrauchen kann.

Erklärung.

III. 67. Das Ravelin (Ravelin) ist ein Werk, welches blos zwey Facen hat fc und cd, und vor die Curtine geleget wird.

Erklärung.

68. Der halbe Mond (Demi-lune) ist ein Werk, welches gleich einem Bollwerke ausser den Facen VZ auch Flanken ZY, obwohl ganz kleine hat, und am gewöhnlichsten vor die Bollwerkspünte, jedoch auch vor die Curtine, wie in unserem Risse, geleget wird.

Erklärung.

69. Aus dem halben Monde vor der Bollwerkspünte sind die Contregarden entstanden, als man ihre Facen mit den Facen des Bollwerks parallel bis an den Graben des Ravelins gezogen.

Erklärung.

70. Die einfache Scheere (Tenaille simple) ist ein grosses Werk, welches aus zwey Facen AD und BD, die einen einwärts gebogenen Winkel formiren, bestehet.

Erklärung.

71. Die doppelte Scheere (Tenaille double) ist ein Werk, welches aus zwey kleinen einfachen Scheeren zusammengesetzet wird.

Erklä-

Erklärung.

72. Das Hornwerk (Ouvrage à Cornes) beste- I.
het aus zwey halben Bollwerken AHE und FGB 4.
und einer Curtine EF.

Erklärung.

73. Das Kronwerk (Ouvrage couronné) ist ein I.
doppeltes Hornwerk, welches wie der Theil 3.
der Festung Fig. 3. Tab. I. aussiehet.

Erklärung.

74. Die Contrescarpe ist das äusserste Werk an einer Festung, welches aus einem Gange um den Graben und einer Brustwehre, deren Abdachung sich mit dem ebenen Felde verlieret, bestehet. Der Gang wird der bedeckte Weg (Chemin couvert), die Brustwehr das Glacis (imgleichen Esplanade) genennet.

Zusatz.

75. Das Glacis wird mit dem Graben überall pa- III.
rallel gezogen, ausser wo man in dem bedeckten Wege Waffenplätze a (Places d'armes) zu Versammlung der Soldaten anleget.

Zusatz.

76. Weil die Abdachung des Glacis sich mit dem ebenen Felde verlieret, so kann es nicht eingeschossen werden. Und dannenhero ist die Contrescarpe eines von den wichtigsten Werken der Festung, um welcher Ursachen willen einige verlangen, man solle, wenn nur Raum vorhanden, eine doppelte Contrescarpe machen.

Zusatz.

77. Damit aber auch der Feind sie nicht ersteigen kann, soll sie verpallisadiret werden.

Anmer-

Anmerkung.

78. Man hält die Festung mehr als für halb verlohren, wenn der Feind die Contrescarpe erobert, sonderlich wenn sie so angeleget worden, daß es ihm nicht viel Mühe kostet, sich ihrer zu bemeistern.

Erklärung.

79. Pallisaden sind Pfähle von Holze 5 bis 6 Schuhe lang, 9 bis 10″ stark, und sowohl unten als oben spitzig, welche 5′ tief in die Erde so nahe neben einander gesetzet werden, daß man zwischen zweyen nur mit einer Musketen durchkommen kann; sie dürfen nicht mehr als 1′ über das Glacis hervorragen.

79a) Es ist ein großer Fehler bey alten Festungen, daß daselbst die Pallisaden auf das Glacis selbst gesetzt wurden. Denn in diesem Falle sind sie durch die feindlichen Kanonenkugeln bald zerstört. Vortheilhafter werden die Pallisaden auf die Bank des Glacis gesetzt, so daß sie nicht höher als einen Schuh über dem Glacis hervorragen. Uebrigens kann man dem Feinde die Eroberung des Glacis noch durch allerley andere Vorkehrungen erschweren. Dahin gehören **Wolfsgruben, Verhaue, Fladderminen**, u. s. w.

Erklärung.

II. 80. Traversen sind Brustwehren, die man quer über den Wallgang und den bedeckten Weg leget, als po.

Zusatz.

81. Sie hindern also, daß der bedeckte Weg nicht kann enfiliret, das ist, von dem feindlichen Geschütze nach der Länge durchstrichen werden; dienen zur Retirade, wenn der Feind in die Contrescarpe einbricht, auch zur Bedeckung wider die Bomben. Denn die Soldaten können sich dahinter legen, und die Bomben über sich wegschlagen lassen.

Erklä-

Erklärung.

82. Die Caponieres sind in die Erde 4 bis 5 Schuhe eingegrabene Gänge, die oben entweder gewölbet, oder mit hölzernen Decken versehen, und so stark mit Erde überschüttet sind, daß keine Bombe noch Carcasse durchschlagen kann.

Anmerkung.

83. Man leget sie dannenhero unter dem Glacis, imgleichen unter dem Walle an der Faussebraye, zuweilen auch unter den Brustwehren an; damit die Soldaten sich hinein retiriren können, wenn die Bombardirung geschiehet.

Erklärung.

84. Halb-Caponieres, sind aus Holz zusammengeschlagene Gallerien, welche an die Brustwehren, sonderlich das Glacis gesetzet werden. Ihre Höhe an der Brustwehre ist ohngefähr 9', an dem andern Ende 8'. Oben werden sie stark mit Bretern verschlagen und mit Sandsäcken oder Erde bedecket.

Zusatz.

85. Sie dienen also zur Bedeckung der Soldaten wider die Handgranaten.

Erklärung.

86. Endlich die Contra-Minen sind gewölbte Gänge unter den Facen, die zu dem Ende angeleget werden, damit man desto leichter die Minen des Feindes entdecken, und das Pulver daraus nehmen kann.

Anmerkung.

87. Nachdem die Ingenieurs die bisher erkläreten Gründe viel oder wenig erwogen, oder auf das eine mehr als auf

das

das andere gesehen, haben sie verschiedene Manieren zu fortificiren erdacht, davon wir nur diejenigen erklären wollen, die Vauban ersonnen, weil sie nicht allein für andern berühmt sind, sondern auch von Anfängern am leichtesten begriffen werden. Wer aber nach diesem vielerley Manieren sich bekannt zu machen Lust hat, und die bisher erklärten Gründe zu Beurtheilung der Festungen anzuwenden sich üben will, der darf nur Sturms Architecturam militarem hypotheticam, und zwar die neue Auflage in 4. nachschlagen.

Ende des ersten Theils der Fortification.

Der andere Theil
der
Fortification,
von
Baubans beyden Manieren zu fortificiren.

Aufgabe.

88.

Den Grundriß des Hauptwalles nach Baubans erster Manier zu machen.

Auflösung.

1. Beschreibet mit dem großen Radio einen Circul, und traget in demselben die äussere Polygon AB herum. II.
2. Theilet diese in zwey gleiche Theile in E (§. 90. Geom.), und richtet in E auf AB den Perpendicul EF auf (§. 70. Geom.).
3. Theilet die äussere Polygon AB im Vierecke in 8, im Fünfecke in 7, und in den übrigen Vielecken in 6 gleiche Theile (§. 154. Geom.), und nehmet einen davon für die Länge des Perpendiculs EF.
4. Ziehet aus A und B durch F die Defenslinien AH und BG.
5. Theilet die äussere Polygon AB in 7 Theile ein (§. 154. Geom.), und traget zwey von dergleichen Theilen auf die Defenslinien AH und BG aus A in D und aus B in C für die Facen.

6. Se-

6. Setzet den Zirkel in C, und thut ihn auf bis D; so könnet ihr mit dieser Eröffnung den Defenslinien aus C und D ihre gehörige Länge bis G und H determiren, und die Flanken DG und CH ziehen.

7. Theilet die Flanke DG in drey gleiche Theile (§. 154. Geom.), und nehmet den dritten Theil DI für das Orillon, welches ihr durch einen Bogen ausziehen müsset, der die Defenslinie HA berühret.

8. Verlängert die Defenslinie BG bis in L, so daß GL = 30′. Ziehet durch I aus der überstehenden Bollwerkspünte B gleichfalls eine Linie BK, und machet IK = GL.

9. Machet aus K und L mit KL einen Durchschnitt in M, und beschreibet aus M mit eben der Eröffnung des Circuls den Bogen KL, so ist der ganze Umriß fertig, den ihr

10. vermöge folgender Tafel dergestalt ausziehen könnet, daß ihr mit dem ganzen Umrisse in der Weite des Wallganges und der Brustwehre, imgleichen des Bankets, Parallellinien ziehet.

Namen der Theile.	Breiten.	Höhen.
	Schuh.	
Innere Böschung d. Mauer	1	12
der Erde	3	16
Der Wallgang	30	18
Das erste Banket	1½	1½
Das andere	3	1½
Innere Böschung d. Brustwehre	1	
Die äussere	2	
Die Brustwehre	19	von innen 4½ von aussen 1½
Der Graben	oben 114 unten 108	18

Auf-

Aufgabe.

89. **Die Tenaille vor der Curtine zu zeichnen.**

Auflösung.

1. Schneidet aus C in N und aus D bis O von den Defenslinien 18′ ab, und ziehet NP mit der Flanke CH parallel u. s. w. II.

2. Theilet FN in zwey gleiche Theile in Q (§. 90. Geom.); so ist QN die Face.

3. Lasset von Q auf die Defenslinie AH ein Perpendicul QT fallen (§. 70. Geom.). Dieses ist die Flanke.

4. Wenn ihr auf der andern Seite eben so verfahret, so giebet sich die Curtine TS, und ihr könnet, nachdem solchergestalt der Umriß fertig,

5. auf gewöhnliche Weise die Tenaille ausziehen, wenn ihr für den ganzen Wall bey der Curtine TS 30′, in den übrigen Theilen TN und SO 42′ rechnet, wovon die Brustwehre 18′ bekommet.

Anders.

Ihr könnet auch nur die einfache Tenaille OFN annehmen, und sie gehöriger maßen ausziehen.

Aufgabe.

90. **Das Ravelin und den halben Mond vor der Curtine zu zeichnen.** II.

Auflösung.

1. Setzet den Zirkel in H, und thut ihn auf bis D, und beschreibet den Bogen DV.

2. Setzet ihn darauf an das Ende der andern Defenslinie G, und beschreibet von dem andern Schulterwinkel C den Bogen CV.

3. An den Punkt des Durchschnittes V und den Schulterwinkel D leget das Lineal, so könnet ihr die Face VW und auf gleiche Weise die Face VX ziehen.

Solchergestalt ist des Ravelins Umriß fertig.

Verlanget ihr aber einen halben Mond, so

4. traget ferner aus W in Z 60′, und

5. lasset von Z auf WY das Perpendicul ZY fallen, (§. 69. Geom.).

6. Endlich führet in der Breite von 6′ den Graben herum.

Anmerkung.

91. Wenn man den Riß ausziehen, und ein Profil für das Ravelin verfertigen will, so brauchet man folgende Tafel:

Namen der Theile.	Breiten.	Höhen.
	Schuh.	
Innere Böschung	6	
Der Wallgang	$25\frac{1}{2}$	13
Das erste Banket	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$
Das andere	3	$1\frac{1}{2}$
Böschung der Brustwehre	1	
Die Brustwehre	15	von innen $4\frac{1}{2}$ von aussen $1\frac{1}{2}$
Aeussere Böschung des Walles	8	
Der Graben	oben 72 unten 68	12

Aufgabe.

II. 92. Die Brillen zu beyden Seiten des Ravelins oder halben Mondes zu zeichnen.

Auflösung.

1. Verlängert die Face des halben Mondes WV über den Graben, so daß ab $12\frac{1}{2}$ bis 15 Ruth. wird.

2. Hin-

2. Hingegen an dem großen Graben schneidet von d bis e 5 bis 6 Ruth. ab, so

3. könnet ihr die Linien ab und beziehen, welche den Umriß der Brille geben, und

4. endlich dieselben nach gewöhnlicher Art völlig auszihen.

Anmerkung.

93. Der Wallgang wird $15\frac{1}{2}$' breit, 8 Schuhe hoch gemacht: das übrige bleibet, wie vorhin (§. 91.). Der Graben ist oben 54', unten 51' breit und 8' tief.

Aufgabe.

94. Die kleine Brille zu zeichnen, welche zur Bedeckung des halben Mondes zwischen die grossen geleget wird. II.

Auflösung.

1. Schneidet für die Kehlen ef und hi $7\frac{10}{2}$ ab.

2. Machet mit der Weite von 10 Ruth. einen Durchschnitt in g aus f und i, so könnet ihr die Facen fg und gi ziehen.

3. Führet den Graben in der Weite von 20 Grad herum.

Anmerkung.

95. Die Brustwehre wird auf ebener Erde aufgerichtet, und bekommet der Wallgang keine Erhöhung.

Aufgabe.

96. Die Waffenplätze (Places d' Armes) in der Contrescarpe zu zeichnen.

Auflösung.

1. Nachdem ihr mit dem äußersten Graben den bedeckten Weg in der Breite von $36\frac{1}{2}$ (davon das erste Banket $1\frac{1}{2}$, das andere 8 bekommet, damit Raum für die Pallisaden vorhanden,) parallel her-

um gezogen: so schneidet für die Kehlen der Waffenplätze kl und km in den Schenkeln der einwärts gebogenen Winkel 5 R. ab, und

2. machet aus m und l mit der Weite von 6 R. einen Durchschnitt in n; so könnet ihr die Facen mn und ln ziehen.

Aufgabe.

II. **97. Die Traversen in der Contrescarpe zu zeichnen.**

Auflösung.

1. Nachdem ihr mit dem bedeckten Wege und den Facen der Waffenplätze in der Weite von 144′ das Glacis parallel herumgezogen (§. 67. Geom.) so ziehet eine Brustwehre nebst ihrem Banket mit den Facen des Waffenplatzes parallel, und zwar an demselben herunter, in der Weite von $1\frac{1}{2}$ bis 2 R. durch den ganzen bedeckten Weg, bis an das Glacis.

2. Damit ihr aber den Gang andeutet, der an dem Glacis gelassen wird, in den Waffenplatz zu kommen, so schneidet in das Glacis 3 bis 4′ ein.

3. Die Traversen op, welche an der Rundung des Grabens vor den Brillen in dem bedeckten Wege querüber geleget werden, damit man denselben nicht enfiliren oder frey bestreichen kann, ziehet mit dem vorigen parallel.

Aufgabe.

98. Ein Hornwerk zu zeichnen.

Auflösung.

I. 1. Wenn das Hornwerk vor die Curtine kommet, so
4. traget auf die Linie, die sie mitten rechtwinklicht durchschneidet, aus der Spitze des Ravelins 44 Ruthen. Kommet es vor das Bollwerk, so träget

man

man die Weite aus der Spitze des Bollwerks auf die verlängerte Capital.

2. Ziehet AB auf CD perpendicular, und machet AC = CB = 30 Ruth., CD = 10 Ruth., und BG = AH = 18 R.

3. Ziehet die Flanken GF und HE auf AF und BE perpendicular, so giebet sich zugleich die Curtine EF.

4. In der Weite von 5 Ruthen ziehet den Graben mit den Facen; die Brustwehre in der Weite von 18 Schuhen, den Wall in der Weite von 4 Ruthen, mit dem ganzen Umfange parallel.

Aufgabe.

99. Ein Profil zu zeichnen.

Auflösung.

1. Auf eine Linie Cb traget aus C in Q die Anlage der Böschung der Mauer, aus Q in R die Breite ihres Randes, aus R in D die Anlage der inneren Böschung, aus D in S die Breite des Wallganges, aus S in T und aus T in V die Breite des Bankets, aus V in W die Anlage der inneren Böschung der Brustwehre, aus W in X die Breite der Brustwehre, aus X in Y ihre äussere Böschung, aus Y in M die Breite des Randes, und aus M in N die Anlage für die Böschung der Futtermauer, aus N in Z die Anlage der inneren Böschung des Grabens, aus Z in b die Breite des Grabens, und so weiter fort bis auf die Anlage des Glacis (§. 88. 91. 96. 97. I. I.

2. Richtet überall Perpendicularlinien auf, und machet QP = BR der Höhe der inneren Mauer, AD und SE der Höhe der Banketen, Lc der inneren und Od der äusseren Höhe der Brustwehre, dX

aber GY und MH der Höhe der äusseren Mauer, Za der Tiefe des Grabens u. s. w. gleich; so könnet ihr

3. das Profil ausziehen, wie aus der Figur zu ersehen.

Aufgabe.

III. 100. **Den Grundriß, nach Vaubans verstärkter Manier zu fortificiren, zu machen.**

Auflösung.

1. Beschreibet mit dem großen Radio einen Circul, und traget die äussere Polygon darinnen herum in der Grösse von 90 Gr.

2. Theilet sie in zwey gleiche Theile in F, und richtet daselbst das Perpendicul FC auf (§. 70. Geom.), von eben der Grösse, wie in der vorigen Manier (§. 88.).

3. Ziehet die Defenslinien AB und BG, schneidet wie vorhin (§. 88.) die Facen AD, BE ab, und determiniret aus D und E mit der Weite ED die Punkte P und G; so könnet ihr die Flanken DG und EP ziehen, auch mit der Weite von 12' sowohl die Tenaille von den Bollwerken durch den Graben IYPE und DGLH, als mitten bey C ihre beyden Theile von einander selbst absondern.

4. Damit ihr aber die Bollwerke absondert, so ziehet durch die Enden der Flanken P und G mit den Facen EB und AD die Parallellinien GM und PK (§. 67. Geom.).

5. Ziehet ferner mit GP in der Weite von 3 bis 4 Ruth. die innere Polygon NO parallel, und in eben der Weite der Defenslinie TQ mit PK parallel.

6. Schneidet für die Face QR 5, 6 bis 7 Ruth. ab, und

7. zie-

7. ziehet die Flanke RS entweder auf die Curtine perpendicular (§. 69. Geom.), oder mit der Flanke EP parallel (§. 67. Geom.).

8. Setzet hierauf den Zirkel in die Bollwerkspünte B, und beschreibet in der Weite von $9\frac{1}{2}$ Ruthen den Bogen V, so könnet ihr den Graben auf gewöhnliche Weise ziehen.

9. Traget aus den Schulterwinkeln E und D in Z 5 bis 6 Ruth., und machet aus ihnen in der Weite von 22 Ruth. einen Durchschnitt in c; so könnet ihr aus c gegen Z die Facen des Ravelins cd und und cf ziehen.

10. Mit diesen ziehet gegen die Schulterwinkel die Facen des inneren Ravelins be und bg parallel und

11. sondert es mit einem Graben von $3\frac{1}{2}$ von dem äusseren ab, und um das große ziehet einen Graben von doppelter Breite.

12. Die Waffenplätze und Traversen in der Contrescarpe nebst dem bedeckten Wege und Glacis werden wie in der vorigen Manier (§. 96. 97.) gezeichnet.

Ende des andern Theils der Fortification.

Der dritte Theil der Fortification,

von

der irregulären Fortification, den Citadellen und Feldschanzen.

Erklärung.

101.

Reguläre Festungen werden genennet, in welchen alle gleichnamige Linien und Winkel von einerley Grösse sind.

Anmerkung.

102. Es werden die regulären Festungen erbauet, wenn der Platz eine reguläre Figur hat. Und ist eben die reguläre Fortification, welche in dem vorhergehenden andern Theile beschrieben worden.

Erklärung.

103. **Eine irreguläre Festung heisset diejenige, in welcher die gleichnamigen Linien und Winkel nicht einerley Grösse haben.**

Aufgabe.

104. **Einen irregulären Platz zu fortificiren, da die Seiten eine geschickte Länge und die Winkel eine geschickte Grösse haben.**

Auflö-

Auflösung.

1. Auf eure irreguläre Polygon AB richtet mit der regulären Polygon AC einen gleichschenklichten Triangel ACB auf. I. 5.

2. Traget aus C auf CD die nöthigen Linien CD CE &c. die ihr zum Aufrisse der regulären Festung brauchet.

3. Endlich ziehet durch die Punkte D, E, die Linien DF, EG, u. s. w. mit AB parallel.

Diese sind die zu dem Grundrisse der irregulären Festung nöthige Linien.

Beweis.

Man soll erweisen, daß, wie die zum Risse nöthigen Linien sich in der regulären Fortification zu ihrer Polygon, also auch die gefundenen gleichnamigen für den Riß in der irregulären Festung zu ihrer Polygon verhalten. Nun ist DF und EG mit AB parallel gezogen worden. Derowegen ist

$$CA : AB = CD : DF, \text{ und}$$
$$CA : AB = CE : FG$$

(§. 149. Geom.), folgends

$$CA : CD = AB : DF \text{ und}$$
$$CA : CE = AB : EG$$

(§. 83. Arithm.) W. Z. E.

Anmerkung.

105. Die Linien werden für geschickt gehalten, wenn sie zwischen 80 und 100 Gr. fallen, nach zwölffüßigen Maaße.

Zusatz.

106. Wenn die irreguläre Polygon eine Linie, die zwischen 80 und 100 Ruth. fället, mehr als einmal in sich begreifet, so wird sie in etliche Polygone eingetheilet, und bekommen einige Bollwerke eine gerade Kehle.

Zusatz.

107. Solchergestalt muß eine Linie, die in zwey äussere Polygonen eingetheilet werden soll, nicht unter 160 zwöffüßigen Ruthen seyn.

Aufgabe.

108. Eine Linie zu fortificiren, die unter 169, jedoch aber über 100 Ruth. hat, oder die für ein Bollwerk zu groß, für zwey zu klein ist.

Auflösung.

Der Herr Sturm giebet in seinem Veritable Vauban lib. 4. c. 1. §. 4. p. 171. folgende Auflösung.

I. 6. 1. Theilet die Seite AB in zwey gleiche Theile in C, und richtet den Perpendicul CD von 15 bis 20 Ruthen auf.

2. Verlängert CD in O bis CO 50 Ruth., und machet die Winkel KOD und DOM von 50 Ruth.

3. Nehmet GE und FH jedes 8 R. an, und ziehet EI und LF mit KG und MH parallel in der Grösse von 20 Ruth.

4. Endlich durchschneidet mit der Weite HL aus H die Linie OH in M, und mit der Weite GI aus G die Linie OG in K, so geben sich die Flanken KI und LM.

Oder:

I. 7. 1. Beschreibet die Bollwerke DCA und FEB dergestalt, daß die Defenslinien einander mitten in der Curtine durchschneiden.

2. Verlängert sie über die Curtine nach Gutbefinden, und richtet

3. die Flanken GH und KI zur Defension der Facen FE und DC darauf perpendicular auf.

Auf-

Aufgabe.

109. **Eine Linie zu fortificiren, die allzukurz ist.**

Auflösung.

Da nach regulärer Art eine allzukurze Linie zu fortificiren unmöglich ist, weil die Bollwerke allzukleine Flanken und öfters auch gar spitzige Winkel bekommen würden, so kann man sie nach Gelegenheit nur dergestalt einschneiden, daß die Theile von den anliegenden Werken, und diese wieder von ihnen können defendiret werden. Im übrigen muß man zu den Aussenwerken seine Zuflucht nehmen.

Aufgabe.

110. **Einen allzuspitzigen Winkel zu fortificiren.**

Auflösung.

Wenn er nicht unter 60 Gr. ist, und die andern Umstände leiden es, so könnet ihr ihn zum Bollwerkswinkel annehmen, und dannenhero die Facen an den beyden Seiten der Figur, die ihn einschliessen, abschneiden, und von deren Ende die Flanken herunter ziehen.

Er mag so spitzig seyn, als er will, so könnet ihr ein Hornwerk darauf setzen.

Wenn die Schenkel des Winkels sehr lang sind, so lasset den Winkel, wie ihr ihn findet, und leget zu seiner Defension zu beyden Seiten halbe Bollwerke an.

Aufgabe.

111. **Einen einwärts gebogenen Winkel zu fortificiren.**

Auflösung.

Einen einwärtsgebogenen Winkel pfleget man öfters zu lassen, wie er ist, und nur mitten ein Ravelin hinzulegen. Oder man ziehet die beyden Winkel zur

Seiten

Seiten zusammen, und nimmt sie für die Polygon an, wenn sie groß genug ist.

Erklärung.

112. Die Castelle oder Citadelle sind kleine Festungen, die man an die großen Städte leget, um dadurch sowohl die Einwohner im Gehorsam zu erhalten, als auch die Festungen zu verstärken.

Anmerkung.

113. Wenn ihr eine Citadelle an eine Festung legen wollet, so zeichnet sie vorher auf dem Papiere besonders. Man nimmt aber dazu wenigstens ein reguläres Viereck; höchstens ein Sechseck. Schneidet den Riß aus, und verschiebt ihn auf dem Risse der Festung so lange, bis 2 Bollwerke in die Stadt hineinkommen. Merket mit Punkten, wo sie die Festung durchschneidet, so sehet ihr, was von der Festung niedergerissen werden muß, und ihr könnet den Riß in eins bringen.

Erklärung.

114. Feldschanzen heissen alle Werke, die auf dem Felde entweder zur Versicherung eines Passes, oder zu einer sicheren Retirade, oder zu Defendirung der Linien, welche man um das Lager gezogen, oder aus andern Absichten in der Eile aufgeworfen werden.

Anmerkung.

115. Weil sie keine Belagerung gleich den Festungen ausstehen dürfen, so können ihre Brustwehren auch viel schwächer, und ihre Graben viel kleiner als an der Festung seyn (§. 2.); wie aus folgenden Täfelein zu ersehen:

Namen.	Breiten.	Höhen.
	Schuh.	Schuh.
Der Wallgang	14—18	3—6
Die Brustwehre	9—10	6—7
Das Banket	3	$1\frac{1}{2}$
Der Graben	24—30	8—10

Erklä-

Erklärung.

116. Wenn das Werk die völlige Figur eines rechtwinklichten Viereckes hat, nennet man es eine Redoute.

Erklärung.

117. Eine Schanze, die aus lauter Scheeren zusammengesetzet ist, wird eine Sternschanze genennet.

Aufgabe.

118. Eine dreyeckichte Feldschanze zu zeichnen.

Auflösung.

1. Theilet die Weite des gleichseitigen Dreyeckes AB in zwey gleiche Theile in D, imgleichen in fünfe (§. 154. Geom.). I. 8.

2. Machet die Kehlen Dg und De, imgleichen die Flanken gh und $ef = \frac{1}{5}AB$.

3. Ueber hf beschreibet einen halben Circul, und theilet ihn in zwey gleiche Theile in i, so geben sich die Facen hi und if.

Aufgabe.

119. Eine Redoute zu zeichnen.

Auflösung.

Zeichnet ein Quadrat, dessen Seite ohngefähr 12° lang (§. 98. Geom.), oder ein Rectangulum, dessen eine Seite 12 bis 20, die andere nur 2 R. ist (§. 99. Geom.), und ziehet darum den Graben, inwendig aber die Brustwehre mit ihrem Bankette und den Wallgang, wie in folgendem Täfelein zu finden.

Namen.	Breiten.			Höhen.		
D. äussere Böschung	$1\frac{1}{2}$	oder	$\frac{3}{4}$			
D. innere Böschung	$\frac{1}{2}$					
Der Wallgang	14			3 oder		$1\frac{1}{2}$
D. äussere Böschung der Brustwehre	3		2			
Die innere	1					
				innen	6	
Die Brustwehre	5		4	aussen	4	
Die Berme	3		1			
Der Graben	20		8	6		5

Die in der anderen Reihe befindliche Zahlen werden für kleine Redouten genommen.

Aufgabe.

I. 4. 120. Eine viereckichte Feldschanze zu zeichnen.

Auflösung.

1. Beschreibet auf einer Linie von ohngefähr 15 Ruth. ein Quadrat (§. 98. Geom.).
2. Theilet jede Seite in zwey gleiche Theile in C (§. 90. Geom.).
3. Richtet in C ein Perpendicul CD auf (§. 70. Geom.) $= \frac{1}{7}$ AB, und ziehet die Defenslinien AF und BE.
4. Von ihnen schneidet die Facen AH und BG ab $= \frac{1}{3}$ AB.
5. Endlich lasset die Flanken FG und EH auf die Defenslinien perpendicular herunter fallen (§. 69. Geom.); so könnet ihr auch die Curtine ziehen.

Aufgabe.

121. Eine fünfeckichte und sechseckichte Feldschanze zu zeichnen.

Auflö-

Auflösung.

1. Beschreibet auf einer Linie von 15 Ruthen ein reguläres Fünfeck oder ein Sechseck (§. 106. Geom.).
2. Im übrigen verfahret wie vorhin (§. 120.) nur daß ihr den Perpendicul CD $\frac{1}{6}$ von AB gebet.

Aufgabe.

122. Eine Sternschanze zu zeichnen.

Auflösung.

1. Beschreibet ein Vier- Fünf- oder Sechseck (§. 98. 106. Geom.).
2. Fället das Perpendicul CD, wie vorhin (§. 120.); so könnet ihr die Tenaille ADB ziehen.

Aufgabe.

123. Eine halbe Redoute zu zeichnen.

Auflösung.

1. Theilet eine gerade Linie von 20 Ruth. in 4 gleiche Theile (§. 154. Geom.).
2. Ueber den mittleren beyden Theilen richtet mit einer Seite von 7 Ruth. einen gleichschenklichten Triangel auf (§. 54. Geom.). So ist der Umriß der halben Redoute fertig.

Ende des dritten Theils der Fortification.

Der vierte und letzte Theil der Fortification, von den Attaken und der Gegenwehre wider dieselben.

Erklärung.

124.

Circumvallations-Linien sind eine Brustwehre mit einem Graben, die der Feind um sein Lager gegen das Feld aufwirfet.

Zusatz.

125. Sie hindern also, daß niemand in das Lager von aussen hineinkommen kann, und müssen zur Defension hin und wieder halbe und ganze Redouten oder auch andere Feldschanzen aufgeworfen werden (§. 118. u. f. w.).

Zusatz.

126. Sie sind also nöthig, wenn der Feind in der Nähe campiret, und man vermuthet, er werde durch einen Succurs die Festung zu entsetzen suchen.

Anmerkung.

127. Die Höhe der Brustwehre ist 5 bis 6′ oder auch wohl 8 bis 9′, die Dicke 8 bis 10′. Sie bekommen 2 bis 3 Bankette. Die Breite des Grabens ist 10 bis 12′, die Tiefe 5 bis 6′. Die Feldschanzen werden in der Weite von zwey Musketenschüssen an die Linien geleget, damit man von beyden das Mittel erreichen kann.

Erklä-

Erklärung.

128. **Contravallationslinien sind eine Brustwehre mit einem Graben, die der Feind gegen die Festung aufwirfet.**

Zusatz.

129. Sie hindern also, daß die Belagerten, wenn sie einen Ausfall thun, nicht in das Lager dringen können, und werden daher gebrauchet, wenn eine starke Besatzung in der Festung lieget.

Anmerkung.

130. Alle Werke, die der Feind aufwirfet, theils sein Lager zu verschanzen, theils sich sicher der Festung zu nahen, pfleget man zusammen Trencheen zu nennen.

Anmerkung.

131. Wenn ein starker Fluß durch die Stadt fließet, so wird eine Brücke über ihn geschlagen, damit die Quartiere von beyden Seiten mit einander Communication haben. Zu ihrer Bedeckung und Defension werden an beyden Ufern Werke aufgeworfen.

Erklärung.

132. **Approchen oder Laufgraben sind Graben mit einer Brustwehre gegen die Festung zu, darinnen man sicher bis an die Contrescarpe gehen kann.**

Aufgabe.

133. **Die Approchen zu führen.**

Auflösung.

1. Commandiret des Nachts einige Mannschaft mit Gewehre versehen in der Weite von 70 bis 75 Ruth. von der Festung, und stellet sie 3 bis 5′ weit von einander in einer gegen die Festung schiefen Linie, die ihr mit einem ausgespannten Stricke, 30, 40 bis 50 und mehrere Schuhe lang bezeichnet. Lasset dieselbe sich geschwinde 3′ tief in die Erde eingra-

ben, und das ausgegrabene Erdreich gegen die Festung zuwerfen, damit sie dorthin bedecket sind, und die Belagerten die Approche nicht bestreichen können.

2. Diesen kleinen Graben lasset durch andere erweitern, so daß er endlich eine Breite von 10 bis 12′ bekommet, und die ausgegrabene Erde alle gegen die Festung zuwerfen. Die Tiefe muß wenigstens 3′ bleiben, kann aber auch wohl 6 bis 7′ werden, nach Beschaffenheit des Erdreichs.

IV. 9. 3. An das Ende der Linie leget eine Redoute A, oder einen Waffenplatz, damit sich die Mannschaft darinnen aufhalten kann, den Approchirern zu succuriren, wenn Ausfälle geschehen, oder auch diese sich darein retiriren können.

4. Von der andern Seite ziehet wieder eine dergleichen Linie, und denn wieder zurücke noch eine andere u. s. w. bis ihr endlich an das Glacis der Contrescarpe kommet.

5. Zwischen die Approchen könnet ihr Batterien D legen, um nach und nach die Brustwehren der Festung davon zu bestreichen, und aus Mörsern mit Bomben und Granaten auf die Werke oder in die Stadt selbst zu spielen.

Anders.

Wenn der Boden sandicht, felsicht oder morastig ist, so setzet sie aus Schanzkörben in einer geraden Linie gegen die Face, die ihr attakiren wollet, zusammen, viel weiter als die vorigen, in Gestalt lauter hinter einander gelegter Redouten.

Anmerkung.

IV. 9. 134. Zuweilen werden die Approchen doppelt geführet, und mit Communicationslinien BC an einander gehänget.

Erklä-

Erklärung.

135. Die Batterie ist eine Bettung für die Stücke an einer Brustwehre mit Schießscharten.

Aufgabe.

136. Eine Batterie zu zeichnen.

Auflösung.

1. Wenn ihr wisset, wie viel Stücke auf eine Batterie gepflanzt werden sollen, so traget auf eine Linie AB für jedes Stücke 12′, und verlängert sie beyderseits aus B in D und A in C um 6′, daß also die ganze Linie DC für eine Batterie von 3 Stücken 4 Ruthen ist. IV. 10.

2. Traget aus D in E und C in F auf die Perpendicularlinien DI und CK 15 bis 24′ für die Brustwehre, darein die Schießscharten kommen: ferner aus E in G, und aus F in H, nach Beschaffenheit der Länge der Stücke, ohngefähr 15 bis 18′ für die Breite der eichenen oder fichtenen Breter, damit die Bettung für die Stücke gemacht wird, und endlich aus G in I und H in K noch so viel Schuhe, als das Stück für seine Länge und zu dem Zurücklaufen erfordert, nemlich 10 bis 15′, daß die Linie EI ohngefähr 30′ ist.

3. Mit den Linien DC, CK, KI und ID ziehet in der Weite von 5′ die Böschung parallel, und ferner mit diesen auf den drey Seiten, wo die Brustwehre ist, in der Weite von 4′ andere Parallellinien, welche die Berme vorstellen.

4. Theilet die Linien MN in 2 gleiche Theile in L (§. 90. Geom.), und traget aus L beyderseits in O 5 bis 6′ für die Breite der Auffahrt.

5. Aus O richtet die Perpendicularen OP auf, welche der Böschung von der Auffahrt gleich sind, und also ohngefähr 4′.

6. Lasset unten einen Platz so groß als die Batterie MQRN.

7. Zu der rechten der Auffahrt machet ein Quadrat W, dessen Seite 10′ hält (§. 98. Geom.) den Keller zu bedeuten, darinnen das Pulver verwahret wird.

8. Theilet abermals die Linie QR in 2 gleiche Theile in S, und traget aus S in T und V für den Eingang beyderseits 5 bis 6′.

9. Ziehet in der Weite von 8 bis 10′ einen Graben um die ganze Batterie mit den Seiten parallel herum (§. 67. Geom.).

10. Traget aus b in c 5′, aus c in d 2′, und denn ferner wechselsweise 8 und 4′, bis endlich hinten wiederum ea 5′ übrig bleibet.

11. Hingegen auf der Linie BA traget aus B in f 2′, aus f in g 8′, und denn ferner wechselsweise 8 und 4′, bis endlich hinten wiederum hA 2′ übrig bleibet.

12. Ziehet die Theilungspunkte der beyden Linien AB und ab durch gerade Linien zusammen, so geben sich die Schießscharten.

Anmerkung.

137. Wenn die Batterie wirklich gebauet wird, so werden die Breter auf Balken genagelt, und der Raum hinter den Bretern wird mit geflochtenen Decken beleget, damit die Räder nicht in die Erde einschneiden, und man desto reinlicher auf der Batterie herum gehen kann. Es werden aber um des Zurücklaufens der Stücke willen die Balken an der Brustwehre etwas niedriger als hinten geleget. Sonst liegen sie von einander nach der Breite der Batterie 8 bis 10′.

Anmerkung.

138. Die Höhe der Batterie richtet sich nach der Höhe der Gegend. Die Brustwehre ist 6′ hoch, davon bekommen die Schieß-

Schießscharten 3′ zu ihrer Höhe; die Tiefe des Grabens ist gleichfalls 6′.

Erklärung.

139. Sappiren heisset die Contrescarpe durchbohren, um einen bedeckten Gang in den Graben zu bekommen.

Aufgabe.

140. Die Contrescarpe mit Sturm zu erobern.

Auflösung.

1. Wenn ihr euch der Contrescarpe bemeistern wollet, so suchet vorher von euern Batterien durch stetes Feuern alle Oerter der Festung zu ruiniren, daraus der Ort, auf welchem die Attake gerichtet ist, defendiret werden kann.

2. Erkundiget euch zuvor, ob die Contrescarpe unterminiret ist, entweder durch Spionen, oder durch Ueberläufer, wenn die Beschaffenheit der Festung euch vorhin nicht bekannt ist. Denn wenn Minen vorhanden, müsset ihr an dem Orte, wo die Soldaten zum Sturm sich versammeln, 3 bis 4 Gruben 18 bis 20 Fuß tief graben, wenn es wegen des Wassers geschehen kann, und aus diesen Gruben Gänge gegen die Pallisaden 5′ hoch und 3′ breit führen, um die Minen zu entdecken.

3. Lasset die Grenadier häufig Granaten in den bedeckten Weg werfen, und brechet mit Macht ein.

4. Machet euch aber bald eine Bedeckung mit Faschinen und Schanzkörben ABCD und Sandsäcken. IV. 11.

Zusatz.

141. Wenn es unmöglich fället, den Feind aus der Contrescarpe zu schlagen, so müssen die Belagerten

entweder durch Capitulation die Festung dem Feinde übergeben, und der Belagerung ein Ende machen, oder den Feind die Attake continuiren lassen, und sich aus der Contrescarpe in das nächst gelegene Werk retiriren.

Aufgabe.

142. Durch Sappiren der Contrescarpe sich zu bemeistern.

Auflösung.

1. Führet gerade gegen den Schulterwinkel zu von den letzten Approchen an durch das Glacis einen so weiten Gang, daß 2 bis 3 Musketier zugleich neben einander darinnen gehen können, der aber nirgend von der Festung enfiliret werden kann.

2. Bedecket ihn gegen die Seiten mit der Erde, welche ausgegraben wird, von oben mit Faschinen und andern Blendungen, damit man vor dem Feuern der Belagerten darinnen sicher ist.

3. Leget wechselsweise Traversen darein, damit desto mehrere Bedeckung in ihm ist.

So ist die Sappe fertig, und dadurch die Contrescarpe geöffnet, daß man sich darein logiren kann.

Erklärung.

143. Der Gang, den sich der Feind über den Graben machet, wird die Gallerie genennet.

Aufgabe.

144. Eine Gallerie über den Graben für die Minirer zu machen.

Auflösung.

1. Ruiniret vorher die Flanken, welche die Face defendiret, so unterminiret werden soll, durch die Gewalt eurer Kanonen von euern Batterien.

2. Fül-

2. Füllet den Graben mit Faschinen, darein ihr schwere Steine gestecket, damit sie untersinken. Denn die Faschinen werden aus Weiden zusammengebunden.

3. Auf den angefülleten Gang richtet die Joche auf, die 6, 7 bis 8′ hoch, und $4\frac{1}{2}$ bis 5′ breit sind.

4. Darüber machet ein Dach von Bretern, 2 Zoll dicke und mit Blech beschlagen, damit es das Feuer nicht anzünden kann, und was von dem Walle daraufgeworfen wird, herunter fället.

5. Auf der Seite, wo sie von dem Walle beschossen werden kann, verschlaget sie mit eben solchen Bretern, und versetzet sie mit Schanzkörben: auf der andern Seite aber könnet ihr mit schlechten Bretern zufrieden seyn.

Zusatz.

145. Wenn ihr mit der Gallerie bis an die Face des Bollwerkes gekommen, so müsset ihr die Lücke an der Böschung gleichfalls mit einem Dache verdecken, damit niemand hinein sehen kann, und ihr sicher hinein gehen könnet, wohin ihr wollet.

Zusatz.

146. Wenn die Breche zum Stürmen bequem ist, ohne daß sie erst durch Unterminiren erweitert werden darf, so hat man dergleichen Gallerie nicht nöthig, sondern darf nur den Graben füllen, damit man unter stetem Kanoniren auf die Werke, welche die beängstigte Linie defendiren sollen, Sturm laufen kann.

Anmerkung.

147. Wenn es so weit gekommen, daß alles zum Hauptsturm fertig, pflegen die Belagerten gemeiniglich die Chamade zu schlagen, und durch Accord die Festung dem Feinde zu übergeben.

147a) Umständlich von dem Angriffe und Vertheidigung der Festungen handelt Struensee in dem dritten Theile seiner Anfangsgründe. Die Sache ist zu weitläuftig, und beruhet zum Theil mit auf den Grundsätzen der Kriegskunst, daß wenn ich das wenige, was Wolf davon beygebracht hat, auch noch mit Zusätzen hätte versehen wollen, einige Bogen nicht würden hingereicht haben, nur das allgemeinste eines so erheblichen Gegenstandes vorzutragen.

Ende der Fortification.

Anfangs-Gründe der Baukunst. *)

Der erste Theil.

Von den Baumaterialien.

I. Bauholz.

§. 1.

Hierher gehörige Holzarten sind, 1) das Eichenholz, brauchbar im Wasser und im Trockenen zu Schwellen, Petten und Mauerlatten, zu kurzen Riegelhölzern und Bügen oder Streben, zu Säulen oder Pfosten und Pfählen,

*) Hieher gehörige Schriften: **Goldmanns**, vollständige Anweisung zur Civilbaukunst 1696. gr. Fol.

Angermanns, allgemein praktische Civilbaukunst.

Penthers, Anleitung zur bürgerlichen Baukunst.

Reuß, Anweisung zur Zimmermannskunst.

Schillingers, Zimmermannskunst.

Refernsteins, Anfangsgründe der bürgerlichen Baukunst, für Landleute.

Borhecks, Entwurf einer Anweisung zur Landbaukunst.

Dochs, deutliche Anweisung zur Verfertigung der Bauriße.

Huths, allgemeiner und gründlicher Unterricht zu Bauanschlägen.

Holschens, Grundsätze zur Anfertigung richtiger Bauanschläge.

Schmidts, bürgerlicher Baumeister.

Succows, erste Gründe der bürgerlichen Baukunst.

Von

len; zu Gerinnen oder Fluthern, zu den Wellbäumen, Fe[illegible]chen und Aermen aller Arten von Rädern, zu Trögen in den Stampfmühlen, zu den Stielen der Hämmer in den Hammerwerken u. d. g. 2) Der **Lerchenbaum**, unter unserem Nadelholze das vorzüglichste, im Wasser wie im

Von Cancrin, Grundlehren der bürgerlichen Baukunst 1792.

Vignola, bürgerliche Baukunst, mit Anmerkungen von Fäsch 1795.

Steiners, acht Kupfertafeln zu feuerfesten Gebäuden 1795.

Frhr. Carl von Dalberg, Versuch einiger Beyträge über die Baukunst. Erf. 1792.

Menger, ökonomische Bauwissenschaft für den Landmann. Leipz. 1785.

V. Goldfuß, feuersicherer und dauerhafter Häuserbau von wohlfeilen Lehmpatzen. Dresd. 1794.

Cointeraux, Schule der Landbaukunst, Hildsh. 1794.

Gilly, Beschreibung der feuerabhaltenden Lehmschindeldächer. Berl. 1796.

Börhke, Beyträge zur Lehre, wie man mit möglichster Schonung des Holzes alle Landgebäude, wohlfeil, dauerhaft und sicher bauen kann. Berl. 1795.

Meinert, landwirthschaftliche Baukunst, Halle 1796.

Grundsätze der bürgerlichen Baukunst, in 3 Theilen aus dem Italiänischen. Leipz. 1784. — 1786.

Klügel und Büsch, Anleitungen zur bürgerlichen Baukunst.

Schriften, welche einzelne Gegenstände abhandeln.

V. Cancrin, einzelne Bauschriften.

Dinglingers, beste Art Kornmagazine anzulegen.

Dochs, häufige Schriften.

Langsdorf, Beytrag zur Theorie der Festigkeit der Kornmagazine, unter den im Jahr 1795. an die Soc. d. Wiss. zu Harlem eingeschickten Abhandlungen.

V. Pöll-

im Trockenen brauchbar, für abwechselnde Nässe und Trockenung aber nicht so tauglich als die Eiche, zu Balken und Durchzügen oder Trägern das beste Holz. 3) Die **Weißtanne, Edeltanne**, nächst dem Lerchenbaum zum Bauen im Trocknen das beste Holz zu Balken, Sparren, Latten und Diehlen; das Holz ist viel weiser als das des Lerchenbaums, übrigens nicht halb so fest als letzteres. 4) Die **Rothtanne**, Fichte, hat fast nie so schönes Holz, als die Weißtanne, dauert auch nicht so lange, ist aber etwas fester, und wird wie letztere benutzt. 5) Die **Ulme** kann im Wasser und im Nothfall auch in freyer Luft wie die Eiche benutzt werden, vorzüglich bey oberschlächtigen Rädern zu den Schaufeln

V. Pöllnitz, Abhandlung über die Theorie der Festigkeit der Materialien.

Neuer Versuch, Schornsteine und Ofenkamine zu verbessern. 1795.

Schütte, über Wirthschaftsgebäude und Bestimmung, der Grösse derselben. 1795.

Bürjas, mathematischer Mahler. 1795.

Preißlers und Ihlens, Anweisung zur gründlichen Zeichenkunst, für junge Leute und Liebhaber aus allen Ständen. 6 Hefte in Fol. 1795.

Sulzers, Theorie der schönen Künste.

Lambert, (in seinen Beyträgen zum Gebrauche der Math.) wie eine gute Kenntniß des höhern Kalkuls auch in der Baukunst ihre Anwendung findet.

Succows, mineralogische Beschreibung der Baumaterialien 1788.

Desselben, Abhandlung über verschiedene Fehler der bürgerlichen Baukunst. 1775.

Wiedemann und Emmerling, mineralogische Anleitungen.

Huths, allgemeines Magazin für die bürgerliche Baukunst.

feln brauchbar, weil es sich nicht so wie das Eichenholz wirft. 6) Die **Buche, Rothbuche**, verliehrt seine Festigkeit, welche anfänglich die der Eiche noch übertrift, in freyer Luft bald, und ist dem Wurmstich und Faulen mehr als andere Holzarten ausgesetzt, daher besonders nur zu Maschinentheilen brauchbar, die keiner Beugung vom Druck einer Last ausgesetzt sind, und ohne Schwierigkeit leicht ausgewechselt werden können z. B. zu Stempeln in Stampfmühlen, zu Hebeköpfen und Daumen. Brauchbarer ist sie unter Wasser, und eben darum auch nutzbar zu Schaufelbretern bey Wasserrädern, zu Pumpenstiefeln, zu Pumpenkolben, zu Verbindungsfäßchen metallener Röhren u. d. g. 7) Die **Förle, Kiefer**, fester als die Fichte, vorzüglich brauchbar im Wasser, auch zu Röhrenleitungen u. d. g. kann auch sonsten im Nothfall statt der Tanne und Fichte gebraucht werden, hält aber die abwechselnde Witterung nicht so gut aus. 8) Die **Erle, Eller** hauptsächlich zu Röhrenleitungen. 9) **Weißbuchen**, nur beym Maschinenbau brauchbar, besonders zu Rollen, Schrauben, Spindeln in den Trillingen, Kämmen und Zähnen in den Rädern. 10) Der **Weißdorn** ist zu gleicher Absicht unser bestes Holz. 11) Die **Aspe**, 12) die **Birke**, und 13) die Saalweide dienen hauptsächlich zu hölzernen Nägeln.

§. 2.

Holz zum Wasserbau, das beständig von allen Seiten feucht bleibt, kann zu allen Zeiten gefällt und sogleich gebraucht werden. Zu trockenen Gebäuden soll es im Herbst unten ringsherum angehauen, und noch im Winter gefällt, dann nach Beschaffenheit und Dicke der Stämme 1 auch 2 Jahre im Schatten dem Durchzug der Luft ausgesetzt werden. Auch empfehlen v. **Büffon** und v. **Zanthier** die Stämme vor dem Fällen im Frühjahr zu schälen, und sie dann erst den folgenden Winter zu fällen.

II. Bausteine.

§. 3.

Zu den natürlichen Bausteinen gehören der dichte Kalkstein, der körnige Kalkstein, der Stinkstein, der bituminöse Mergelschiefer, der dichte Gips, der erhärtete Thon, der Thonschiefer, der Hornblendeschiefer, der Basalt, der Serpentin, der verhärtete Talk, der Flintstein, der Granit, der Gneis, der Sienit, der Glimmerschiefer und Gestellstein, der Porphyr, der Mandelstein, die Breccien und Sandsteine. Die nähere Beschreibung dieser Steine gehört in die Oryktognosie.

§. 4.

Zu den künstlichen Bausteinen gehören die Mauer- und Dachziegeln, die Leimensteine oder Lehmpatzen, die Leimenschindeln oder Lehmschindeln, und die Steinpappe.

§. 5.

Die Mauer- und Dachziegeln werden aus einem etwas sandigen, gewöhnlich auch etwas eisenhaltigen Thon, oder dem sogenannten Leimen verfertigt, welchen man vor seinem Gebrauch den Winter über dem Frost aussetzt, um ihn in seinen kleinern Theilchen durch das Gefrieren zu zerlegen, dann im Frühjahr und den Sommer über in einzelen Quantitäten von beygemengten Steinchen gereinigt, indem er mit Wasser vermischt in kleinen Gruben getreten wird. Hiernächst wird der gereinigte Leimen in Formen gestrichen, die geformten Steine auf belatteten Gerüsten dem freyen Durchzug der Luft im Schatten zum Trocknen ausgesetzt, und nach gehöriger Trocknung in den Ofen gebracht, wo sie durch die Hitze ihre Steinhärte erhalten.

Die

Die **Leimensteine** werden auf gleiche Weise verfertiget, nur daß sie der Trocknung länger ausgesetzt bleiben, und nachher ungebrennt verbraucht werden. Auch wird vor ihrer Verfertigung der noch weiche Leimen mit Ähnen oder kleingehackten Roggenstroh möglichst gleichförmig vermischt. Begreiflich braucht auch der Leimen selbst nicht so gereinigt zu seyn.

Die **Leimenschindeln** sind eigentlich mit Leimen bedeckte Strohdecken, etwa 3 Fus lang, $2\frac{1}{2}$ Fuß breit. Auf einen mit Leisten beschlagenen Tisch wird Roggenstroh etwa 3 Zoll hoch aufgedruckt, an der vordern Kante des Tisches ein $3\frac{1}{2}$ Fus langer Stab angelegt, und nun, nachdem man von dieser Kante an rückwärts das Stroh etwa auf 1 oder $\frac{5}{4}$ Fus lang mit wohl gereinigtem weichen Leimen 1 Zoll hoch bedeckt hat, das vorne herabhängende Ende des Strohes mit einem zweyten Stab übergeschlagen, so daß es nun den ersten in einer Höle in sich faßt; dieses übergeschlagene Ende des Strohes wird auf den Tisch, nämlich auf den schon erwähnten Leimenüberzug aufgedruckt, und dann die ganze obere etwa 3 Fus lange Fläche noch vollends mit Leimen überstrichen, so daß jetzt die ganze Strohdecke oder die ganze Leimenschindel auf ihrer obern Seite 1 Zoll hoch mit Leimen überzogen ist. Der erste Stab sticht nun auf jeder Seite der Hölung um 3 Zoll hervor, und diese beyden hervorstechende Enden dienen, um diese Schindeln an den Latten eines Dachs mit Weiden fest binden zu können. Sie werden dann mit der überstrichenen Seite auf die Latten gelegt, so daß die noch unbestrichene zur Aussenseite genommen wird, die aber bey der untersten Schindelreihe eines Dachs gleichfalls durchaus, und bey den übrigen Reihen, während dem Legen, etwa nur zur Hälfte, von oben oder von der Schindelhölung herabgerechnet, 1 Zoll dick mit dem Leimen angestrichen werden.

Diese Leimenschindeln gehören, in Rücksicht auf den Landbau, zu den wichtigsten neuern Erfindungen der

Bau-

Baukunst. Eine weit umständlichere Beschreibung giebt Hr. Gilly in seiner

Beschreibung der Feuerabhaltenden Lehmschindeldächer. Berl. 1796. 2te Aufl.

Die Steinpappe ist ein Gemische von Gips und andern besonders asbestartigen Steinarten, vielleicht auch noch gewissen Pflanzentheilen. Fox in Karlskrona ist ihr Erfinder. Hr. Drescher in Breslau verfertigt sie fabrikenmäßig in Platten zu 18 Zoll ins Quadrat. Sie widersteht Wasser und Feuer, und ist daher ein treffliches Material zur Bedachung und Bekleidung feuerfangender Wände.

III. Bindungsmaterialien.

§. 6.

Zur Verbindung der Leimensteine dient sehr weich gemachter gereinigter Leimen; zur Verbindung der Mauerziegeln und übrigen Bausteine dienen gemeiner Kalkmörtel, gemeiner Gipsmörtel, und verschiedene Abänderungen dieser Mörtel.

§. 7.

Zur Verfertigung des gemeinen **Kalkmörtels**, oder der gewöhnlichen Mauerspeise, werden die rohen, einzeln ausgegrabenen, oder gebrochenen Kalksteine, in Oefen gebrennt, wobey sie etwa $\frac{4}{10}$ ihres Gewichts verliehren. Der nun **gebrannte, lebendige, ungelöschte** Kalk ist jetzt eine **reine Kalkerde**, die durch ihre starke anziehende Kraft gegen das Wasser und gegen die Kieselerde ihre Anwendbarkeit zum Mörtel erhält. Mit Wasser vermischt reißt sie die Wassertheilchen mit Gewalt an sich, die nur eine Menge Wärmetheilchen fahren lassen, wodurch die gemischte Masse sehr erhitzt wird und häufige Dämpfe entstehen. Dieses dauert

solan-

solange fort, bis sich Kalktheilchen und Wärmetheilchen ihren anziehenden Kräften gemäß unter einander vereiniget haben, oder die Kalktheilchen durchaus hinlänglich mit Wasser gesättiget haben. Der so veränderte lebendige Kalk heist nunmehr **gelöschter Kalk.** Der auf diese Weise vollkommen gelöschte Kalk heist auch **eingesümpfter Kalk.** Lebendiger Kalk, klein zerstossen in einen Korb unter Wasser getaucht und schnell herausgezogen, saugt so viel Wasser ein, daß er davon in ein Mehl zerfällt, ohne eine völlige Löschung zu leiden. Dieses Verfahren heist daher auch **Löschung des Kalks zu Mehl,** es ist aber nur in solchen Fällen nützlich, wo der Kalk in Tonnen versendet werden soll. Er muß alsdann am Ort seiner Bestimmung aufs Neue mit Wasser vermischt werden, wobey sich aber die Kalk- und Wassertheilchen nicht mehr mit jener Festigkeit, daher auch nicht so innig mit einander verbinden.

§. 8.

Weil sich nur die innig mit Wasser verbundenen Kalktheilchen mit der Kieselerde verbinden, so erhält man einen desto bessern Kalk, je lebhafter die Löschung von statten geht, oder je größer beym Löschen die Erhitzung ist. Daher die Regeln: 1) man soll den Kalk, sobald als möglich, nach dem Brennen löschen; 2) man soll ihn nicht zu langsam löschen, oder nicht zu wenig Wasser auf einmal zugießen; 3) man soll ihn auch nicht beym Löschen mit zuvielem Wasser überschwemmen, weil die frey gewordenen Wärmetheilchen eine zu große Wassermenge nicht gehörig erhitzen können. Man kann anfänglich so viele Eimer Wasser zugießen, als man Eimer lebendigen Kalk hat, und nun während beständigem starken Umrühren soviel Wasser nachgießen lassen, daß dabey das lebhafte Abdämpfen keine plötzliche merkliche Verschwächung leidet.

§. 9.

§. 9.

Soll also Kalk aufbewahrt werden, so muß man ihn nicht als lebendigen Kalk aufbewahren, sondern ihn zuvor löschen, und dann tiefe Gruben damit aufüllen, die wenigstens 6 Fus tief sind. Die obersten 2 Füse bleiben mehrere Tage leer, da sich der Kalk mehr setzt und Wasser über die Oberfläche tritt, das man größtentheils ablaufen läßt. Alsdann erst wird der Kalk mit Bretern und diese etwa 2 Fus hoch mit Erde bedeckt.

§. 10.

Der gelöschte Kalk, durch Wasser gehörig verdünnt, giebt mit einer angemessenen Menge Sandes gleichförmig vermischt, den **gemeinen Kalkmörtel**, die gewöhnliche **Mauerspeise**. Ein gehörig gebrannter gutartiger Kalk giebt einen guten Mörtel, wenn man einen Eimer von ungelöschten Kalk mit einem Eimer guten rauhen Sandes vermischt, wofern der Kalk nach Abzug der zwischen den einzelen Stücken bleibenden Lücken wenigstens $\frac{7}{8}$ vom Eimer ausfüllt. Eisenschüßiger Sand ist dabey vorzüglich gut. Uebrigens muß reines Säurefreyes Wasser dazu gebraucht worden seyn. Je mehr dem Sand andere unveränderte Erdarten beygemischt sind, je unreiner oder schlechter gebrannt der Kalk, und je weniger das Wasser frey von Säuren ist, desto geringer ist die Anziehungskraft des Kalks gegen den Sand, desto weniger darf auch Sand beygemischt werden, und desto schlechter wird überhaupt der Mörtel.

§. 11.

Durch Vermischung des gemeinen Kalkmörtels mit einigen veränderten Erd- oder Steinarten erhält man **verstärkte Mörtel** auch **Wassermörtel**. Dahin gehören folgende Mischungen:

1) Ein Theil gemeiner Mörtel, und $\frac{1}{2}$ frisch gebrannter pulverisirter Kalk. Die Mischung geschieht erst beym Vermauern.

2) Ein Theil gelöschter Kalk, 1 Theil feiner Flußsand, $\frac{1}{2}$ Ziegelmehl, $\frac{3}{8}$ frisch gebrannter pulver. Kalk. Die Beymischung des letztern geschieht erst beym Vermauern.

3) Gewöhnlicher Mörtel, nur $\frac{1}{8}$ weniger als gewöhnlich an Sand, und statt dieses fehlenden Sandes $\frac{1}{8}$ klein zerstoßene Steinkohlen oder Hammerschlag. Mit dem so erhaltenen Mörtel verfährt man nun eben so wie mit dem gemeinen Mörtel (no. 1.). Er taugt zu Mauerwerken an feuchten Orten.

4) Gelöschter Kalk und fein gemahlener Troß, von letzterem so viel, als man ungelöschten Kalk zum Löschen genommen hat, dem Maaße nach — Gut zu Mauerwerken im Wasser.

5) Zu gleichem Gebrauch eine eben solche Vermischung wie No. 4, nur Rheinländischen Mühlstein statt des Trasses genommen.

6) Zu gleichem Gebrauch eine eben solche Vermischung wie No. 4., nur Puzzolanerde statt des Trasses gebraucht.

§. 12.

Zur Verfertigung des **Gipsmörtels**, werden die gebrochenen Gipssteine in Oefen gebrennt, wie der Kalk, und dann durch Pochen oder Mahlen und nachheriges Durchsieben in Mehl verwandelt. Im Feuer verliehrt der Gips $\frac{1}{3}$ bis die Hälfte von seinem Gewicht. Das Gipsmehl entreißt dem Wasser eine große Menge von Feuertheilen, und indem es solche bindet, beraubt es zugleich das Wasser seiner flüßigen Form, und erhärtet daher mit diesem bald zu einer festen Masse. Daher leidet der Gips keine Ablöschung, bedarf auch keiner Vermischung mit Sand, sondern dient frisch gebrannt und zu Mehl zermalmt und durchgesiebt sogleich zum Mörtel, indem man ihn nur während dem Gebrauch mit

Wasser

Wasser zu einem Brey anrührt. Es dient nicht zur Verbesserung dieses Mörtels, sondern blos zur Ersparung oder Schonung des Gipses, wenn man ihn mit etwas gutem Sand vermengt.

IV. Materialien zum Ueberzug und Bewurf.

§. 13.

Zum Bewurf der Aussenflächen einer Mauer, eines Gebäudes oder einer Wand, Decke u. d. g. dient gleichfalls der gemeine Kalkmörtel, nur, nachdem man rauhern oder ebenern Bewurf verlangt, mit gröberem oder feinerem, auch wohl durchgesiebten Sand vermischt, und dann zur Verschönerung noch etwas Gips zugesetzt. Zum letzten Anstreichen, Anweisen oder Uebertünchen wird der gelöschte Kalk bis zu einer Brühe verdünnt und gar nicht mit Sand vermengt, wohl aber zur Verschönerung der **Weise** und Verhütung des Losspringens oder Abfärbens mit etwas **Milch**, auch, wenn man den bläulichen Schein liebt, mit etwas **Lackmus**.

Ein in manchen Gegenden üblicher Ueberzug der Fusböden ist der **Estrich**. Man macht dazu einen Mörtel aus gelöschtem Kalk, Sand und Gipsmehl, zu gleichen Theilen, aber mit Wasser bis zu dem Grad verdünnt, bey welchem er die zu einer wagrechten Ausbreitung erforderliche Flüßigkeit erhält.

Der andere Theil

Von der Festigkeit der Gebäude, und ihrer Verwahrung gegen das Feuer.

§. 14.

Zur Festigkeit der Gebäude gehört vor allen Dingen Festigkeit des Grundes oder Bodens, welcher das ganze Gebäude tragen soll. **Felsboden** und **Leimenboden** gewähren die größte Sicherheit. **Grand**, dessen obere Schichten man abgeräumt hat, und dessen Dichtigkeit in grösserer Tiefe durch Erdtheilchen zwischen den groben Grandkörnern schon von der Natur vergrößert worden ist, giebt gleichfalls noch einen sichern Bauboden ab, eben so verhält es sich auch mit **Triebsand**, wenn er große Strecken Landes bedeckt, festen Boden unter sich hat, und keine durchfließenden Wasser führt. **Quellsand, Torf und sumpfiger Boden** sind für sich zum Bauen untauglich; beyde letztere können durch eingerammte Pfähle und aufgelegte Röste mehrentheils brauchbar gemacht werden. Zur Untersuchung des Bodens in größerer Tiefe dient der Erdbohrer.

§. 15.

Jedes Gebäude bedarf einer besondern Fundamentmauer unter allen einzelen Wänden des untersten Stockwerks. Diese Fundamentmauer dient zur gleichern Vertheilung des Drucks und dessen Ausbreitung über eine größere Grundfläche, auch wegen ihres eigenen Drucks zur dichtern Zusammenpressung des Grundes, endlich auch, weil diese Grundmauer bis über die Erdoberfläche hinauf geführt wird, zur Erhaltung eines trockenen Lagers für das eigentliche Gebäude.

§. 16.

Ein $1\frac{1}{2}$ — 2 — $2\frac{1}{2}$ Fus tiefer Grundgraben ist mehrentheils hinlänglich, da dann die Grundmauer so hoch über die Erdfläche heraufgeführt wird, als die jedesmaligen Umstände und besondern Absichten es erfordern. Die oberste Dicke dieser Fundamentmauer soll in keinem Fall unter 2 Fus 3 Zoll betragen; von oben herab läßt man sie auf jeden Fus $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{2}$ Zoll anlaufen. Um wieviel die oberste Dicke der Grundmauer in besondern Fällen mehr als 2 F. 3 Z. betragen kann, ergiebt nachstehendes Täfelchen:

Dicke der Mauern in den verschiedenen Stockwerken:

	Bey Ziegelmauern.		Bey Bruchsteinmauern.	
	Fus.	Zoll.	Fus.	Zoll.
Im 4ten Stockw.	2	0	2	4
— 3ten —	2	3	2	8
— 2ten —	2	6	3	0
— 1ten —	2	9	3	4
D. Gr. Mauer ob.	3	3	4	0

Dieses gilt von den Hauptmauern eines steinernen Gebäudes; den innern oder Scheidemauern giebt man gewöhnlich nur $\frac{2}{3}$ der hier bestimmten Dicke. Ueberhaupt muß auf die reguläre und irreguläre Gestalt der Steine mit Rücksicht genommen werden. Bey Quadersteinen darf die Dicke merklich geringer seyn, bey rundlichen oder sonst nachtheilig gestalteten Steinen kann man 4 bis 6 bis 8 Zoll in der Dicke zusetzen; auch bedürfen diese eines vorzüglichen Mörtels.

Wände, von Leimensteinen oder Lehmpatzen zu 11 Zoll lang, $5\frac{1}{3}$ Zoll dick, und 6 Zoll hoch, können im 2ten Stock 2 Steinlängen, und im ersten $2\frac{1}{2}$ Steinlängen dick seyn. Zur Grundmauer nimmt man Bruch- oder Felosteine.

§. 17.

Um Tonnengewölben für alle Fälle hinlängliche Festigkeit zu geben, vorausgesetzt, daß die Steine selbst feste Bausteine sind, dient folgendes Täfelchen:

Innere Entfernung der Widerlagen.	Höhe der Widerl. bis an d. Bogen.	Dicke d. freystehenden Widerlagen.		Höhe d. keilförmigen Gewölbsteine.	
Fus.	Fus.	Fus.	Zoll.	Fus.	Zoll.
6		2	4	1	3
10		3	1	1	5
14	10	3	10	1	7
18		4	6	1	9
20		4	11	1	10
25		5	11	2	$\frac{1}{2}$
30		6	10	2	3
35	12	7	8	2	$5\frac{1}{2}$
40		8	7	2	8
45		9	7	3	—
50		10	7	3	4

§. 18.

Die bey den Gebäuden angebrachten Hölzer müssen gleichfalls ihre gehörige Breite und Dicke haben. Breite heist die Abmessung nach der Richtung des Drucks, Dicke die, welche mit jener einen rechten Winkel macht. Hr. Huth giebt für die frey liegenden Hölzer eine praktische Regel, die sich so abändern liesse:

> Jedes Zimmerholz, das gar nichts zu tragen hat und nach seiner ganzen Länge durchaus aufliegt, nehme man zu 5 Zoll dick und 7 Zoll breit. Auf jeden Fus seiner frey liegenden Länge aber verstärke man die Dicke um $\frac{1}{5}$, und die Breite um $\frac{1}{4}$ Zoll.

So erhält man z. B. für seinen auf eine Länge von 20. Fusen frey liegenden Balken

die Dicke $= 5 + \frac{20}{5} = 9$ Zoll.
die Breite $= 7 + \frac{20}{4} = 12$ Zoll.

Liegt aber ein Holz schief, und ist seine ganze Länge $= \lambda$, die Höhe seiner obersten Stelle über seiner untersten h,

so verstärke man die Dicke von 5 Zollen auf jeden Fus der frey liegenden Länge um

$$\left(2 - \frac{h}{\lambda}\right) \cdot \frac{1}{10} \text{ Zoll,}$$

und die Breite von 7 Zollen um

$$\left(2 - \frac{h}{\lambda}\right) \cdot \frac{1}{8} \text{ Zoll.}$$

Die letzte Regel begreift die erste mit unter sich.

Man kann auch Säulen eben so dick als breit machen, und dann das Mittel zwischen der so berechneten Dicke und Breite nehmen.

Doch gilt die Anwendung auf Säulen nur bey den Scheidewänden. In den äussern Wänden dürfen Dicke und Breite der Eckſäulen um $\frac{1}{5}$, und die der Mittelsäulen um $\frac{1}{4}$ größer genommen werden. Wie bey den Eck- und Mittelsäulen der äussern Wände, so nimmt man auch die Stärke der Thor- und Thürsäulen.

Die Schwellen bekommen die Dicke der Mittelsäulen, ihre Breite kann 1 - $1\frac{1}{2}$ bis 2 Zolle mehr betragen.

§. 19.

Ein Boden erhält desto größere Festigkeit für eine darauf verbreitete Last, je größer die Anzahl von Balken ist, auf welche sie vertheilt wird. Also hängt die Bestimmung der Entfernung, in welcher die Balken von einander liegen sollen, von der Größe der Last ab, womit

ein Boden beschwert werden soll. Zu den gewöhnlichen Beschäftigungen, zu Zusammenkünften von 12 bis 15 Personen, und den dabey angebrachten gewöhnlichen Hausmöbeln erhält man Balken genug, wenn ihre Mittellinien $2\frac{1}{2}$ bis $2\frac{3}{4}$ Fus von einander liegen. Bey beträchtlich stärkern Lasten und schädlichen Verrichtungen, die das Gebäude erschüttern, kann jene Entfernung bis zu $2\frac{1}{4}$ Fus eingeschränkt werden, und man kann dann noch mit **Durchzügen** oder **Trägern**, wodurch die freyliegende Länge der Balken abgekürzt wird, zu Hülfe kommen. Bey Fruchtböden soll jene Entfernung nicht über 2 Fus betragen, und nach Beschaffenheit der größern Quantität der aufzuschüttenden Frucht kein Balken auf mehr als 4 Fus Länge ganz frey liegen. Auch werden, wo sehr beträchtliche Fruchthaufen aufgeschüttet werden sollen, die Durchzüge selbsten noch mit Säulen unterstützt, und solche mit **Strebhölzern** oder **Bugen** versehen, welche in die Durchzüge eingreifen.

§. 20.

Wo die erforderliche Balkenstärke größer ist, als sie aus einem Stamme erhalten werden kann, da werden 2 auch wohl 3 Balken in einander **verzahnt** oder **verkammt**, welches durch parallelepipedische oder durch schwalbenschwanzförmige Ausschnitte des einen und ähnliche Vertiefungen des andern Balkens geschieht. Oder man belegt den oberen Balken auf seiner oberen, und den untern Balken auf seiner unteren Fläche mit einer breiten eisernen Schiene, steckt durch solche und die Balken starke eiserne Bolzen mit Gewinden, welche oben hervorstehen, so daß nun starke eiserne Muttern oben angeschroben werden können.

§. 21.

Die Festigkeit, welche (§. 19.) Unterzüge, die mit Säulen unterstützt sind, dem Gebälke verschaffen, muß man

man da, wo andere Umstände die Unterstützung mit Säulen verbieten, auf eine andere Weise zu erhalten suchen. Man verbindet zu dem Ende Säulen unter dem Dach entweder mit Strebhölzern (Büegen), oder mit höher liegendem Gebälke, oder mit beyden zugleich, so, daß alle diese Hölzer zugleich dem Sinken der Säulen widerstehen, eine Last also, welche die Säulen niederziehen will, zugleich den vereinten Widerstand jener Hölzer überwinden muß. Die so verwahrten Säulen werden nun mit dem Balken, auf dem sie stehen, durch starke eiserne Bänder, sogenannte Hängeeisen, fest verbunden, indem diese Eisen von unten nach oben durch den Balken so durchgesteckt werden, daß die beyden Flügel des Eisens eine solche Säule an ihrem untern Theil zwischen sich fassen, an die sie nun mit starken eisernen Nägeln oder Schrauben befestigt werden. Man unterstützt auch wohl das Gebälke mit einem Unterzug und befestigt in diesem Fall auch den Unterzug mit eben dem Hängeeisen an das Gebälke. Eine solche Befestigungsart, von der sich mancherley Abänderungen gedenken lassen, heist ein Hängewerk; die Säulen, woran die Hängeeisen befestiget werden, Hängesäulen.

§. 21.

Die Dauer des Holzes in feuchter, oder überhaupt abwechselnder Witterung zu vergrößern, bedient man sich verschiedener Mittel; Pfähle werden an ihren untern Enden, Balken an ihren hervorstehenden Köpfen etwas angebrannt; das Bauholz wird in Salzwasser gelegt, dann getrocknet, wieder in das Salzwasser gebracht und noch einmal getrocknet. Bey hölzernen Gebäuden, die immer einige Jahre ohne Bewurf des Holzes stehen sollten, werden die Aussenseiten des Holzwerks, wenn solches keinen Bewurf bekommt, nach gehöriger Austrocknung mit Oelfarbe angestrichen.

§. 22.

Die Gebäude gegen das Feuer zu verwahren, ist der vorerwähnte Gebrauch des Salzwassers, wenn es 18 bis 20 bis 24 Loth Salz in 100 Lothen Salzwasser enthält, gleichfalls behülflich. Das beste Mittel aber ist die Ueberstreichung alles Gehölzes mit Leimen, auch kein Holz auf das andere zu legen, ohne Leimen dazwischen zu bringen. Alle Verlochungen, in welche Säulen, Riegel, Büge u. d. g. mit ihren Zapfen eingreifen, sollen vorher mit Leimen ausgeschmiert werden. Alle Zwischenräume oder Felder zwischen den Balken werden mit Leimen, der mit klein gehackten Stroh oder Ahnen vermischt ist, ausgefüllt, auch Decken, Wände und Böden, bevor sie bedielt werden, damit überzogen, nachdem man vorher alle Zwischenräumchen mit hölzernen Keilchen, die in Leimenbrey eingetaucht worden, ausgekeilt hat. Der Leimen selbst muß mit Salzwasser, noch besser wenn zugleich Alaun darinn aufgelößt ist, angerührt seyn. Breterne Schiedwände müssen vorzüglich eine solche Leimendecke bekommen, und weil solche leichter erschüttert werden, also die Decke weniger haltbar ist, so kann bey solchen die Hälfte von gekochtem Roggenbrey mit dem Leimenbrey vermischt werden. Der Dachstuhl und alle Sparren und Latten werden eben so behandelt. Alle Thüren müssen genau in ihre Oeffnungen einpassen, um allen Luftzug abzuschneiden, die Schornsteine müssen blecherne Fallthüren oder Schieber haben, die sich leicht zuziehen oder einschieben lassen. Statt der Strohdächer auf dem Lande muß man Leimenschindeln gebrauchen. Bey großen Gebäuden führt man Schiedmauern durch das ganze Gebäude u. d. g. Bey dem allen bleiben einige gute Handspritzen und eine zu allen Zeiten mit Wasser angefüllte Kufe in jedem Wohngebäude eine nothwendige Erforderniß.

Der dritte Theil.

Von der innern Einrichtung der Wohngebäude nach dem Zwecke der Bequemlichkeit.

§. 23.

Die Bequemlichkeit erfordert, daß der Bewohner eines Gebäudes alle ihm nöthige Verrichtungen ohne solche Beschwerden, welche die Einrichtung des Gebäudes verursacht, darinn vornehmen kann. Daher muß jedes Wohngebäude folgende Stücke enthalten:

1) Die zu den mancheley Verrichtungen unmittelbar erforderlichen **Zimmer und Plätze**, mit bequemen Thüren.

2) Bequeme **Vorplätze** und **Gänge**, wodurch man so viel möglich zu jedem Zimmer unmittelbar eingehen kann, ohne durch eines der übrigen durchgehen zu müssen.

3) **Fenster**, welche den Zimmern die erforderliche Hellung und frische Luft zuführen können.

4) **Treppen** aus den unteren Stockwerken in die obere.

5) Bequeme **Herden** in den Küchen und **Oefen** in den Winterstuben.

6) Gut eingerichtete **Schornsteine.**

7) Die nöthigen Abtritte.

§. 24.

Die Bestimmung (§. 23. No. 1.) hängt von dem Stand des Bewohners ab, für welchen das Haus gebaut

baut werden soll, und zugleich von dem Grad der Bequemlichkeit, welchen derselbe verlangt. So könnte z. B. das Wohnhaus eines Professors folgende zu No. 1. gehörige Plätze enthalten:

Eine Wohnstube mit einer Kammer, eine Kinderstube mit einer Kammer, eine Gesindstube, eine Studirstube, ein Zimmer zur Bibliothek, ein Zimmer zu Naturalien, Instrumenten und Modellen, ein Winter-Besuchzimmer mit einer Kammer, ein Auditorium, ein Sommer-Besuchzimmer mit einer Kammer. Beyde letztere dienen zugleich, Auswärtige beherbergen zu können. Ferner eine oder zwo Küchen mit zugehörigen Speisekammern; eine Kammer, Schränke u. d. g. einzustellen, eine Kammer zur schwarzen Wäsche; einen guten Keller, eine Waschküche, eine Holzlege. Uebrigens soll die kleinste Kammer nicht unter 100, der größte Saal in einem Wohngebäude braucht nicht über 1600 Rhl. Qdr. Fus groß zu seyn. Die Höhe der Zimmer sollte nie unter 9 Rhl. Fus betragen.

Der **Vorplatz** (§. 23. No. 2.) soll im untersten Stockwerk niemalen **unter** 6 Rhl. Fusen breit seyn, die Gänge in den obern Stockwerken niemalen unter $4\frac{1}{2}$ Rhl. F. Von Bauernhütten ist hier die Rede nicht.

Die **Fenster** (§. 23. No. 3.) sollen auf 18 Quadratfus Bodenfläche eines Zimmers wenigstens 1 Quadr. F. Lichtöffnung geben. Mehr als 1 Q. F. Lichtöffnung auf 12 Q. F. Bodenfläche ist allemal überflüßig. Ich verstehe hier unter Lichtöffnung die Fensteröffnung nach Abzug des Flächenraums, welchen die Fensterrahmen nöthig haben. Die Staffeln der **Treppen** sollten nicht unter $4\frac{1}{2}$ Fus lang, nicht **unter** 1 Fus breit, und nicht über 7 Zoll hoch seyn, auch sollte keine Treppe über 15 Staf-

seln haben, ohne durch einen Ruheplatz gebrochen zu werden.

Die Herden werden von Ziegel- oder andern Steinen parallelepipedisch aufgeführt, mit einem darunter hinlaufenden Aschengewölbe, auch zur Schonung des Holzes mit größern und kleinern Vertiefungen, welche unten Röste bekommen, zu welchen die Luft von unten mittelst eines Schiebers mehr oder weniger beygelassen werden kann. Der Herd wird mit eisernen Platten belegt. Seine ganze Höhe darf nicht über 30 Zolle betragen; die Grösse seiner obern Fläche hängt von dem besondern Gebrauch ab, wozu er bestimmt ist, doch darf sie wohl niemalen unter 30 Quadr. Fuse betragen, wohl aber auch 70-80 u. m. Q. F.

Die Oefen werden theils aus geschmiedeten Blechen vernietet, theils aus gegossenen Platten mit Eckschienen zusammengeschroben, theils in runden Stücken von mancherley Formen gegossen, und in mehreren Aufsätzen auf einander gesetzt, theils aus Kacheln zusammengesetzt. Der Ofen muß allemal eine besondere Schüröffnung und eine besondere Abzugöffnung haben. Es ist aber der Oekonomie sehr nachtheilig, wenn die Wärmetheile zu schnell durch die letztere Oeffnung abziehen können; man bringt daher im Ofen Zirkulirgänge an, läßt auch wohl die Wärmetheile nicht unmittelbar aus dem Ofen wieder in die äussere Luft abziehen, sondern nöthigt sie, ihren Abzug durch Röhren zu nehmen, die man im Zimmer mit dem Ofen verbunden hat, und die durch eine Wand bis in die äussere Luft geleitet werden.

Statt der Oefen bringt man auch zuweilen Kamine an, d. i. kleine Feuerstätten an der hierzu etwas ausgehölten Wand eines Zimmers, die gegen das Zimmer 3 • 4 • 5 Fus hoch offen sind, und über dieser Höhe unmittelbar einen Schornstein haben. Es erhellet von selbsten, daß dieses unter allen Arten, Zimmer zu erwär-

men,

men, die verschwenderischte ist; daher sie auch nur in Zimmern anwendbar ist, die selten geheitzt werden, in Sälen, Schlafzimmern u. d. g.

Die Schornsteine sind die Kanäle zum Abzug des Rauchs. Jede Feuerstätte bekommt ihren eigenen. Inzwischen können mehrere, bevor sie das Dach erreichen, **zusammengeschleift**, d. i. in **einen** Kanal zusammengeführt werden; doch müssen zwey solche zusammengeleitete Kanäle noch auf eine kurze Strecke durch **eine Zunge**, d. i. durch eine im gemeinschaftlichen Kanal angebrachte Scheidewand von einander abgesondert bleiben, und diese Zunge muß der Richtung des gemeinschaftlichen Kanals oder Schornsteins parallel laufen. Jeder Schornstein wird wenigstens 18 Zoll hoch bis über die Forste des Dachs hinaus geführt, am besten durch die Forste selbsten. Im Lichten soll sein Querschnitt in die Breite nie unter 14, in die Länge nie unter 18 Zoll betragen. Die **Abtritte** müssen so angelegt seyn, daß sie nicht leicht ins Auge fallen, wozu Seitenwendungen der Gänge am besten dienen. Ihre innere Weite sollte niemalen unter 12 Q. Fus betragen. Es wäre sehr gut, wenn man überall aus dem unteren Theil eine Röhre durch den Abtritt herauf, und dann in die freye Luft leitete.

§. 25.

Für die Gestalt und Abmessungen der Dächer hat man mancherley Regeln. Am gewöhnlichsten sind diejenigen, welche auf 2 gegen über stehenden Seiten eines Gebäudes entweder eine gradausgehende oder eine gebrochene schiefe Fläche bilden; letztere heisen **gebrochene, französische**, oder **Mansardendächer**; erstere sind die gebräuchlichsten, ihre Höhe kann sich zur Breite oder zur Länge der obern Balken verhalten, wie 3 zu 5. Die

Ver-

Verhältniß 1 : 1 giebt ein unförmliches, die 1 : 2 ein für den Abfluß des Regens zu flaches Dach.

Der vierte Theil.

Von der Einrichtung der Gebäude nach dem Zwecke der Schönheit, Zierde und Pracht.

§. 26.

Die Beobachtung der **Symmetrie** und der **Eurithmie** bestimmt die wesentliche Schönheit eines Gebäudes. Letztere besteht in der richtigen Verhältniß der verschiedenen Abmessungen, aller am Gebäude vorkommenden Stücke, unter einander. Z. B Fenster, deren Höhe bey einem hohen Stockwerk nicht grösser als die Breite wäre, imgleichen Fenster, deren Breite zur Höhe zwar in einer richtigen Verhältniß stände, die aber bey einem Stockwerk von mittler Höhe nur eine Oeffnung zu 4 Quadr. Fuß groß hätten, stritten gegen die **Eurithmie.** Erstere besteht in der Gleichheit ähnlicher Stücke in gleichen Entfernungen von einer durch die Mitte der zugleich ins Auge fallenden Wand gelegten oder gedachten lothrechten Ebene.

§. 27.

Es ist daher nicht genug, einem Zimmer durch Fenster soviel Lichtöffnung zu geben, als nach §. 24. nöthig ist, sondern es müssen auch diese Fenster eine der Eurythmie angemessene Breite und Höhe haben, und eine solche Lage, daß nicht nur von Aussen beym Anblick des ganzen Gebäudes, sondern auch von innen bey Betrach-

tung

trachtung der zu einem einzelen Zimmer gehörigen Wandfläche Symmetrie wahrgenommen wird.

§. 28.

Zierliche Gebäude müssen nicht blos nach den Regeln der Symmetrie und Eurythmie gebaut seyn, sie müssen dem Auge zugleich Beweise eines geschmackvollen Künstlers darstellen; es müssen dabey Umformungen der rohen Materialien ins Auge fallen, welche Kunst und Geschmack verrathen. Dahin gehört vorzüglich die Anwendung jener zierlichen Ausarbeitungen der 5 Säulenordnungen, nach welchen entweder einzele Säulen oder ganze Wände aufgeführt werden.

§. 29.

Prachtgebäude verdienen nur diejenigen schönen und zierlichen Gebäude genennt zu werden, welche in Vergleichung mit gewöhnlichen Wohngebäuden eine auffallende beträchtlichere Grösse im Ganzen und in ihren einzelen Theilen haben. Kleinere Gebäude werden durch überhäufte Zierrathen oft verunstaltet, niemals aber dadurch zu Prachtgebäuden umgeschaffen.

Der fünfte Theil.

Von den ökonomischen Gebäuden.

§. 30.

Gebäude, welche ausser dem Wohnhaus zur Viehzucht, Feld- und Wiesenbau erforderlich sind, heisen ökonomische Gebäude. Dahin gehören hauptsächlich Scheune, Fruchtmagazine und Stallungen.

§. 31.

§. 31.

Die **Scheunen** sollen zur Einführung der Erndegarben, dem Ausdreschen und dem nachherigen Aufbewahren des nach dem Ausdreschen sich ergebenden Strohes, imgleichen zum Einlegen des Heues und Grommets dienen. Sie bestehen daher aus den **Dreschfluren**, in welchen sich der Dreschboden, die **Tenne** befindet, den **Bansen**, oder den nur durch $3\frac{1}{2}$ bis 4 Fus hohe Scheidwände von der Dreschflure abgesonderten Behältnissen, und den auf dem Balkenlager zum Theil zugerichteten Lagerplätzen für das Futter.

§. 32.

Weil hoch beladene Fruchtwägen in die Dreschflure muß eingeführt werden können, so dürfen die äussern Wände **nicht unter** 14 Fus hoch seyn; gewöhnlich fällt daher diese Höhe zwischen 14 und 18 landübliche Fus. Länge und Breite der ganzen Scheune hängt von der grössern oder geringern Beträchtlichkeit des Feldbaues und des Viehstandes des Eigenthümers ab, die also auch allein den Maasstab für Länge und Breite der Bansen abgeben kann. Das Gebälke braucht hier begreiflich nicht so nahe beysammen zu liegen, wie in Wohngebäuden; es ist genug, wenn von 4 zu 4 Fusen, bis zur Balkenmitte gemessen, ein Balken liegt. Auch ist hier blos über den Wänden ein Gebälke nöthig, zu unterst fällt es ganz weg.

§. 33.

Zur Herrichtung der Tenne bedient man sich eines fetten Leimens, der noch seine Feuchtigkeit hat, oder, welches aber nicht so gut ist, hinlänglich angefeuchtet wird. Dieser wird 12 - 15 - 18 Zoll hoch so dicht als möglich aufgedammt, und hiernächst noch eine Schichte von dergleichen sehr sorgfältig gereinigtem Leimen, der aber zugleich mit Hammerschlag oder Eisenfeilspähnen,

Ochsenblut und Pferdeurin vermischt, aufgetragen und eben geschlagen. So zugerichtet muß nun die Oberfläche der Tenne etwas höher liegen, als die Thorschwelle, damit die eingeführten Wagen nicht durch einen sonst entstehenden Fall von der Schwelle herab den Boden verderben.

§. 34.

Das Gebälke unter dem Dach wird nicht bedielt, und nur in soweit mit Bretern, die 1 — 1½ Fus weit von einander liegen dürfen, oder mit Stangen belegt, als man für einzulegendes Futter besondere Lagerplätze verlangt.

§. 35.

Einigermaßen den nach der Bedürfniß erforderlichen Platz bestimmen zu können, dienen noch folgende Angaben.

Die Breite der Tenne soll **nicht unter** 14 Rhl. Fuse betragen.

Ein Schock oder 60 Garben Getreide, giebt beyläufig nur noch ein halbes Schock Stroh.

Ein Schock Waizen- und Roggenstroh, das Bund etwa 20 Pfund schwer, erfordert 300 K. F. Raum.

Also ein Schock Erndegarben von dieser Größe eben soviel.

Ein Schock Gerste 240 K. Fus

— — Haber und Erbsen 200 K. F.

— — Linsen, Buchwaizen und Wicken 180 K. F.

Es versteht sich, daß dieses nur beyläufige Angaben sind.

§. 36.

Getraidmagazine sind eigene, zum Aufbewahren des Getraides bestimmte Gebäude, deren zweckmäßige Einrichtung für jeden Staat von Wichtigkeit ist.

Eine

Eine etwas erhöhte Lage über einem nicht feuchten Grund mit einem unter dem untersten Boden ins Kreuz durchgeführten Gewölbe, und dabey eine solche Stellung, daß die Mittagssonne den wenigsten Einfluß auf das Gebäude hat, sind bey dergleichen Magazinen wichtige Erfordernisse.

§. 37.

Man schüttet das Getraide entweder nur 15 - 18 - 22 Zolle hoch über einem Boden auf, oder 8 - 10 - 12 - 15 Fus hoch und noch höher. Dabey beträgt doch auch im ersten Fall die Höhe eines Stockwerks nie unter 10 Fusen, wobey also sehr viel Raum verlohren geht, den man wieder durch Vergrösserung der Bodenflächen und dadurch, daß man mehrere Böden über einander setzt, zu gewinnen sucht. Allemahl aber müssen sowohl nahe unter jedem Boden, als nahe über demselben eine hinlängliche Anzahl von Oeffnungen angebracht werden, weil der Kornwurm, der nur in verdorbener Luft lebt, dadurch abgehalten wird, daß beständig gute Luft zugeführt wird.

§. 38.

Bey Fruchtmagazinen der ersten Art (§. 37.) wird einerley Kornmasse begreiflich weit mehr reine Luft zugeführt, als bey denen der andern Art. Um also doch auch diese, wo es sonst am nöthigen Raum fehlen würde, gebrauchen zu können, muß man dafür sorgen, daß das Korn vor dem Aufschütten in den Zustand gebracht werde, worinn es zur Erzeugung verdorbener Luft weniger geschickt ist, d. i. in einen hohen Grad von Trockenheit, s. v. Cancrin Abhandlung von einer feuerfesten am Brand sparenden Fruchtdarre. Giesen 1790. und Stieglitz Encyklop. der bürgerl. Baukunst unter dem Artikel Darre.

Eben darum müssen aber auch Balken und Dielen der Böden vorzüglich ausgetrocknet seyn.

Uebrigens muß besonders bey Magazinen der andern Art auf die nöthige Stärke der Balken und Pfosten, welche dem Druck ausgesetzt sind, vorzüglich Rücksicht genommen werden.

Man thut wohl, wenn man schon bey Magazinen der ersten Art Balken von der oben bestimmten Stärke nicht über 14 bis 15 Zoll weit im Lichten von einander legt, und sie nach ihrer Länge von 8 zu 8 Fusen mit 12 bis 14 Zoll breiten Trägern, die selbsten wieder nach ihrer Länge von 8 zu 8 Fusen mit Säulen unterstützt sind, unterzieht.

Bey Magazinen der andern Art sollen die Balken höchstens 12 Zoll weit im Lichten von einander liegen, die Träger nie unter 14 Zoll breit seyn, auch nicht über 5 Fus weit im Lichten von einander liegen, und die Säulen überdas Büge oder Streben haben, die in die Träger eingreifen.

Breter zu 1 Zoll dick, sind im ersten Falle hinlänglich, dann kann man aber für jeden Fus, um welchen die Frucht höher als 2 Fus aufgeschüttet wird, der Breter- oder Dielendicke noch $\frac{1}{6}$ Zoll zusetzen. So ergäbe sich also für Magazinböden, auf welchen das Getraide 8 Fus hoch aufgeschüttet werden soll, eine Dielendicke von $1 + (8 - 2) . \frac{1}{6}$ d. i. von 2 Zollen.

Uebrigens werden die Diehlen $\frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{4}$ Zoll breit in einander gefalzt, damit bey allenfalsigem Schwinden die Körner nicht zwischen ihren Fugen durchfallen können.

§. 39.

Schaafställe für ansehnliche Schäfereyen sollen nie unter 10 Rhl. Fusen hoch seyn, und bekommen wegen des bey solchen öfters nöthigen Ein- und Ausfahrens, welches letztere auch rückwärts geschehen kann, wenigstens eine diesem Zwecke angemessene große Thoröffnung.

Luft-

Luftöffnungen sind dabey unentbehrlich. Eine Reihe solcher Oeffnungen kann an der einen Wand nach der Länge des Stalls nahe unter der Decke, auch in der Decke selbsten angebracht werden, die andere vielleicht am besten in der gegenüberstehenden Wand nahe am Boden, wenn hier nur durch eine nach der Länge des Stalls aufgeführte 4 bis 5 Fus hohe Wand der Luftstrohm von dem Schaafstand abgehalten und nach oben geleitet würde. Im Durchschnitt genommen, soll für jedes Stück einer Schäferey die Bodenfläche des Schaafstalls wenigstens 7 Rhl. Quadr. Fus halten.

§. 40.

Die **Kühställe** bedürfen für jede Kuh 30 bis 32, für jedes Kalb 20 bis 24 Q. Fus Fläche für den Boden, und eine Höhe von 9 bis 10 Fusen. Sie stehen, wenn ihrer nicht über 10 Stück sind, in einer Reihe; bey einer größern Anzahl werden sie einander gegenüber gestellt, entweder mit den Köpfen gegen einander gegen die Wände. Von den Köpfen weg, oder von den Vorderfüsen gegen die Hinterfüse bekommt der Boden 3 bis 4 Zoll Abhang. Uebrigens muß auch hier für gehörigen Luftzug gesorgt werden.

§. 41.

Pferdeställe erfordern für jedes Pferd sammt Gang und Krippe eine 16 Fus lange und 5 Fus breite Bodenfläche; nur wenn bey doppelten Richten die Pferde mit den Köpfen gegen die Wände gekehrt sind, also nur ein Mittelgang nöthig ist, reicht eine Länge von 14 Fusen hin. Die Höhe soll nicht unter 12 Fusen betragen, wohl aber, wo sehr viele Pferde beysammen stehen, 14 bis 15 Fuse. Lichtöffnungen müssen niedrig seyn und ganz nahe unter der Decke angebracht seyn. Zur Abführung der Dämpfe können große Oeffnungen in der Decke angebracht seyn, und von solchen breterne Kanäle zum Dach hinausgeführt werden.

§. 42.

Bey Schweinställen rechnet man

für ein Zuchtschwein mit seinen Jungen einen besondern Platz von 24 Quadr. Fusen,
für Färken auf jedes Stück 5 Q. Fus,
— einjährige Schweine 8 —
— zweyjährige 10 —

Der sechste Theil.

Von den Bauriſſen.

§. 43.

Jede Zeichnung von zusammengehörigen Theilen eines Gebäudes, welche diese Theile dem Auge in eben der Verhältniß unter einander darstellen, in welcher sie demselben aus irgend einem Gesichtspunkt betrachtet, wirklich erscheinen würden, heist ein **Bauriß**. Hierher gehören:

die Grundrisse
die Aufrisse, Standrisse, orthographische Risse,
die Profilrisse, Profile, Durchschnitte,
die perspektivischen Risse, scenographischen Risse.

§. 44.

Eigentlich sind die Grundrisse schon unter den Profilen oder Durchschnitten mit begriffen.

Man

Man gedenke sich nämlich eine Ebene wie man will durch ein Gebäude gelegt, so durchschneidet sie alle Theile des Gebäudes, die der Ebene in dieser Lage begegnen. Werden nun alle diese einzelen Durchschnittsflächen nach einem verjüngten Maaßstabe eben so auf die Ebene des Papieres gezeichnet, wie sie in jener großen Durchschnittsebene neben einander liegen, so hat man ein Profil vom Gebäude für die bestimmte Lage der Durchschnittsebene. Eine lothrechte Durchschnittsebene giebt also lothrechte Profile, und zwar grade Profile, wenn die Durchschnittsebene den Hauptwänden gleichlaufend ist, oder auch solche unter gleichen Winkeln schneidet, schrege Profile, wenn die lothrechte Durchschnittsebene die erwähnte Lage nicht hat. Eine horizontale Durchschnittsebene giebt ein horizontales Profil vom Gebäude in derjenigen Höhe des Gebäudes, durch welche man sich die Durchschnittsebene gelegt gedenkt. Inzwischen nennt man Bauriſſe der letztern Art nicht Profile, sondern Grundriſſe.

§. 45.

Begreiflich lassen sich von jedem Gebäude so viele Grundriſſe verfertigen, als verschiedene Höhen man wählen kann, in welchen man sich das ganze Gebäude von einer horizontalen Ebene durchschnitten gedenkt. Eine solche Durchschnittsebene durch den Keller gelegt, giebt einen Kellergrundriß oder Kellerriß; eine Durchschnittsebene in der Höhe, wo die Balken liegen, giebt einen Balkenriß, in der Höhe, wo die Fensteröffnungen anfangen, giebt sie nach der Nummer des Stockwerks, einen Grundriß des ersten, zweyten, dritten u. s. Stockwerks. In solche Grundriſſe von Stockwerken werden nicht durchschnittene Haupttheile des Gebäudes, die in eben dem Stockwerk liegen, eben so in den Grundriß gezeichnet, als wenn die angenommene Durchschnittsebene auch durch sie durchgienge, wenn nur dergleichen Theile auf der Bodenfläche eines solchen Stockwerks

wirklich auffitzen, z. B. Oefen mit ihren Schüröffnungen, wenn sie gleich so niedrig wären, daß sie von einer durch den Anfang der Fensteröffnungen gelegten horizontalen Ebene nicht berührt würden, Küchenherde u. d. g.

§. 46.

Aufrisse stellen die Gebäude so vor, wie sie von aussen einem Auge erscheinen würden, das in einer durch das Gebäude durchgehenden horizontalen Ebene in unendlicher Entfernung erscheinen würde. Oder man gedenke sich ausserhalb dem Gebäude eine lothrechte Ebene, und nun von allen Grenzpunkten aller einzelen Theile des Gebäudes senkrechte Linien auf diese Ebene gezogen, so entsteht auf der Ebene ein Bild vom Gebäude, welches der Aufriß heist; dieser ist also die senkrechte Projektion aller äussern Theile des Gebäudes auf eine lothrechte Ebene, nur nach dem verjüngten Maasstabe verzeichnet.

Die lothrechte Ebene kann eine Lage haben, wie man will; ist sie der langen Seite des Gebäudes gleichlaufend, so giebt die Projektion den **Aufriß in die Länge**; ist sie der breiten gleichlaufend, so giebt die Projektion den **Aufriß in die Breite**; ist die Ebene keiner von beyden Seiten gleichlaufend, so fällt sowohl von der langen als von der breiten Seite eine Projektion auf die Ebene, und so ergiebt sich ein **Aufriß über Ecks**.

§. 47.

Was Profilrisse sind, grade und schrege, ist schon (§. 44.) erklärt worden. Die Bemerkung am Ende §. 45. gilt auch hier auf eine ähnliche Art. Wo nämlich die Durchschnittsebene in einem Stock durch leere Räume zwischen Wänden durchgeht, da bringt man die hinter der Durchschnittsebene befindliche erste Wand statt der leeren Stelle mit ihren Thüren, so mit in die Zeichnung, als wenn die Durchschnittsebene durch diese

Wand durchginge; eben so verhält man sich mit Verzeichnung einer Wand, welche die Durchschnittsebene quer durchschneidet, man zeichnet nämlich diesen Durchschnitt der Wand so, als wenn die Durchschnittsebene, wenn sie wirklich kein Fenster in der Wand trift, in paralleler Lage durch das erste in dieser Wand hinter der Durchschnittsebene liegende Fenster durchginge. Ueberhaupt gedenkt man sich die zunächst hinter der Durchschnittsebene befindlichen besondern Theile des Gebäudes bis in die Durchschnittsebene hervor gerückt, und bringt sie so mit ins Profil. Man beobachtet dieses auch bey den Dachfenstern, bey den Schornsteinen u. d. g. Daher enthält ein Profil oft vielerley Gegenstände, die nicht in einem einzigen, sondern in ganz verschiedenen lothrechten Durchschnitten des Gebäudes liegen, und zuweilen läßt man die zunächst hinter der Durchschnittsebene befindliche Wand ganz weg, um Gegenstände, die hinter dieser Wand liegen, in das Profil zu bringen.

§. 48.

Die perspektivischen Risse zeigen die Theile eines Gebäudes nicht nach ihrem Durchschnitte mit einer Ebene, sondern stellen sowohl die einzelen Theile als die äussern Flächen dieser einzelen Theile im Kleinen so vor, wie sie im Grossen unter mannigfaltigen Winkeln zusammengesetzt, und in verschiedenen Entfernungen dem an einem gewissen Punkt angenommenen Auge erscheinen. Dieses geschieht nach den Regeln der **Perspektiv.**

§. 49.

Die nothwendigsten Bauriſſe sind die **Grundrisse** vom Keller, den verschiedenen Stockwerken und Balkenlagern, und **Aufrisse, in die Länge und in die Breite.** Zur Beurtheilung des Bauherrn, ob das künftige Gebäude nach seiner ganzen Einrichtung seiner Absicht entspreche, imgleichen zur Belehrung des Zimmermeisters, der die Verzimmerung übernimmt, sind jene Ris-

se schon hinreichend. Zuweilen werden aber noch überdas Profile verlangt, da man dann die Durchschnittsebenen in solchen Stellen nehmen muß, wo vorzüglich interessante Gegenstände in die Profile fallen. Man bleibt dann aber gewöhnlich nur bey **graden** Profilen stehen, und verfertiget eines **nach der Länge**, und eines **nach der Breite**, bey großen Gebäuden auch wohl mehrere. **Perspektivische Risse** von Gebäuden dienen eigentlich gar nicht zum Bauen, sondern sollen für sich selbst als natürliche Darstellungen zierlicher und prächtiger Gebäude das Auge ergötzen. Perspektivische Risse von gemeinen Gebäuden sind daher beynahe ganz zwecklos und der Mühe nicht werth, die man bey genauer Beobachtung der perspektivischen Regeln darauf verwenden muß, wenn nicht etwa Scenen dadurch abgebildet werden, die durch anderen Reitz ersetzen, was den Gebäuden an Schönheit, Zierde und Pracht abgeht.

§. 50.

Zum Zeichnen selbsten kann hier keine nähere Anweisung gegeben werden. Man findet solche in ausführlichern Werken. Anfänger können sich der von **Lucas Voch** herausgegebenen **deutlichen Anweisung zur Verfertigung der Bauriſſe** ꝛc. 2te Aufl. mit Nutzen bedienen.

L.

Ende der Baukunst.

Regi=

Register
über Wolfs Auszug.

Die Ziffern bedeuten die Theile.

Rechenkunst.	R.
Algebra.	A.
Geometrie.	G.
Trigonometrie.	T.
Höhere Geometrie	h. G.
Differentialrechnung.	D.
Integralrechnung.	I.
Mechanik.	M.
Hydrostatik.	H.
Aerometrie.	A.
Hydraulik.	H.
Optik.	O.
Catoptrik.	C.
Dioptrik.	D.
Perspektiv.	P.
Astronomie.	Astr.
Geographie	G.
Chronologie.	C.
Gnomonik.	Gn.
Artillerie.	Ar.
Fortification.	F.
Baukunst.	B.

A.

Abdachung. F. 18
Abend. Astr. 25.
Abenddämmerung s. Dämmerung.
Abenduhr Gn. 8. 19.
Aberration. Astr. 241 b.
Abirrung des Lichtes. Astr. 241 b.
Abscissen. h. G. 6.
Abscissenlinie. h. G. 6.
Abweichende Uhr s. Sonnenuhr
Abweichung einer Fläche v. der Mittagsfläche. Gn 3
Achromatische Gläser } Fernröhre } D. 13 d
Addiren. R. 9. 38
Adernhaut. O. 27 a
Adspect. Astr. 315
Aehnlichkeit G. 4
Aequatio Centri. Astr. 258
Aequator. Astr. 14. G. 9. 14. 4.
Aequinoktialpunkt. Astr. 76 a. 237. 243. VI
Aequinoctialuhr. Gn. 9
Aequinoktium. h. 76
Aera. C. 40
Aerometrie A. 2
Aggregat. R. 9. A. 15 b
Algebra. A 1
Algebraische Aufg. A. 35 sq. 70
Alternatio rationum
Allmählige Fortpflanzung des Lichtes Astr. 241 b
Amben. A. 47 a
Amplitudo
Angle de l' epaule. F. 55
Angulus ad ☉
incidentiae O. 11. 12 a
refractionis. O. 16
Anomalie Astr. 249. 255. 256.
Anlage. Baukunst.
Ansteckkiehl H. 10 a
Antichthones h. 8
Antipodes. das.
Aphelium. Astr. 244. 277
Apogäum. Astr. 245
Approchen. F. 132
Apsiden. Astr. 246
Arbeiten, arithmetische anzuzeigen. R. 51 b
Archimedische Schnecke s. Wasserschnecke
Arcus visionis. Astr. 110
Argument d. Inclination Astr. 265
Arithmetik. R. 1
Arithmetische Progression, s. Progression
Artillerie. Av. 1.
Ascensionaldifferenz. Astr. 79
Ascensio recta. Astr. 76.
obliqua. Astr. 78.
Astronomie. Astr. 1
comparative. 214
Atmosphäre d. ☉. Astr. 139
— der Planeten. 196
— des ☽. 151 b
Asymptote. h. G. 25. VI. 29. II.
Aufgaben, algebraische
— aufzulösen. A. 35 ꝛc.
Aufgang. Astr. 24.
Aufhebung eines Bruchs, s. Bruch
Aufsatzröhre. H. 10 a
Aufsteigung s. Ascensio
Auge. O. 19
— kurzsichtiges. 29 a. D 16 b
— weitsichtiges. D 13 c. 16 c.
Augengläser. D. 23
Augenpunkt. P. 4
Aussenwerke. F. 65

Ausfälle. F. 27a
Ausziehung der Wurzeln, s. Wurzel
Axe der Planeten. Astr. 194. 196. 151a
— eines Glases. D. 9a
— grosse, kleine, Ellipse, h. G. 22. VII
— conjugirte. das.
Azimuth. Astr. 82
Azimuthaluhr. s.

B.

Bahnen der Planeten. Astr. 242. 243.
Banquet. F. 59
Barometer. A. 35
Barometerhöhe A. 37
Basis d. Log. Systems. J. 8 und T. 15c
Bastey F. 23
Bastardbruch. R. 62a
Batterie. F. 135.
Baukunst. B. 1—10.
Bedeckungen. Astr. 216.
— der Gläser D 13c. 36
Bejaht. A. 15b
Beleuchtung. D 8c.
Berge im D. Astr. 292.
— in d. ♀. Astr. 192.
Berme. F. 57.
Beschleunigende Kraft M. 48u
Beschleunigung M. 48u
Beständige Defenslinie. F. 40.
Beugung d. Lichtes. D. 37.
Bewegende Kraft. M 48s
Bewegung scheinbare. D. 58.
— tägl. Astr. 10. 43
— eigene Astr. 43.
— eigene d. Fixsterne. 241c
— mittl. Bew. Astr. 252. 277
— wahre. Astr. 253
Bewegungspunkt. M. 22.
Bilder im Auge. D. 20. 30b
— in Spiegeln C. 6. 9. 15. 18. 19. 34.
— warum rauhe Flächen keine machen. C. 12b
— hinter Gläsern. D. 10b. D. 12
— Perspectivische. P. 3
Bodenstück. Ar. 20
Böschung. F. 18
Bogenschuß. Ar. 33
Böller. Ar. 34
Bollwerk. F. 23. 24. 27a. 28
Bollwerksohr. F. 32a
Bollwerkspünte. F. 25
Bollwerkswinkel. F. 51
Bombe. Ar. 37. 33b
Brandröhre. Ar. 37. 38
Bresche. F. 146
Brechung. D. 9. 13. 14. D. 15
Brechungsebene. D. 17
Brechungsverhältniß. D. 3a. 9a.
Breite eines Sterns. Astr. 89. 275
— geographische. G. 22
Brennglas. D. 11.
Brennraum. C. 25a
Brennpunkt. C. 33. D 10a. h. G. 24. VI
Brennweite. D 10a
— d. Objektiv u. Oculargl. D. 29. 40.
Brennspiegel. C. 25
Brille. F. 92. D. 16c
Bruch. R. 61 — 71
Brücken. F. 27a
Brustwehre. F. 13
Büchsenmeistereykunst. Ar. 2
Buchstabenrechenkunst. A. 3. 19—22

C.

Calendae. C. 37
Calender, immerwähr. C. 51
— verbessert. C. 77. (5)
— Reichs: C. 77. (5).
Caliber. Ar. 15
Caliberstab. Ar. 16. 19.
Camera obscura. O. 30
Canonen. Ar. 11. s. Stücke
Capitallinie. F. 47
Caponieres. F. 82. 84
Carcassen. Ar. 41
Cardinalgegenden. G. 47
Carthaune. Ar. 11
Casematten. F. 27a
Castelle. F. 112
Catoptrik. C. 1
Centriwinkel. F. 56
Centrifugalkraft } Astr. 243. I.
— petalkraft } u. M. 48 dd
Centrum grauitatis s. Schwerpunkt
Chaldäische Scrupel. C. 9
Characteres chronologici. C. 43
Chemin couvert. F. 74
Choroidea. O. 27a
Christi Geb. C. 71.
Chronologie C. 1
Circul, excentrischer. Astr. 254
Circullinie s. Kreis
Circuli diurni. Astr. 26
Circumvallationslinie. F. 124
Citadelle. F. 112
Climata. G. 31a. G. 46
Cörper, perspectivisch zu zeichnen. P. 13
Combinationen. A. 47a
Combinatorische Analytik. A. 47d
Cometen. Astr. 306
Commutationswinkel. Astr. 271
Concilium Nicaeum. C. 76.
Conchoide. h. G. 27. 28.
Conjunction. Astr. 315
Conus s. Kegel
Construiren. h. G. 2
Contraminen. F. 86
Contravallationslinie. F. 128
Contreguarde. F. 69
Contrescarpe. F. 74. 140. 142
Cornea. O. 19
Cortine. F. 27
Cosinus zu differentiiren. D. 23
Crepusculum s. Dämmerung
Crownglas. D. 13d
Cubus s. Würfel
Cubikwurzel. R. 73. 79
Curtirte Weite. Astr. 269
Cunette. F. 64a
Cyclus indictionum. C. 66
— lunae. C. 53
— Solis. C. 45
Cylinder. G. 179

D.

Dämmerung. Astr. 114. G. 39
Dämpfe und Dampfmaschinen. A. 12
Declination. Astr. 66.
Declinatorium magnet. Gn. 3a
Declinirende Uhren. Gn. 22
Decimalbrüche. R. 71a
Defendirende Linie. F. 40
Defension. F. 6
Defenslinie. F. 40
Delphine. Ar. 22.
Demigorges. F. 44
Demilune. F. 68
Descensionaldifferenz. Astr. 79
Deutlichkeit. D. 18a. 22. 29.

Diameter Verhältn. zum Umkreise zu finden. J. 12
— der Planeten s. Durchm.
Differenzen. D. 1. 5. R. 12
Differentialen. D. 3
Differentialformeln. D. 20 ꝛc.
— trigonom. D. 21.
— logarithm. D. 26. 31
Differentialgleichung. D. 9
— verhältniß. D. 3. 5
Dignität s. Potenz
Dimensionszeichen. A. 47 d
Dioptrik. D. 1
Direktionslinie. M. 23
Distanzpunkt. P. 7
Dividendus. R. 19
Dividiren. R. 17. 51. 51 a
Divisor. R. 19
Dodekändrum. G. 190
Dollond. D. 13 d
Doppeltfernr. Astr. 241
Drachenkopf } Astr. 263
— schwanz }
Dreyeck. G. 19
Druck des Wassers. H. 15 b
Druckwerk. H. 11
— dessen Berechnung. H. 14
Dunkelheit. O. 5. 6.
Durchmesser eines Kreises. G. 13
Durchmesser scheinbarer. D. 51 a
— d. Gestirne. Astr. 218. 220.
Durchsichtig. O. 6
Durchschnitt, Festung. F. 99
Dyadik. R. 32 a

E.

Eccentricität. Astr. 247. 277
Ecliptik. Astr. 45. 70. 237
Einfallswinkel. O. 11. 12 a
Einheit. R. 3. 4. 34 a
Einmahleins. R. 47
Einschalten. C. 30 a
Elastische Körper. A. 5
Elevationswinkel Art. 33 b
Ellipse. Astr. 242. h. G. 22.
Ellipsograph. h. G. 22. XVI
Elongation. Astr. 272.
Emanationssystem. O. 3
Emersionen d. 4 Trab. Astr. 215
Enfiliren. F. 81
Entfernung der Planeten von der ☉. Astr. 282
Entgegensetzung. Astr. 315
Epacten. C. 57
Epoche. C. 40
Erdaxe. Astr. 236. 239. G. 14. IV
Erdbahn. Astr. 237
Erde ihre Gestalt. G. 2. 14.
— Grösse. G. 13. 14
— wie groß sie im ☽ gesehen wird. Astr. 293
Bewegung. Astr. 237
Erdfinsterniß. Astr. 324
Erdkugeln. G. 50—54.
Erdstriche. G. 27. Erdwinde M. 106 e u. 106 f
Erhabener Spiegel, C. 3. 13
Erhabenes Glas s. Glas
Esplanade. F. 74
Exponent. R. 17. 52. A. 25
Exponentialgrösse. D. 28. 29

F.

Facen. F. 25
Fackeln der Sonne. Astr. 143
Factores, Factum. R. 15. 64 a
Falkaune, Falkonet. F. 26

Fallbaum. F. 27a
Fallgatter. F. 27a
Farben. O. 46
— weise ist nicht einfach. 47
— der Körper. 49.
— schwarze. 49a
— einfache. 49a
Farbenzerstreuung. D. 13 2c.
Farbigte Haut. O. 27a
Faß s. Bistrung
Faschinen. F. 140
Faussebraye. F. 59
Feldbefestigung. F. 1a
Feldschanzen. F. 114. 118. 120 2c.
Feste, bewegliche. C. 73. 74.
— unbewegl. 75
Festigkeit der Seilen. M. 106c
— der Holzarten das.
— der Metallen das.
Fernglaß } D. 22
— rohr }
— Galiläisches. D. 24
— astronomisches. 27
— achromatisches. 29
— auf Erden. 30
Festung. F. 8. 101. 103.
Feuerkugeln. Art. 43. 44
Feuchtigkeit, gläserne. O. 19
— chrystallene. 19
— wässerichte 19
Feuerspritze. H. 22
Feuerwerkerkunst. Ar. 2
Fixstern. Astr. 47. 300
Fixsternsysteme. Astr. 96a
— verzeichnisse. 98b
Fladderminen. F. 79a
Flanken. F. 29—36
Flecken des ☉. Astr. 162. 180
— der ☿. 193
— des ♃ und ♂. 193a
Flintglas. D. 13d
Flug. Ar. 35.
Flüßige Körper. H. 2.
Formeln in Worte überzutragen. A. 37
Fortification. F. 1
Friktion s. Reibung
Frühling. G. 32
Fundamentallinie. P. 5
Function h. G. 4
Fusmaaße. G. 9a
Futtermauer. F. 20
Fußmörser. Art. 36

G.

Gallerie. F. 144
Gedrittschein. Astr. 315
Geocentrisch. Astr. 270
Geographie. G. 1.
Geographische Breite. G. 22
— Länge. G. 25. 26
Geometrie, gemeine. G. 1
— höhere. h. G. 1.
Georgsplanet. Astr. 42a
Gesechstschein. Astr. 315
Gesellschaftsrechnung. R. 94.
Geschützkunst. Art. 1.
Geschütze. Art. 10
Gesichtskreis. Astr. 22a
Gesichtslinie. F. 25
Gestirne. Astr. 91
Getriebe. M. 16
Gevierdtschein. Astr. 315
Gewicht. M. 48r
Gewichte verschiedener Städte. M. 55a
Gewicht flüßiger Körper. H. 25
Glacis. F. 74
Glas, erhabenes } D. 5. 12.
— planconvexes } 13. 17.
— hohles. D. 7. 14. 20.
— vieleckichtes. 43
— zu schleifen. 45 seq.
Gläserne Feuchtigkeit. O. 19.

Gleichgewicht flüßiger Massen. H. 17
Gleichung. A. 48
— Eigenschaften. A. 51
— reine. A. 48
— unreine } 50
— Wurzeln }
— d. krummen Lin. h. G. 9
Glied, allgemeines. A. 47e
Gnomon. Astr. 32a
Gnomonik. Gn. 1
Graben e. Festung. F. 62—64
— trockner } 64a
— nasser }
Grade bey Winkeln. G. 15
Grad auf d. Erde. G. 14. V.
Granaten. Art. 39
Gravitation. Astr. 243
Grössen. A. 4
— entgegenges. A. 15b sq.
— unmögliche. A. 34a
— veränderliche. h. G. 3
— verschwindende. D. 3
— scheinbare. O. 51a
Güldene Zahl. C. 55. 56

H.

Hadleyische Sextanten. Astr. 87a
Halber Mond. F. 68
Halbmesser. G. 13
Halbschatten. O. 42a
Haubitzen. Ar. 45
Hauptaxe e. Glases. D. 9a
Hauptgegenden. G. 47
Hauptlinie. F. 47
Haut, harte }
—— schwarze } O. 19
—— netzförm. }
Hebel. M. 8
—— der ersten Art. M. 44a
—— der andern Art. das.
Heber. H. 24
Helakim. C. 10
Heliocentrische Breite. Astr. 264a
—— Länge. 267a
—— Ort. 270
Herbst. G. 32
Herschel. Astr. 42a
Hesperus. Astr. 191
Himmelskugeln. Astr. 11. 98c
Höhe ein. Sterns. Astr. 55. 60
Höhemessung, geomet. G. 170
—— barometr. A. 40
Hohlglas. D. 20
Hohlspiegel. C. 20 seq.
Horizont. Astr. 20. 22.
Horizontalfläche. Astr. 22a b
—— perspectivische. P. 8
Horizontallinie, die wahre. M. 28
—— die scheinbare. M. 31
Horizontalrefraction s. Refrakt.
Hornhaut. O. 19
Hornwerk. F. 72. 73
Humores oculi. O. 19
Hydraulik. H. 1.
Hydrostatik. H. 1.
Hyperbel. h. H. 26.

J.

Jahr, julianisches } C. 30
—— Schalt- }
—— bürgerliches. 30a
—— jüdisches. 39
—— Gregorianisches. 32
—— Anfang. 38
Jahreszeiten. G. 32
Jahrtermin. G. 40
Jahrzahlen in einander. G. 71
—— zu verwandeln. 72
Icosaedrum. G. 190
Inclinationswinkel. O. 16

Inclinirte Uhren. Gn. 26
Intervallum. Astr. 248
Integralrechnung. J. 1
—— formeln. 2
Interusurium. A. 68
Irrationalgrössen. A. 34
Jupiter. Astr. 42. 282. 290
—— Flecken und Streifen in ihm. Astr. 193 a
—— Umdrehung s. Axe. 194. 194 a
—— Atmosphäre 196.
—— Bahn, s. Planeten
Jupiterstrabanten. Astr. 197
—— Umlaufszeiten. 199 a
—— Abstände v. A. 200
—— Verfinsterungen. 201. 241 c.

K.

Kammrad. M. 15.
Kammer in Mörsern. Ar. 35
—— Minen. 53
Kartetschen. Ar. 31
Kastenkunst. H. 6
Kegel. G. 185
—— Berechnung des abgekürzten. G. 202 a
—— Kegelschnitte. h. G. 26
Kehllinie. F. 44
Keil. M. 105
Kepler. Astr. 243. IV. 259 a
Kernschatten. O. 42 a
Kernschuß. Art. 33
Kessel in d. Bombe. Ar. 35
Kloben. M. 18
Knallpulver. Art. 8
Knoten. Astr. 261. 277
—— d. Muschellinie. h. G. 29. III.
Körper, Aufgabe von den drey K. Astr. 243. V.
Körper, perspektivische P. 13
—— flüßige. H. 2
—— feste H. 4.
Kolbenhub. H. 10
Kolbenspiel das.
Kometen s. Cometen
Kosekante, Kosinus, Kotangente. T. 7 a
Kraft, anziehende. Astr. 243
Kreis, Entstehung. G. 11
Gleichung. h. G. 19
Kreisbogen aus ihrer Tangente. J. 11
Kreisfläche. G. 130
Kriegsbaukunst. F. 1
Kronwerk. F. 73
Kugel. G. 177
—— Berechnung. G. 203
—— Diameter einer einpfündigen. Art. 18
Kugelnetze. Astr. 11 a
Kurzsichtigkeit. D. 16 b

L.

Ladeschaufel. Art. 24
Ladung. Art. 25
Länge eines Sterns. Astr. 89
—— e. Orts. G. 25. 26
—— des Tages s. Tag
Laffetten. Art. 23
Lager im Mörser. Art. 35
Lampenmicrometer. D. 33 a
Landcharten. G. 56. 57
Latitudo loci. G. 22.
Lauf im Mörser. Art. 20
Laufgraben. F. 132
Lehrsatz, binomischer. A. 37 d
Leibrenten. A. 69
Lens concava } D. 5. 7
— convexa }
Leuchtende Körper. O. 6
Leuchtkugeln. Art. 44

Libration d. D. Astr. 181
Licht. O. 3
—— Dessen Stärke 8 a
—— Geschwindigkeit. Astr. 241 c
—— Beugung. D. 47
—— Brechung. D. 9. O. 15
—— Zurückwerfung. O. 17
—— Schwächung } O. 6 a
—— Flamme } 56
—— Straht. O. 3
Licht des D. Astr. 153
— des ☿. 187
— der ♀. 189
Ligne de defense. F. 40
Linie. G. 1
—— krumme, zu construiren. h. G. 2. 3.
—— gerade, Gleichung derselben. 11.
—— zu fortificiren. F. 108
Linsen. D. 5. 7.
—— Chrystallinse. O. 19
Logarithmen. T. 13
—— zu berechnen. J. 5 seq.
—— zu differenziiren. D. 26. 31.
Logarithmisches System. T. 15 b
—— natürliches. D. 30. J. 8. T. 18 a
—— briggisches. J. 8. und T. 18
Longitudo loci. G. 25
Lucifer. Astr. 191
Luft. A. 1
— ihr Widerstand
— beym Bombenwerfen. Art. 33 b. XI
Luftpumpe. A. 9.

M.

Maasstab, der verjüngte. G. 47. 164
Magister Matheseos, s. Pythagor. Lehrs.
Magnetnadel. G. 49. Gn. 3 a. 12.
Mahlerkunst. O. 51. 193.
Mars. Astr. 42. 193. 194. 196. 282
Maschinen. M. 106 e
Mechanik. M. 1
Mauerquadrant. Astr. 32 a
Meere im D. Astr. 162. 180
Meile, geographis. G. 14. V
Mercurius. Astr. 42. 189 282. 290
—— in der Sonne. 186
Meridian. Astr. 18. G. 10
—— unterschied. G. 6 a
Meßkette. G. 45, 46
Microscop. D. 38. 40. 48
Milchstraße. Astr. 95
Micrometer. Astr. 182. 184
Minen. Art. 49—53
Mira Stella. Astr. 304
Mittag. Astr. 25
Mittagsfernrohr. Astr. 32 a
Mittagsfläche. Astr. 23. 27
Mittagshöhe. Astr. 56
Mittagskreise, Unterschied. G. 6 a
Mittagslinie. Astr. 28. Gn. 17 a
Mittagsuhr. Gn. 6. 16
Mittelpunkt d. Größe. M. 27.
—— der Schwere s. Schwerpunkt
Mitternacht. Astr. 25
Miiternachtsuhr. Gn. 6. 17
Mittlere Anomalie, s. Anomalie
Modulus d. Logarithm. J. 9
Mörser. Art. 34. 36
Moment, statisches. M. 48
— mechantsches. H. 25.

Moment d. Trägheit. M. 48 k
Monate. C. 36
— jüdische. 39
Mond, desselben eigene Bewegung. Astr. 37
— Umlaufszeit. 238
— Umdreh. um. s. Axe. 181
— Grösse. 287
— Weite von der Erde. 279. 282
— Atmosphäre. 151 a
— Axe. 181
— Bahn. 243. IV.
— flecken } 162. 180
— charten }
— finsterniß. 157. 238. II. 321
Mondsberge. Astr. 292
— tafeln. Astr. 243. V.
— viertel. Astr. 153
Mondenjahr. C. 25
— monat. 17
— epacten. 57. 59.
Mondcircul. C. 53. 76 a II.
Mordkeller. F. 27 a
Morgen. Astr. 25
Morgenröthe. Astr. 114
Morgenstern. Astr. 191.
Morgenuhr. Gn. 7. 18
Mühlen. H. 25
Mündung eines Stücks. Art. 15
Multiplication. R. 15. 49
—— in Buchstaben. A. 20. 21
—— der Brüche. R. 63. 68.
Muschellinie, h. G. 27. 28
— Gebrauch beym Visiren der Fässer. G. 215a no. X.

N.

Nacht. C. 2
Nachtgleichen, Vorrücken ders. Astr. 98 a
Nadir. Astr. 15
Nahmen der Verhältniß. R. 52
Nebelsterne. Astr. 96
Nebengegenden. G. 47
Nebenstriche. F. 43
Nebenwinkel. G. 39
Negativ. A. 15 b
Neigung der Planetenbahnen. Astr. 277. IV
Neigungswinkel. O. 16. D. 3
Nenner. R. 61
Netze, geometrische. G. 219
Netzhaut. O. 19
Neumond. Astr. 238. I. C. 61. 39.
Neunerprobe. R. 40. 40 a
Neuton. Astr. 243. IV. O. 49 b. 3
Nicäisches Concilium. C. 35. 76
Nodi s. Knoten
Nonae. C. 37
Norden. Astr. 25. G. 47
Nordpol. Astr. 12
Numeriren. R. 31
Nutation. Astr. 241 d

O.

Oberschlägige Räder. H. 25
Objektivglas. D. 23
— achromatisches. D. 13 d
Occasus s. Ortus
Oktaëdrum. G. 190
Olympias, C. 71
Optik. D. 1
Opposition. Astr. 315
Ordinaten. h. G. 6. 30
Ordnung. R. 34 a. h. G. 9
Ordnungsexponent. R. 37 a
Orillon, F. 37

Ort

Ort der Planeten. Astr. 266. 277
— der Sonne. G. 51
Ortus, cosmicus, acronyctic-us, heliacus. Astr. 109. 110
Osten. G. 47
Ostergränze. C. 76 a
Ostern. C. 77
Ostertäfelein. 77
Ostervollmond. 76 a

P.

Pallisaden. F. 79
Parabel. Ar. 33 b. III
— Astr. 313 a
— h. G. 23
Parameter. h. G. 22. XIII. 25. VI
Parallaxe. Astr. 121 — 127. 240. 241 a. 273
Parallelogramm. G. 23
Parallelkreise. Astr. 26 a
— strahlen. D. 10 b
Parallelopipedum. G. 182
— linien. G. 22
— ihre Theorie. G. 72. u. f.
Parapet. F. 13
Passageinstrument. Astr. 32 a
Paternosterwerk. H. 5
Patronen. Art. 24 a. 32 a.
Perigäum. Astr. 245
Perihelium. Astr. 244
Periodus julianus. C. 69
Peripherie. G. 13
— Ihre Verhältniß zum Durchmesser. G. 129
Perpendikel. G. 17
— uhr. Astr. 26 b. 239
Perspektiv. P. 1
Petarde. Art. 47
Pfeiler, perspektivische. P. 17
Phasen der ♀. Astr. 187
— des ☽. 238. I.
Phosphorus. Astr. 191
Photometrie. O. 9
Planeten. Astr. 42 a. 47. 214. 290
Planetenbahn. Astr. 242
Planetensystem, Fortrücken desselb. Astr. 241 c
Planetenstunden. C. 7
Platonisches Jahr. Astr. 98 a
Platz irregulären
— zu fortificiren. F. 104
Plumpe s. Pumpe
Polarkreise. Astr. 52
Polaruhr. Gn. 8. 20.
Polhöhe. Astr. 63. G. 23
Polieren. C. 4
Polus antarcticus & arcticus. Astr. 12. 13
Polyedrum. D. 43
Polygone äussere. F. 39
— innere. 46
Polygonwinkel. F. 50
Polynomische Grösse. A. 47
Positiv. A. 15 b
Potenzen. A. 24 seq.
— zu differentiiren. D. 17
— Grad derselben. A. 25
Poternen. F. 27 a
Prellschuß. Art. 33 a
Prisma. G. 179
— zerlegt das weise ☉licht in Farben. O. 45
Probe der Addition. R. 44
Produkt. R. 15. A. 47 d
— zu differentiiren. D. 14
Profil eines Walles. F. 99
Projektion. P. 3. G. 57 a
Progressionen arithm. A. 55 seq.
— geom. R. 56. A. 60 seq.

Proportionen. R. 53. 55. 81. 82—85. A. 58
Proportionallinie. G. 158
Proportionalzahlen. R. 84. 85
Proslaphaeresis. Astr. 258
Prozwagen. Art. 23a
Pülschelkunst. H. 5
Pulver zu machen. Art. 4
— Würkung. 5
Pulverladung. Ar. 5a
Pulversätze. Ar. 6
Pulvermühlen. Ar. 4a
Pulverprobe. Ar. 9
Pumpe. H. 9
— dabey erforderliche Abmessungen. H. 10c
Punkt, geometrischer. G. 1
— leuchtender. O. 8
Pupille. O. 19
Pyramide, geometris. G. 187
— perspektivische. P. 15
Pyrometrie. A. 43
Pyrobolia. } Ar. 2
Pyrotechnia. }
Pythagorischer Lehrsatz. G. 144

Q.

Quadrat, geometrisches. G. 20
— dessen Verzeichnung. G. 98
— dessen Ausmessung. G. 114
— perspektivisches. P. 10
Quadratzahl. R. 42
— wurzel. 74—78
Quadratische Gleichung. A. 48. 50
Quadrant. Astr. 32a
Quotient. R. 17. Differential desselben. D. 18

R.

Rabatt. A. 68
Rad an einer Axe. M. 12
Radius kleiner. F. 48
— großer. 49
Räderwerk. M. 79
Rasiren. F. 21
Raumnadel. Ar. 42a
Raute. G. 20. ihre Verzeichnung. G. 100. ihre Ausmessung. G. 121
Ravelin. F. 67. 90
Rechenkunst. R. 1
Rechtläufig. Astr. 225
Redoute. F. 116. 119. 123
Reduction d. Ecliptik. Astr. 268
Reesische Regel. R. 99a. I
Reflexion. O. 11
Reflexionswinkel. O. 11. 12a
Refraction. O. 15. D. 2
— astronomische. Astr. 129
Refractionswinkel. O. 16
Refringirter Winkel. O. 16
Regenbogen. O. 46
Regula quinque. R. 92
Regimentsstücke. Ar. 11
Regulare Vestung. F. 88
Reibung. M. 106b
Reichskalender. C. 77
Reisen um die Erde. G. 5
Rektangel. G. 20, dessen Verzeichnung. G. 99. dessen Ausmessung. G. 117
Retina. O. 19
Ricoschettschuß. Ar. 33a
Ring um den ☽. Astr. 151
— des ♄. 211. 213
Röhren zu Ferngläsern. D. 24
Röhrenleitung. H. 16
Römer Zinszahl. C. 66

Römischer Kalender. C. 37
Rosenkranzmühle. H. 5
Rückgängig. Astr. 226
Ruhepunkt. M. 22
Ruthe. G. 9

S.

Salzspindel s. Soolwage
Sappiren. F. 139
Satellites 24 s. 24 Trabanten
Saturnus. Astr. 42. 209. 277. 282. 290
— dessen Trabanten. 209. 210
— Ring. 211. 213.
Saugröhre. H. 10a
Saugwerk. H. 9
Schädlicher Raum. H. 10a
Satz, hoher. H. 10a.
Schaltjahr. C. 23
— tag. C. 23
Schanzen. F. 114. Sternschanze. 117. 122
Schatten. O. 5. 34. 37. 46
— ganzer, halber. 42a
Schatten, perspektivischer. P. 23. 24
Scheere. F. 70. 71
Scheitel d. Parabel. h. G. 24. V
Schiefe d. Ecliptik. Astr. 71a. 243. VI
Schießgewölbe. F. 27a
Schlangen. Ar. 11
Schnellwage. M. 53
Schöpfräder. H. 8
Schöpfwerk. H. 6
Schuß. Ar. 26
Schußweite. Ar. 33b. III.
Schulterwehre. F. 32a
Schulterwinkel. F. 55
Schraube. M. 84
Schraube ohne Ende. M. 92
Schwankung d. D Astr. 181
Schwerebene. M. 26
Schwere auf d. Erde. Astr. 289. M. 32
— allgemeine. 243. V.
— specifische. M. 106d
Schwerpunkt. M. 26
Schweif d. Cometen. Astr. 306
Schwungräder, Schwungkolben. M. 106f
Sclerotica. O. 19
Sechseck. G. 108
Second flanc. F. 29. 43
Secundirende Linie. F. 22
Seeuhren. Astr. 26h
Segmente. Astr. 11a
Sehewinkel. O. 51a
Sehungsbogen. Astr. 110
Sehen. O. 2. Deutliches. 25. 26 seq.
Sehne. G. 13
Seitendruck des Wassers. H. 47
Serpentinel. Ar. 26
Setzkolben. Ar. 27
Setzwage. Astr. 22b
Sextilis. Astr. 315
Sidera medicaea. Astr. 198
Sichtbarkeit. O. 3
Siedepunkt. A. 48
Sinus. T. 2
Sirius. Astr. 303
Sommer. G. 32
Sonne. Astr. 133. 280
Sonnencircul. C. 45. 48
Sonnenfakeln. Astr. 143
Sonnenflecken. Astr. 136. 138a. 145
Sonnenfinsterniß. Astr. 150. 238. II.

Sonnenhöhen übereinstimmende. Astr. 26 g
Sonnenmicroscop. D. 42 a. 48
Sonnentafeln. Astr. 243. V
Sonnenjahr, tropisches. Astr. 277. II. C. 19
Sonnentag. Astr. 36 a
— strahlen, erregen Wärme. Astr. 135 a
— zeit. Astr. 36 a
— uhren. Gn. 2
— declinirende. 6. 22. 23. 25
— inclinirende. 26
— mechanisch zu verfertigen. 26 a
Sonntagsbuchstabe. C. 14. 47. 50
Soolwage. H. 25 a
Sphaera obliqua, parallela, recta. G. 37. 40. 44
Spiegel. C. 2. ebener 3. 5. sphärischer. 3. 13. conischer. 3. cylindrischer. 18
Spiegeltelescop. D. 41
Spielraum. Ar. 17
Spindel. M. 20
Springwerk. H. 21
Spritzen s. Feuerspritzen
Stampfer. Art. 27
Statik. M. 1
Steincharthaunen. Ar. 46
Stern im Auge. O. 31. 33 a
— bilder. Astr. 91
— veränderliche. Astr. 304
— charten. Astr. 98 c
Sterntag. Astr. 26 d
Sternuhr. Astr. 26 h
Sternzeit. Astr. 26 h.
Stiefel. H. 10 a
Stirnrad. M. 15
Stöckelkiel. H. 10 a
Störungen, gegenseitige der Weltkörper. Astr. 243. V
Strahlen, einfallende, zurückgeworfene. O. 10. gebrochene. 16
Streichende Defenslinie. F. 40
Streichwinkel. F. 53
Stücke. Ar. 10. Arten 11. Materie 14. Theile 20. Ladung. 25. 31
— Richtung. 33
Stückpulver. Ar. 4 sq.
Stunden. C. 3. astronomische. 4. Europäische 4. Babylonische. 6. Italiänische 6. Jüdische 7. Planeten 7. s. ferner Zeit.
Stundenkreis. Astr. 67 a
Stundenwinkel. Astr. 67 a
Subtraction in Zahlen. R. 12. 43
— Buchstaben. A. 19
Süden. Astr. 25. G. 47
Südpol. Astr. 12. 13
Summe. R. 9
— einer Bruchreihe. A. 61. seq.
Syderalumlauf. Astr. 277. II.
Systema mundi Copernicanum. Astr. 235. Tychonicum. 232

T.

Tag. C. 2. 3. längster und kürzester. G. 42
Tagebogen. Astr. 81 a
Tagekreise. Astr. 26
Talud. F. 18
Tangente zu differentiiren. D. 24. Aus ihr den Bogen zu finden. J. 11

Tangentialkraft. Astr. 243. I.
Tannzapfen. Ar. 32 a
Taschenchronometer. Astr. 26h. G. 6 a
Telescop, Herschels. D. 41
Tenaille. F. 70. 71. 89
Terreplain. F. 16
Ternen. A. 47 a
Tetraëdrum. G. 190
Theilung der Figuren. G. 142
Thermometer. A. 42
— das Re'aumürsche. A. 47
— das Fahrenheits. das.
— das Delislesche das.
— das Celsiussche oder schwedische das.
Theorische Astr. 2
Thierkreis. Astr. 48
Thore. F. 27 a
Thüre ins Perspektiv. P. 19. 21.
Todter Winkel. F. 28
Torricellische Röhre. A. 31
Trabanten der 4. Astr. 199. 200
— d. ♄ 209. 210. ♀ 214b
— des Uranus. 214 b
Trabantenverfinsterungen. Astr. 215
Trägheit. M. 48 k
Trancheen. F. 130
Trapez. G. 20
Traversen. F. 80. 97
Traubenhagel. Ar. 32 a
Triangel. G. 122
Trigonometrie. T. 1
Trilling. M. 17. 17a
Triebstöcke. M. 17 a
Trigonus. Astr. 315
Tropici. Astr. 49. G. 9

U.

Uhr. Astr. 26 h
Uhrzeit. Astr. 26 h
Undeutlichkeit wegen der Gestalt des Glases. D. 13b
— wegen der Farben. 13 c
Umdrehungsaxe der Planeten. Astr. 194
Umlaufszeit. synod. } Astr. 238. III.
— — periodis. }
— — tropische } 277. 277. II.
Ungleichheiten d. Planetenläufe. Astr. 243. V
Untergang der Sterne. Astr. 24
— — d. ☉. 81
Unterschied. R. 12
Unterschlägige Wasserräder. H. 25
Uranus. Astr. 42 a
Uvea. O. 19

V.

Vaubans Befestigungsart. F. 88.
Ventil. H. 12.
— öffnung. H. 15. I
Venus. Astr. 42. Phasen. 185. Gebirge und Rotation. 192 a. 193 a. in der ☉. 186. Umlaufzeit u. s. w. 277. 282. 290. ihr Trabant. 214 b
Vergrösserungsgläser. D. 37. 38
Vergrösserung eines Fernrohrs. D. 29 a. 33
— Mikroscops. D. 40
Verhältniß. R. 52. des Durchmessers zum Umfange zu finden. J. 12

Verhaue. F. 79 a
Verneint. A. 15 b
Vermischungsrechnung. R. 95
Verticalkreis. Astr. 54
— linie. 15 a
— uhr. Gn. 6
Vibrationssystem. O. 3
Vieleck. G. 104
Vieleckichtes Glas. D. 43
Viereck. G. 20. dessen Verzeichnung aus 5 Stücken. G. 103 c
Viertel des ☽. Astr. 153
Visirschuß. Ar. 33
Visirung der Fässer. G. 215. 215 a
Vollmond. Astr. 153. 238 I. C. 61
— des Aequin. } C. 76 a
— Oster; }
Vulcane auf dem ☽. Astr. 180

W.

Wände und Pfeiler ins Perspektiv. P. 17
Wärme vergrößert die Ausdehnungskraft der Luft. A. 20
Wässerichte Feuchtigkeit. O. 19
Waffenplätze. F. 75. 96
Wage. M. 49. solche zu probiren. M. 52
Wall. F. 9. 21. 22.
Wallgang. F. 16.
Walze s. Cylinder
Wasserschraube, Wasserschnecke. H. 3
Wasserwaage. Astr. 22 b
Wasserstoß. H. 25
Weg, bedeckter. F. 74
Weiser einer Sonnenuhr muß der Weltaxe parallel seyn. Gn. 26 a. II.
Weite zweyer Sterne. Astr. 86
— der Planet. v. der ☉. 282
Welsche Praktik. R. 96
Welt, wie sie aussiehet. Astr. 6
Weltaxe. Astr. 13. 236
Weltgebäude, tychonisches. Astr. 232
— copernicanisches. 235
Weltgegenden. G. 47
Weltkugel, gerade. G. 37
— parallele. 40
— schiefe. 44
Weltpole. Astr. 12
Wendekreise. Astr. 49
Winkel, geometrischer. G. 15
— optischer. O. 51 a
— zu fortificiren. F. 110. 111
— todter. F. 28
Windkessel. H. 23
Windraum. Ar. 17
Winkelhacken. G. 88
Winter. G. 32
Wischkolben. Ar. 29
Woche. C. 12
Wochentage, Buchstaben ders. C. 46 a
Wolfsgruben. F. 79 a
Würfel. G. 182
Wurzeln, irrationale. R. 80 b
— unmögliche. A. 34 a II. 41 a
— der Gleichungen. 50. 51
Wurzelzeichen. R. 80 a. A. 32

Z.

Zahl. R. 3. 36. auszusprechen. 37

Zahl, genannte. R. 42. gülde:
ne. C. 55. 56
Zahlensystem. R. 32a
Zählen. R. 31
Zähler. R. 61
Zapfenstück. Art. 20
Zauberlaterne. D. 42
Zeichen der Addition. R. 41.
Subtr. 45. Multiplic. 50.
Divis. 51b. 62b. himm:
lische. Astr. 46. der Zeit.
C. 43. der Wurzeln. s.
Wurzelzeichen. — der
Zahlen s. Ziffern
Zeit des Mittags. Astr. 26h
— wahre, mittlere. Astr. 36a
— Stern: 26h
Zeitgleichung. Astr. 36a. IX
Zeitrechnung, jüdische. C. 39a
Zenith. Astr. 15
Zerstreuungspunkt. D. 16a
Zeugmeistereykunst. Ar. 2
Zimmer, finsteres. O. 30
Ziffern. R. 37a
Zinszahl. C. 66
Zins- und Kapitalrechnung. A.
66
Zodiacus s. Thierkreis
Zodiacallicht. Astr. 116a. 139
Zonä s. Zonen
Zonen. G. 27
Zündröhre. Art. 37. 38
Zugbrücke. F. 27a
Zurückwerfungsebene. O. 17
Zusammenkunft. Astr. 238. III
Zwergaxe. h. G. 22. VIII.

Verbesserungen.

Seite 47 Z. 9 statt $-x^{-3}$ lies $=-x^{-3}$
— 71 Z. 10 von unten; heist lies heisen.
— 105 Z. 13 st. $\frac{y}{y-1}$ lies $\frac{x}{y-1}$
— 113 Z. 8. st. log (a + 20b l. log (a + 20b)
— 282 Z. 11 st. 2(x−y) dx − dy l. 2 (x−y) . (dx−dy)
ibid. Z. 5 von unten; st. (dx^4) l. $d(x^4)$
— 283 Z. 18 st. n + 1) $x^n dx$ l. $(n+1)\, x^n dx$
— 283 Z. 6 von unten; st. Exponent l. Exponent n.
— 284 Z. 6 von unten st. $-nax^{-n-1}-dx$ lies $-na^{-n-1}dx$.
— 286 Z. 17 st. $\frac{wdy = udw}{w^2}$ lies $\frac{wdu - udw}{w^2}$
ibid. Z. 19 st. $d\left(\frac{u}{w}\right.$ l. $d\left(\frac{u}{w}\right)$
— 287 Z. 5 st. ein l. einen
— 296. Z. 17 st. $\frac{\frac{1}{2}}{1=x}$ l. $\frac{\frac{1}{2}}{1-x}$
— 298 Z. 8 st. $\frac{b}{a}$ lies $\frac{b}{a}$
— 301 Z. 8 st. 4^5 l. 11^5
— 302 Z. 4 von unten st. y^5 l. y^6
— 304 Z. 17. st. uns l. nur
— 649 Z. 7 st. gesehen l. gesehen,
— 655 Z. 22 st. 25,58 l. 23,58
— 757 Z. 24 Robies l. Robins
ibid. Z. 25 D' Arcy l. D' Arcy;

Bayerische Staatsbibliothek München

Geom. Tab. I.

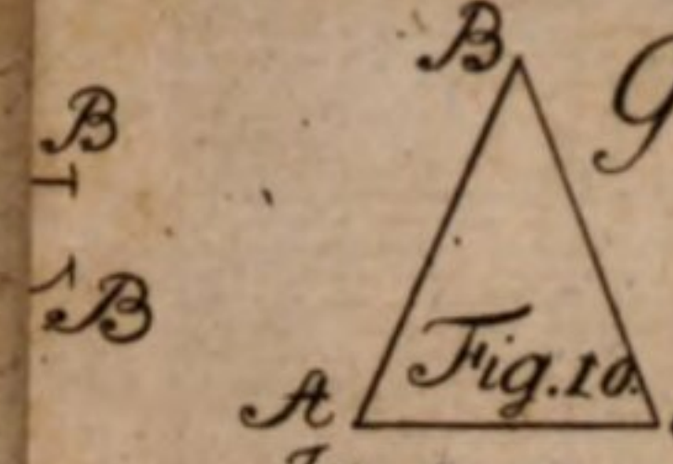


Fig. 10.

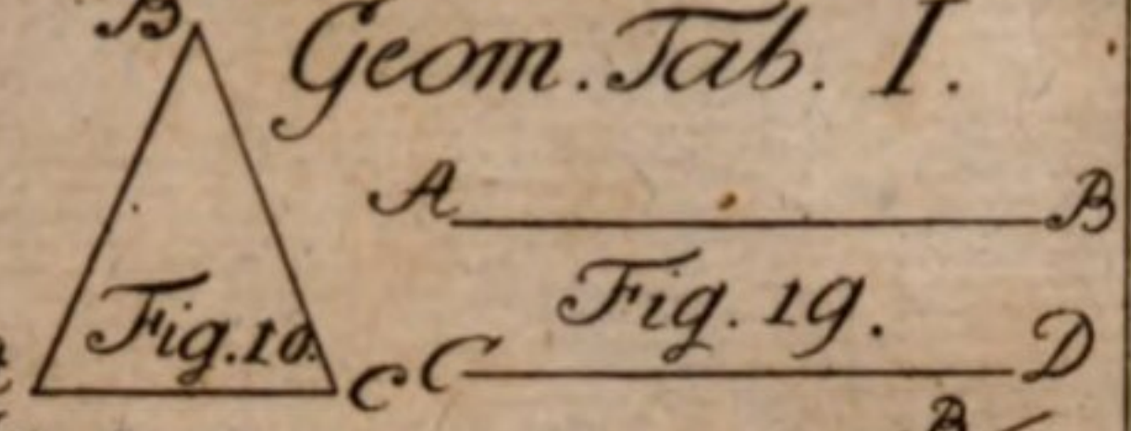


Fig. 19.

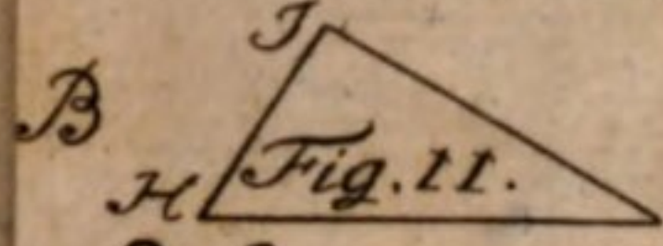


Fig. 11.

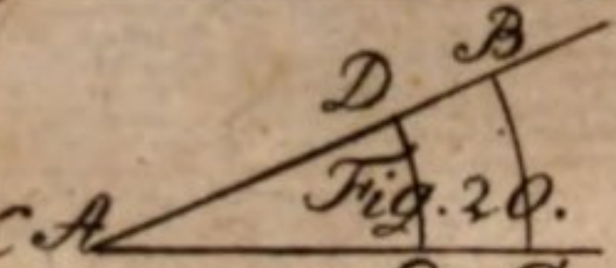


Fig. 20.

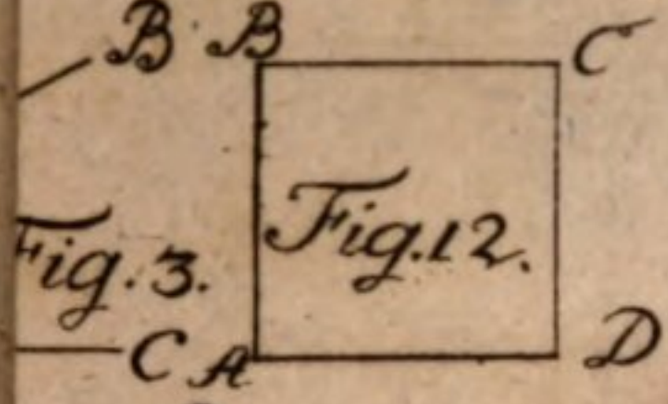


Fig. 12.

Fig. 3.

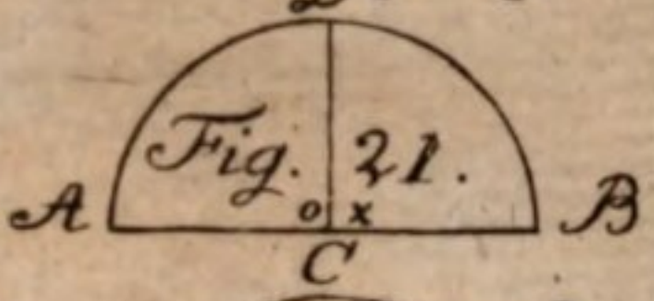


Fig. 21.

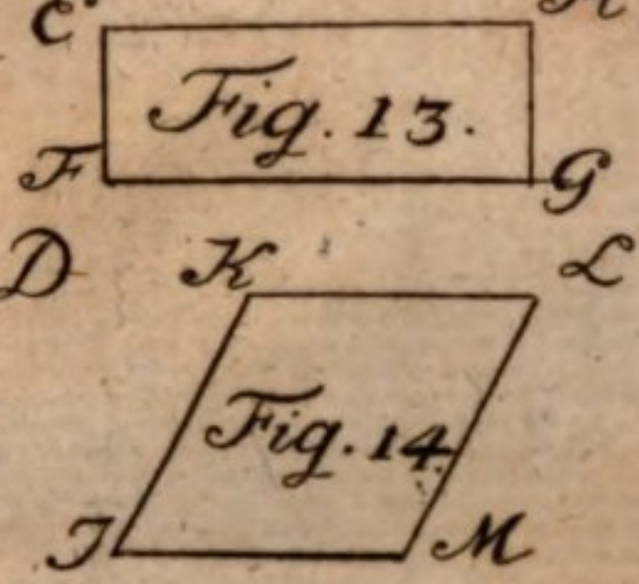


Fig. 13.

Fig. 14.

5.

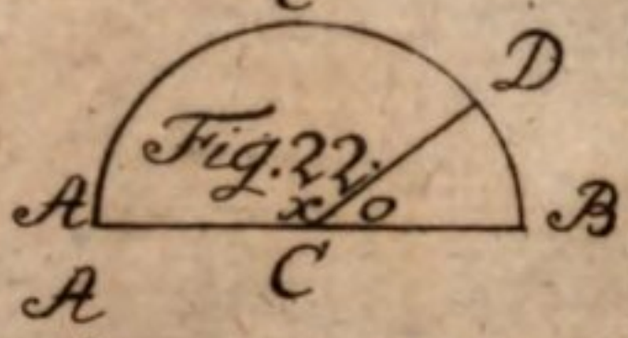


Fig. 22.

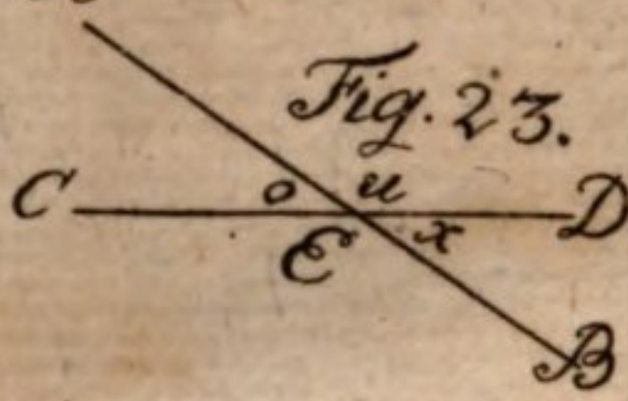


Fig. 23.

Fig. 15.

Fig. 16.

5.

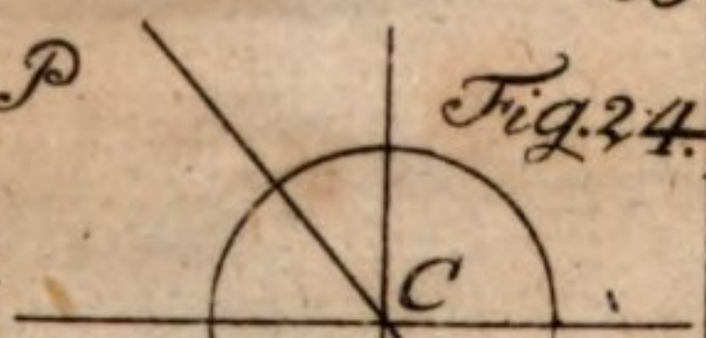


Fig. 24.

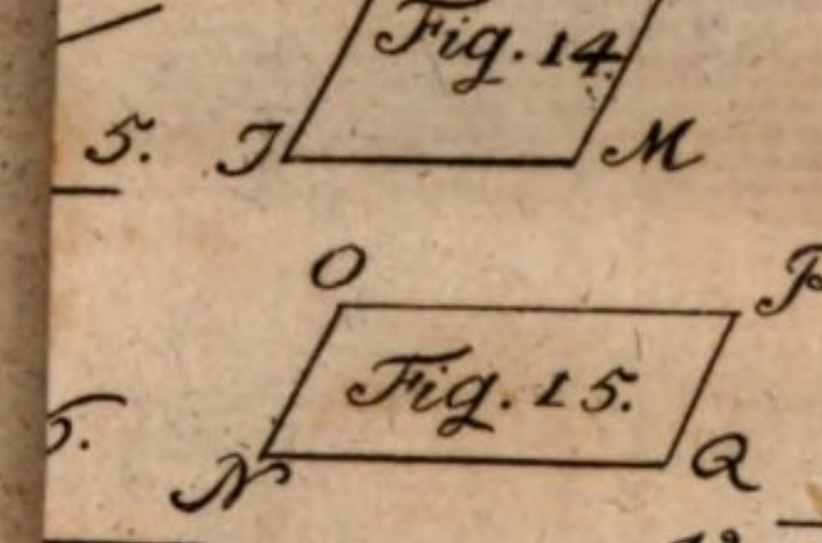


Fig. 17.

Fig. 18.

8.

Fig. 26.

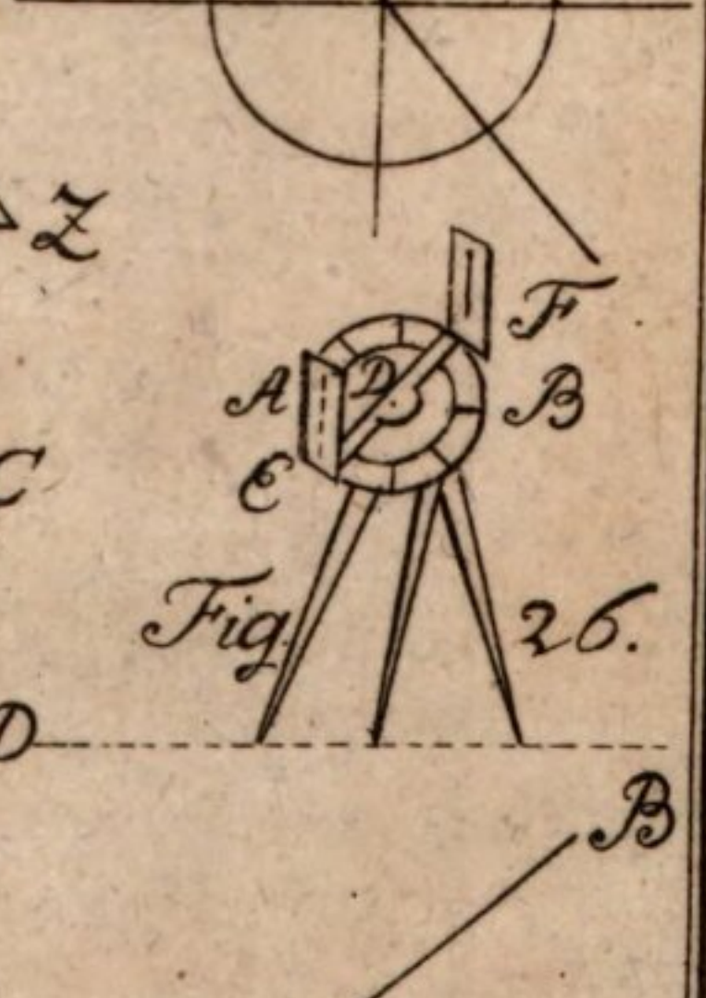


Fig. 28.

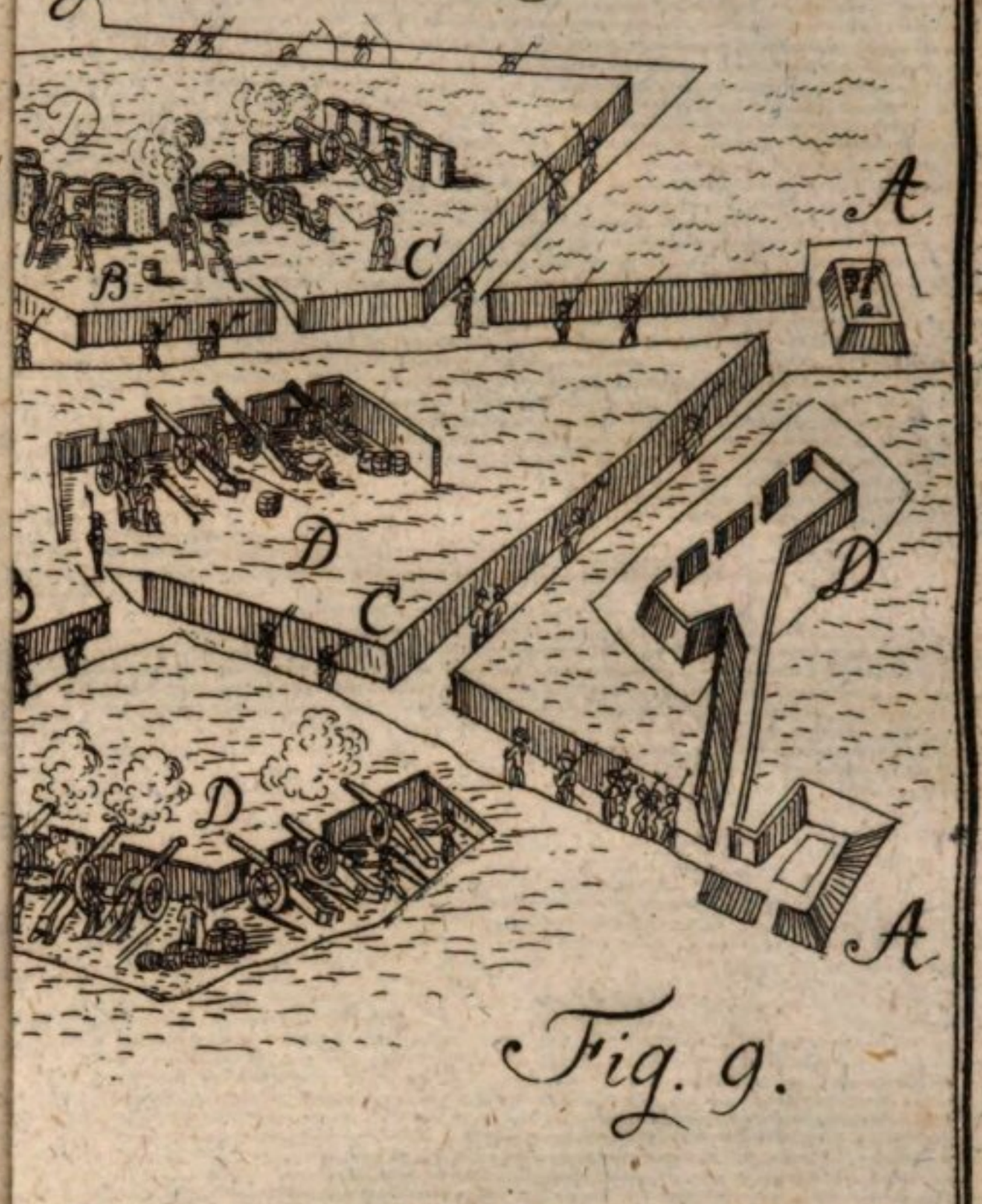
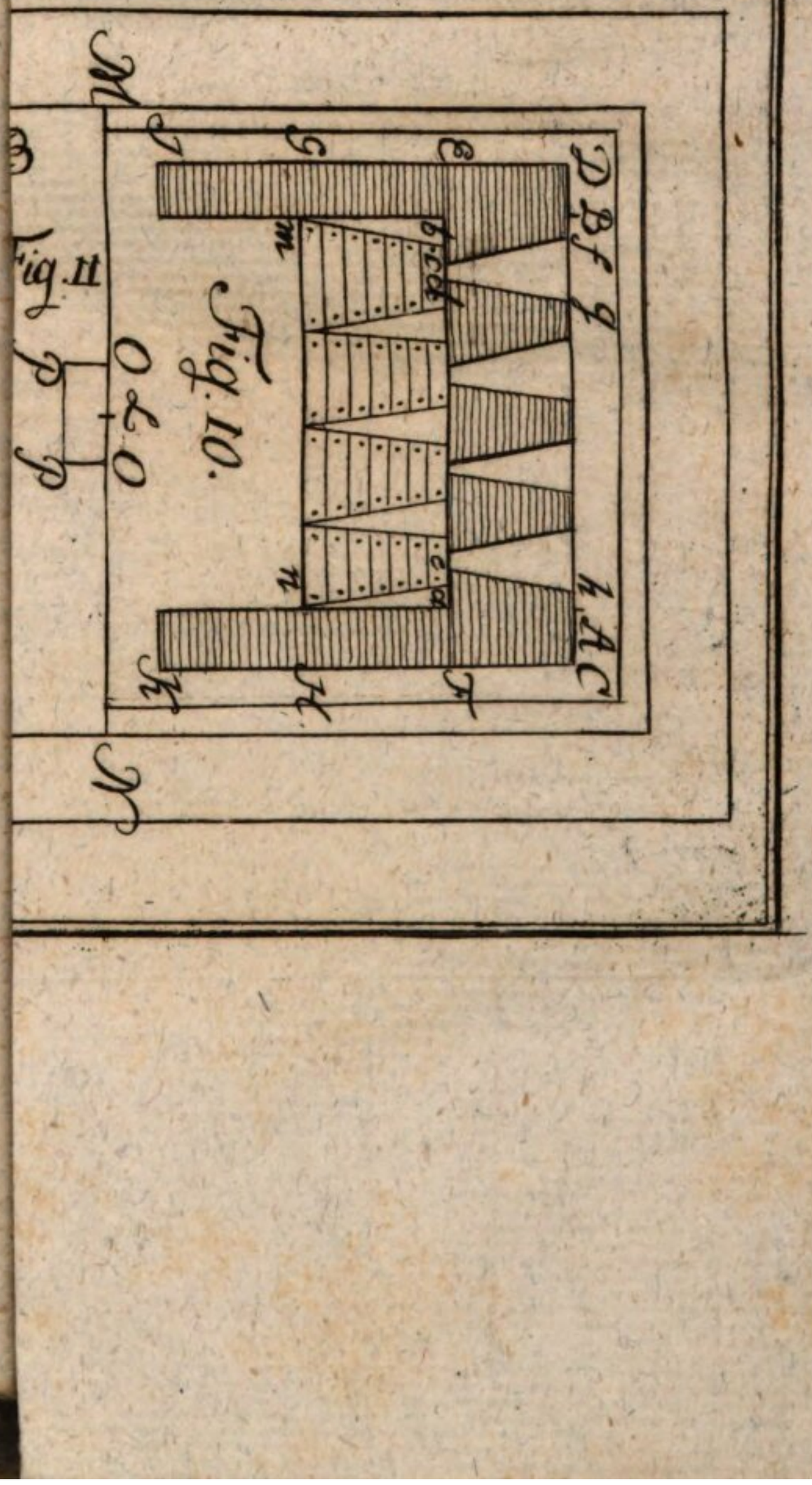


Fig. 9.



BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Wolff, Christian von, / Mayer, Johann Tobias, / Langsdorf, Karl Christian <
<von>>,

Neuer Auszug aus den Anfangsgründen aller mathematischen Wissenschaften

Marburg 1797

Math.u. 218 b
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594411-7
VD18 10180559-007